SUI SISTEMI QUASI-ELLITTICI *t*-OMOGENEI (*)

di PASQUALE BUONOCORE (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro si considerano sistemi quasi-ellittici lineari con unica dimensionalità, t, rispetto alle equazioni e alle incognite, che sono chiamati t-omogenei. Vengono stabiliti la formula di Green, teoremi di regolarizzazione locale per i problemi nel semispazio ed un teorema di esistenza e unicità.*

SUMMARY. - *In this paper we consider linear quasi-elliptic systems with one dimensionality, t, as regards the equations and the unknowns, which we name t-homogeneous. Are given Green's formula, local regularity theorems for the problems in the half-space, an existence and unicity theorem.*

In un recente lavoro T. Bruno [3] ha considerato per i sistemi quasi-ellittici lineari, introdotti da L. R. Volevich [15], i problemi in un semispazio verificanti la *condizione complementare* provando, fra l'altro, le maggiorazioni a priori delle soluzioni di essi (nel caso dei sistemi ellittici cfr. [2], [6], [13], [16]). In riferimento a tali problemi generali sussistono anche le maggiorazioni a priori concernenti l'operatore aggiunto funzionale.

In questo lavoro ho applicato tali risultati ai sistemi quasi-ellittici lineari con *unica dimensionalità, t,* rispetto alle equazioni ed alle incognite, i quali in analogia con una locuzione usata nel caso ellittico (cfr. [16]), saranno detti *t-omogenei,* rientrano in tale classe ad esem-

(*) Pervenuto in Redazione il 15 aprile 1979.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica « Renato Caccioppoli » - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.

pio i sistemi parabolici secondo Petrowsky e secondo Solonnikov (cfr. [3]). Per i sistemi ellittici di questo tipo G. Geymonat [7] ha introdotto la nozione di operatore al contorno di Dirichlet e di operatore normale stabilendo, fra l'altro, la relativa formula di Green.

Ho esteso ai sistemi quasi-ellittici t-omogenei tali nozioni e la formula di Green, nonché i risultati di regolarizzazione stabiliti da M. Troisi [14] e V. Del Prete-D. Fortunato [5] per le equazioni quasi-ellittiche; inoltre relativamente ai sistemi a coefficienti costanti ed a una classe di problemi per cui si ha l'unicità, ho applicato classici procedimenti esistenziali (cfr. [11]).

I risultati, riferiti al caso dei coefficienti costanti, sono stati preannunciati in una nota dell'Accademia Nazionale dei Lincei [4] ed esposti in una relazione interna dell'Istituto di Matematica dell'Università di di Napoli (1).

Il lavoro consta di due parti: il paragrafo 1, diviso in due numeri, è dedicato alle definizioni e maggiorazioni a priori per i sistemi quasi-ellittici; nel paragrafo 2, diviso in tre numeri, si considerano i sistemi t-omogenei.

Nel n. 1 sono richiamate le definizioni degli spazi funzionali; nel n. 2 sono esposte le definizioni riguardanti i sistemi quasi-ellittici nonché le maggiorazioni a priori.

Il n. 3 è dedicato ai sistemi quasi-ellittici t-omogenei: si formulano i relativi problemi in un semispazio e si stabilisce la formula di Green; nel n. 4 sono riportati i teoremi di regolarizzazione; infine nel n. 5 si provano i teoremi di esistenza ed unicità.

§ 1. SISTEMI QUASI-ELLITTICI E MAGGIORAZIONI A PRIORI IN UN SEMISPAZIO.

1. Notazioni. Spazi funzionali.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è una n-pla di interi non negativi ed $x=(x_1, \dots, x_n)$ è un punto dello spazio reale euclideo $\mathbf{R}^n$, si pone:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

(1) Relazione n. 13, ser. II, Ist. di Mat. Univ. di Napoli, (1977).

$$D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = D^{\alpha_1}_{x_2} \dots D^{\alpha_n}_{x_n} = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (i^2 = -1)$$

Per comodità poniamo anche

$$x = (x', y),\ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}),\ y = x_n;\ \ \alpha = (\alpha', \alpha_n),\ \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$

$$D^{\alpha'}{}_{x'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{i^{|\alpha'|} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}$$

Indichiamo con $\mathbf{R}^n{}_+$ il semispazio $\{x \in \mathbf{R}^n\colon x_n > 0\}$ e con $\partial \mathbf{R}^n{}_+$ l'iperpiano $\{x \in \mathbf{R}^n\colon x_n = 0\}$.

Se $(m_1, \dots, m_n)$ è una n-pla di interi positivi, poniamo:

$$m = \sup\{m_1, \dots, m_n\},\quad q_i = m/m_i\ \ (i = 1, \dots, n),\quad q = (q_1, \dots, q_n)$$

$$d = \text{m. c. d.}\{m_1, \dots, m_n\},\ m_0 = m/d,\ \langle \alpha, q \rangle = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n.$$

Per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi', \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ sia:

$$\langle \xi \rangle = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{m_i}\Big)^{1/m},\ \langle \xi' \rangle = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i|^{m_i}\Big)^{1/m}.$$

Denotiamo con $\tilde{u}(\xi)$ o con $\mathcal{F}u$ la trasformata di Fourier di $u(x)$ e con $\hat{u}(\xi', y)$ la trasformata parziale di Fourier di $u(x', y)$ rispetto a x'.

Introduciamo ora alcuni noti spazi funzionali (cfr. [8], [12], [14], [17]).

Per ogni $s, r \in \mathbf{R}$, con $H^{s,r}(\mathbf{R}^n)$ denotiamo lo spazio delle distribuzioni temperate u su $\mathbf{R}^n$ tali che

$$(1 + \langle \xi \rangle^2)^s (1 + \langle \xi' \rangle^2)^r |\tilde{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbf{R}^n)$$

munito della norma

$$\|u\|_{s,r,\mathbf{R}^n} = \Big(\int_{\mathbf{R}^n} (1 + \langle \xi \rangle^2)^s (1 + \langle \xi' \rangle^2)^r |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{1/2}.$$

Con $H^{s,r}_{\overline{\mathbf{R}}^n_+}(\mathbf{R}^n)$ indichiamo il sottospazio di $H^{s,r}(\mathbf{R}^n)$ costituito dalle distribuzioni aventi supporto contenuto in $\overline{\mathbf{R}}^n{}_+$, e con $H^{s,r}(\mathbf{R}^n{}_+)$ lo spazio delle distribuzioni u su $\mathbf{R}^n{}_+$ che sono restrizioni a $\mathbf{R}^n{}_+$ di elementi di $H^{s,r}(\mathbf{R}^n)$, munito della norma

$$\|u\|_{s,r,\mathbf{R}^n_+} = \inf \|U\|_{s,r,\mathbf{R}^n} \quad U = u \text{ su } \mathbf{R}^n{}_+.$$

Il simbolo $H^{s,0}$ viene solitamente sostituito da H^s, similmente per la notazione della relativa norma.

Denotata con $\widehat{g}(\xi')$ la trasformata di Fourier di $g(x')$, indichiamo con $H^s(\mathbf{R}^{n-1})$, lo spazio delle distribuzioni temperate g su $\mathbf{R}^{n-1}$ tali che

$$(1+\langle\xi'\rangle^2)^s\,|\widehat{g}(\xi')|^2\in L^1(\mathbf{R}^{n-1})$$

munito della norma

$$\|g\|_{s,\mathbf{R}^{n-1}}=\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}}(1+\langle\xi'\rangle^2)^s\,|\widehat{g}(\xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}.$$

Infine indicheremo con $\lambda_s(y)$, $s\in\mathbf{R}$, la distribuzione su $\mathbf{R}^{n-1}$ tale che risulti:

$$\widehat{\lambda_s}(\xi')=(1+\langle\xi'\rangle^2)^{s/2}.$$

Per le proprietà relative agli spazi introdotti rimandiamo ai Lavori citati

2. Sistemi quasi-ellittici e maggiorazioni a priori.

Ricordiamo che un polinomio $\mathcal{P}$ del tipo

$$\mathcal{P}(\xi)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq m}a_\alpha\,\xi^\alpha\quad a_\alpha\in\mathbf{C},\ \xi\in\mathbf{R}^n \tag{2.1}$$

è detto *quasi-ellittico* con *peso* q e di *q-grado* m se la sua *q-parte principale*:

$$\mathcal{P}^0(\xi)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle=m}a_\alpha\,\xi^\alpha$$

verifica la seguente condizione:

$$\mathcal{P}^0(\xi)\neq 0\quad\forall\xi\in\mathbf{R}^n-\{0\}. \tag{2.2}$$

Un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti reali o complessi

(2.3) $A(D)\,u=\{p_{kj}(D)\,u_j\}\quad u=(u_1,\dots,u_N);\ k,j\in\{1,\dots,N\};\ N\in\mathbf{N}$ (2)

$$p_{kj}(D)\,u_j=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq m_{kj}} a_{kj\alpha}\,D^\alpha u_j$$

si dice *quasi-ellittico* con peso q e di q-ordine m se il polinomio

$$P(\xi)=\det\|p_{kj}(\xi)\|$$

è quasi-ellittico con peso q e q-grado m e se inoltre si ha:

$$m=\max_\beta\,(m_{1\beta_1}+\dots+m_{N\beta_N})$$

ove $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_N)$ è una permutazione degli indici $1,\dots,N$.

Esistono $2N$ numeri razionali non negativi (*potenziali*)

$$t_1,\dots,t_N,s_1,\dots,s_N\quad \min_k s_k=0$$

della forma $\dfrac{M}{m_1\dots m_n}$, $M\in\mathbf{N}_0$, tali che

$$m_{kj}\leq t_j-s_k \text{ se } t_j-s_k\geq 0,\quad p_{kj}(\xi)=0 \text{ se } t_j-s_k<0,\quad \sum_k(t_k-s_k)=m \ (3);$$

Inoltre, posto:

$$p'_{kj}(\xi)=p^0_{kj}(\xi) \text{ se } t_j-s_k\geq 0,\quad p'_{kj}(\xi)=0 \text{ se } t_j-s_k<0$$

si ha:

$$\det\|p'_{kj}(\xi)\|=P^0(\xi)\ (4).$$

Supponiamo che anche nel caso $n=2$ sia verificata la condizione:

(I). *Per ogni $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}-\{0\}$ risulta costante il numero r delle radici con parte immaginaria positiva dell'equazione*

$$P^0(\xi',\tau)=0\qquad \tau\in\mathbf{C}\ (5).$$

(2) Qui, come nel seguito, si conviene di sommare sugli indici ripetuti in una stessa espressione monomia, al variare degli stessi negli insiemi indicati.

(3) Si può supporre $t_j\geq q_i$, $\forall j,i$, perché altrimenti ci si può ricondurre ad un sistema con un minor numero di equazioni e di incognite.

(4) Cfr. [15].

(5) È noto infatti che se $n>2$ la (I) è senz'altro verificata.

Tali radici le indicheremo con $\tau_1^+(\xi'), \dots, \tau_r^+(\xi')$.

Si consideri ora il sistema di operatori lineari di frontiera a coefficienti costanti reali o complessi:

$$B(D)\,u=\{B_{hj}(D)\,u_j\},\quad B_{hj}(D)\,u_j=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq\mu_{hj}} b_{hj\alpha}\,D^\alpha u_j \tag{2.4}$$

$$h=1,\dots,r;\ j=1,\dots,N$$

supponiamo che qualunque sia $h\in\{1,\dots,r\}$ e $j\in\{1,\dots,N\}$ risulti

$$\mu_{hj}/q_n\leq[t_j/q_n-1/2]_-\ (^6); \tag{2.5}$$

posto:

$$\sigma_h=\min_j\,(t_j-\mu_{hj})\ (^7)$$

ovviamente si ha:

$$\mu_{hj}\leq t_j-\sigma_h$$

e quindi:

$$B_{hj}(D)=\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq k_j-\sigma_h} b_{hj\alpha}\,D^\alpha.$$

Poniamo $B'_{hj}(\xi)=B^0_{hj}(\xi)$ e consideriamo la matrice aggiunta di $\|p'_{kj}(\xi)\|$, $\|\mathcal{P}'_{jl}(\xi)\|$ ove $l=1,\dots,N$; diciamo che il sistema (2.4) ricopre il sistema (2.3) su $\partial\mathbf{R}^n_+$ se è verificata la seguente

(II). Condizione Complementare: *Qualunque sia* $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}-\{0\}$ *risultano linearmente indipendenti modulo* $(\tau-\tau_1^+)\cdot\ldots\cdot(\tau-\tau_r^+)$ *le righe della matrice*

$$\|B'_{hj}(\xi',\tau)\,\mathcal{P}'_{jl}(\xi',\tau)\|_{hl}. \tag{2.6}$$

È opportuno ricordare il seguente risultato (cfr. [2]). Indicato con $S(\overline{\mathbf{R}}_+;\mathbf{C}^N)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida in $\overline{\mathbf{R}}_+$ e a valori in $\mathbf{C}^N$, risulta:

Lemma 2.1. *Sono equivalenti le seguenti proposizioni*:

(*a*) *il sistema* (2.4) *ricopre il sistema* (2.3) *su* $\partial\mathbf{R}^n_+$;

(6) Se $t\in\mathbf{R}_+$, con $[t]_-$ indichiamo il più grande intero minore di t.

(7) Si osservi che $\sigma_h>\frac{1}{2}\,q_n$.

(*b*) *per ogni fissato* $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} - \{0\}$ *il problema*:

$$p'_{kj}(\xi', D_y)\, u_j(y) = 0 \text{ per } y > 0, \quad B'_{hj}(\xi', D_y)\, u_j(0) = 0$$

ammette in $S(\overline{\mathbf{R}}_+, \mathbf{C}^N)$ *la sola soluzione nulla.*

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti di classe $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n{}_+)$:

$$A(x, D)\, u = \{p_{kj}(x, D)\, u_j\} \qquad k, j = 1, \dots, N; \; N \in \mathbf{N}, \; x \in \mathbf{R}^n \tag{2.7}$$

e supponiamo che il sistema

$$A(0, D)\, u = \{p_{kj}(0, D)\, u_j\} \tag{2.8}$$

sia quasi-ellittico con peso q e di q-ordine m e che risulti:

$$p_{kj}(x, D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq t_j - s_k} a_{kj\alpha}(x)\, D^\alpha \text{ se } t_j - s_k \geq 0, \quad p_{kj}(x, D) = 0 \text{ se } t_j - s_k < 0$$

ove $t_1, \dots, t_N, s_1, \dots, s_N$ sono un sistema di potenziali relativo al sistema (2.8); poniamo:

$$p'_{kj}(x, D) = p^0_{kj}(x, D) \text{ se } t_j - s_k \geq 0, \quad p'_{kj}(x, D) = 0 \text{ se } t_j - s_k < 0$$

$$\det \|p'_{kj}(x, \xi)\| = P^0(x, \xi).$$

Supponiamo inoltre soddisfatta la seguente condizione:

(I'). *Il sistema a coefficienti costanti* (2.8) *verifica la condizione* (I).

Si consideri poi il sistema di operatori lineari di frontiera a coefficienti di classe $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$:

$$B(x', D)\, u = \{B_{hj}(x', D)\, u_j\}, \quad B_{hj}(x', D)\, u_j = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq \mu_{hj}} b_{hj\alpha}(x')\, D^\alpha u_j \tag{2.9}$$

$$h = 1, \dots, r; \quad j = 1, \dots, N$$

supponiamo soddisfatta la (2.5)) e la seguente condizione:

(II'). *Il sistema di operatori a coefficienti costanti* $B(0, D)$ *verifica la condizione complementare rispetto al sistema* (2.8).

Considerati i numeri σ_h relativi al sistema (2.8) si ha:

$$B_{hj}(x', D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq t_j - \sigma_h} b_{hj\alpha}(x')\, D^\alpha$$

Poniamo:

$$p_{kj}(x, D)\, u_j = p_k(x, D) u; \quad B_{hj}(x', D)\, u_j = B_h(x', D)\, u$$

e consideriamo l'operatore

$$L\colon u \to (p_1(x, D)\, u, \dots, p_N(x, D)\, u, B_1(x', D)\, u|_{y=0}, \dots, B_r(x, D) u|_{y=0}).$$

Sussiste il seguente teorema (cfr. [3]):

TEOREMA 2.1. *Se il sistema* (2.7) *è quasi-ellittico e valgono le condizioni* (I′) *e* (II′), *allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_+)$ *avente il supporto contenuto in* $\Sigma_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| < \delta, x_n \geq 0\}$, *si ha*:

$$(2.10) \qquad \|u_j\|_{t_j, \mathbf{R}^n_+} \leq K \Big(\|Lu\| \prod_k H^{s_k}(\mathbf{R}^n_+) \times \prod_h H^{\sigma_h - \frac{1}{2} q_n}(\mathbf{R}^{n-1}) + \sum_j \|u_j\|_{0, \mathbf{R}^n_+} \Big) \ (^8)$$

con K *indipendente da* u (9).

In riferimento all'operatore aggiunto L^*, con procedimenti classici (cfr. [9], [6], [14]), non è difficile provare il seguente teorema (10):

TEOREMA 2.2. *Se il sistema* (2.7) *verifica le condizioni* (I′) *e* (*II*′) *allora esiste un numero reale* $\rho_1 > 0$ *tale che qualunque sia* $t \in \mathbf{R}$ *e per ogni*

$$U = (U_1, \dots, U_N, g_1, \dots, g_r) \in \prod_k H^{-s_k, t}_{\overline{\mathbf{R}}^n_+}(\mathbf{R}^n) \times \prod_h H^{-\sigma_h + t + \frac{1}{2} q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$$

con U_k *e* g_h *aventi supporti contenuti rispettivamente in* Σ_{ρ_1} *e in* Σ'_{ρ_1}, *sussiste la seguente limitazione*:

(8) D'ora innanzi indichiamo con il medesimo simbolo K costanti generalmente differenti da formula, ciò anche nell'ambito di una stessa dimostrazione.

(9) Dalla dimostrazione risulta che se l'operatore L ha i coefficienti costanti, la (2.10) sussiste per ogni $u \in \prod_j H^{t_j}(\mathbf{R}^n_+)$.

(10) I dettagli della dimostrazione che presenta complicazioni tecniche rispetto al caso ellittico sono esposti, relativamente al caso dei coefficienti costanti, nella Relazione di cui alla nota (1).

$$(2.11) \qquad \|U\|_{\prod_k H^{-s_k,t}(\mathbf{R}^n) \times \prod_h H^{-\sigma_h+t+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq$$

$$\leq K\,[\|L^* U\|_{\prod_j H^{-t_j,t}(\mathbf{R}^n)} + \|U\|_{\prod_k H^{-s_k,t-1}(\mathbf{R}^n) \times \prod_h H^{-\sigma_h+t-\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})}]$$

dove K è una costante indipendente da U e dove, se $t=0$, si può sostituire $\|U_k\|_{-s_k,-1}, \mathbf{R}^n$ con $\|U_k\|_{-s_k-1}, \mathbf{R}^n$.

§ 2. SISTEMI QUASI-ELLITTICI t-OMOGENEI.

3. Sistemi t-omogenei: operatori di frontiera normali e formula di Green.

In questo numero consideriamo particolari sistemi quasi-ellittici, analoghi ai sistemi ellittici secondo Petrowsky con unica *dimensionalità, t,* rispetto alle funzioni incognite (nonché rispetto alle equazioni), che in analogia con una locuzione usata nel caso ellittico (cfr. [16]), diremo *t-omogenei.*

Precisamente il sistema (2.7), quasi-ellittico con peso q e di q-ordine m, lo diremo t-omogeneo se

$$\max_k m_{kj} = t \qquad \forall j = 1, \dots, N, \qquad m = tN.$$

Un siffatto sistema ha la forma:

$$(3.1) \qquad A(x, D)\, u = \{p_{kj}(x, D)\, u_j\} = \{\sum_{\langle \alpha, q\rangle \leq t} a_{kj\alpha}(x)\, D^\alpha u_j\}$$

con

$$P^0(x, \xi) = \det \|\sum_{\langle \alpha, q\rangle = t} a_{kj\alpha}(x)\, \xi^\alpha\| \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\} \quad \forall x \in \overline{\mathbf{R}}^n_+$$

(un sistema di potenziali è $\underbrace{t, \dots, t}_{N}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N}$; $t/q_i \in \mathbf{N}_0$).

Nel seguito porremo per comodità $t/q_n = T_n$.

Supporremo sempre verificata la condizione (I').

Per i sistemi ora introdotti consideriamo particolari problemi nel semispazio $\mathbf{R}^n_+$ che di seguito descriviamo.

Consideriamo un sistema

$$G(x', D) = \|G_{hj}(x', D)\| \quad h=1, \dots, N\,T_n; \quad j=1, \dots, N$$

di operatori lineari di frontiera a coefficienti di classe $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, ove $G_{hj}(x', D)$ ha q-ordine $\leq (k-1)\,q_n$ se $h=(k-1)\,N+1, \dots, kN$, $k=1, \dots, T_n$.

Si può porre $G(x', D) = \{G_k\}_{k=1}^{T_n}$ con

$$G_k(x', D) = \|G_{hj}(x', D)\|_{hj} = \Big\| \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq (k-1)\,q_n} g_{hj\alpha}(x')\,D^\alpha \Big\|_{hj}$$

$$h=(k-1)\,N+1, \dots, k\,N$$
$$j=1, \dots, N.$$

In analogia con una definizione introdotta in [7] diamo la seguente

DEFINIZIONE. *Diciamo che $G(x', D)$ è un operatore di Dirichlet se, posto:*

$$G_k^0(x', D) = \Big\| \sum_{\langle \alpha, q \rangle = (k-1)\,q_n} g_{hj\alpha}(x')\,D^\alpha \Big\|_{hj}$$

risulta per ogni $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$:

$$\det G_k^0(x'; 0, \dots, 0, \xi_n) \neq 0 \quad \forall \xi_n \in \mathbf{R} - \{0\}, \quad \forall k=1, \dots, T_n. \tag{3.2}$$

Sussistono i seguenti lemmi:

LEMMA 3.1. *Se $G(x', D) = \{G_k(x', D)\}$ è un operatore di Dirichlet, allora esistono operatori matriciali tangenziali:*

$$\Phi_{rs}(x', D_{x'}) = \|\Phi_{rsjh}(x', D_{x'})\|_{jh} \qquad \begin{array}{l} r=1, \dots, T_n, \; s=1, \dots, r \\ j=1, \dots, N; \; h=(s-1)\,N+1, \dots, s\,N \end{array}$$

tali che

$$q\text{-ordine } \Phi_{rsjh}(x', D_{x'}) \leq (r-s)\,q_n, \quad \Phi_{rr} \text{ è non degenere}$$

e risulta:

$$D_{x_n}^{r-1} = \sum_{s=1}^{r} \Phi_{rs}(D_{x'})\,G_s(D). \tag{3.3}$$

LEMMA 3.2. *Se $G(x', D)\}$ è un operatore di Dirichlet, risulta suriettiva l'applicazione*

$$v \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_+; \mathbf{C}^N) \to \{G_k v|_{x_n=0}\} \in [C_0^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+, \mathbf{C}^N)]^{T_n}$$

Essi si dimostrano utilizzando ragionamenti noti (cfr. [7], [9], [14]) che ci limitiamo ad accennare.

Osservato che la (3.2) è equivalente alla seguente:

$$G_k(x', D) = \theta_{kk}(x', D_{x'}) D_{x_n}^{k-1} + \sum_{h=1}^{k-1} \theta_{kh}(x', D_{x'}) D_{x_n}^{h-1} \tag{3.4}$$

dove le θ_{kh} hanno le stesse proprietà delle Φ_{kh}, si vede che sussiste la (3.3) assumendo

$$\Phi_{rs} = \theta_{rr}^{-1} \text{ se } s=r, \quad \Phi_{rs} = -\theta_{rr}^{-1} \sum_{h=s}^{r-1} \theta_{rh} \Phi_{hs} \text{ se } s<r.$$

Per quanto riguarda il lemma 3.2, fissata in modo arbitrario $\varphi \in [C_0^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N]^{T_n}$ definiamo induttivamente le seguenti funzioni:

$$\psi_1 = \theta_{11}^{-1} \varphi_1, \quad \psi_k = \theta_{kk}^{-1} (\varphi_k - \sum_{h=1}^{k-1} \theta_{kh} \psi_h) \quad k=2, \dots, T_n \tag{3.5}$$

ove le θ_{kh} sono quelle della (3.4). Avendosi $\psi_k \in C_0^\infty(\partial\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N)$, per noti risultati esiste $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}^n_+; \mathbf{C}^N)$ tale che

$$D_{x_n}^{k-1} v|_{x_n=0} = \psi_k \quad k=1, \dots, T_n.$$

Per quest'ultima, dalla (3.5) segue che

$$v|_{x_n=0} = \theta_{11}^{-1} \varphi_1; \quad D_{x_n}^{k-1} v|_{x_n=0} = \theta_{kk}^{-1} (\varphi_k - \sum_{h=1}^{k-1} \theta_{kh} D_{x_n}^{h-1} v|_{x_n=0}), \quad k>1.$$

Allora v è soluzione del sistema:

$$\theta_{11} v|_{x_n=0} = \varphi_1; \quad \theta_{kk} D_{x_n}^{k-1} v|_{x_n=0} + \sum_{h=1}^{k-1} \theta_{kh} D_{x_n}^{h-1} v|_{x_n=0} = \varphi_k, \quad k>1$$

da cui, per la (3.4), l'asserto.

Estendiamo ora ai problemi in esame la *formula di Green.*

TEOREMA 3.1. *Se il sistema* (3.1) *è quasi-ellittico t-omogeneo e*

$G=\{G_k\}_{k=1}^{T_n}$ è un operatore di Dirichlet, allora esiste un operatore di Dirichlet $G'=\{G'_k\}_{k=1}^{T_n}$ tale che per ogni $u, v \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}^n_+; \mathbf{C}^N)$ vale la formula di Green:

$$(3.6) \qquad \int_{\mathbf{R}^n_+} (Au \cdot \bar{v} - u\, \overline{A^* v})\, dx = \sum_{k=1}^{T_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [G_k u\, \overline{G'_{T_n-k+1}\, v}]_{y=0}\, dx'$$

dove A^* è l'operatore aggiunto formale di A.

DIMOSTRAZIONE. Mediante ovvie integrazioni per parti si vede che

$$(3.7) \qquad \int_{\mathbf{R}^n_+} (Au \cdot \bar{v} - u\, \overline{A^* v})\, dx = \sum_{r=1}^{T_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [D_y^{r-1} u \cdot \overline{M_{T_n-r+1}\, v}]_{y=0}\, dx'$$

ove si è posto:

$$M_{T_n-r+1} = \sum_{k=r}^{T_n} \sum_{\langle \eta, q' \rangle \leq t-kq_n} (-1)^{|\eta|+T_n-r+1}\, \bar{a}(\eta, k)\, D_y^{k-r} D_{x'}^{\eta}$$

$$r=1, \dots, T_n; \quad \eta \in R^{n-1}.$$

Si osservi che risultando A un operatore quasi-ellittico si ha che $\{M_{T_n-r+1}\}_{r=1}^{T_n}$ è un operatore di Dirichlet.

Denotato con Φ^*_{rk} l'operatore aggiunto formale di Φ_{rk}, dalla (3.7), tenuto conto della (3.3), si ricava che

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} (Au \cdot \bar{v} - u\, \overline{A^* v})\, dx = \sum_{r=1}^{T_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [\sum_{k=1}^{r} G_k u\, \overline{\Phi_{rk}^* M_{T_n-r+1}\, v}]_{y=0}\, dx'$$

$$= \sum_{k=1}^{T_n} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [G_k u \sum_{r=k}^{T_n} \overline{\Phi^*_{rk} M_{T_n-r+1}\, v}]_{y=0}\, dx'$$

e da quest'ultima si ottiene la (3.6) ponendo:

$$G'_{T_n-k+1} = \sum_{r=k}^{T_n} \Phi^*_{rk} M_{T_n-r+1}$$

Osservato che risulta:

$$G'_{T_n-k+1}=(-1)^{T_n-k+1}\Phi^*_{kk}\,\bar{a}_{(0,\dots,0,T_n)}(x')\,D_y^{T_n-k}$$

$$+\Phi^*_{kk}\sum_{r=k}^{T_n-1}\Big(\sum_{\langle\eta,q'\rangle\le t-rq_n}(-1)^{|\eta|+T_n-r+1}\,\bar{a}_{(\eta,r)}\,D^\eta_{x'}\Big)\,D_y^{r-k}+$$

$$+\sum_{s=k+1}^{T_n}\Phi^*_{sk}\sum_{r=s}^{T_n}\Big(\sum_{\langle\eta,q'\rangle\le t-rq_n}(-1)^{|\eta|+T_n-s+1}\,\bar{a}_{(\eta,r)}\,D^\eta_{x'}\Big)\,D_y^{r-s}$$

e tenendo presente che A è quasi-ellittico si ha che $\{G'_{T_n-k+1}\}_{k=1}^{T_n}$ è un operatore di Dirichlet.

Definizione (cfr. [7]). *Diciamo che un operatore matriciale* $B(x',D)=\|B_{hj}(x',D)\|_{\substack{h=1,\dots,r\\ j=1,\dots,N}}$ *è un operatore normale se esiste un operatore di Dirichlet* $G(x',D)=\|G_{ij}(x',D)\|_{\substack{i=1,\dots,NT_n\\ j=1,\dots,N}}$ *tale che* r *righe della matrice* $G(x',D)$, *prese in ordine opportuno, costituiscano la matrice* $B(x',D)$.

Osserviamo ora che dall'essere l'operatore A, quasi-ellittico t-omogeneo, soddisfacente la condizione (I'), segue che il suo aggiunto formale A^* è ancora quasi-ellittico t-omogeneo e verifica la condizione (I') con NT_n-r al posto di r.

Ciò premesso, dal teorema 3.1 si deduce il seguente teorema (cfr. [7], [9], [14]).

Teorema 3.2. *Se* $B(x',D)=\|B_{hj}(x',D)\|_{\substack{h=1,\dots,r\\ j=1,\dots,N}}$ *è un operatore normale ed inoltre* $C(x',D)=\|C_{hj}(x',D)\|_{\substack{h=1,\dots,NT_n-r\\ j=1,\dots,N}}$ *è un operatore di frontiera tale che* $\{B\}\cup\{C\}$ *è un operatore di Dirichlet, allora esistono due operatori di frontiera*

$$B'(x',D)=\|B'_{hj}(x',D)\|_{\substack{h=1,\dots,NT_n-r\\ j=1,\dots,N}},\quad C'(x',D)=\|C'_{hj}(x',D)\|_{\substack{h=1,\dots,r\\ j=1,\dots,N}}$$

tali che $\{B'\}\cup\{C'\}$ *è un operatore di Dirichlet e si ha:*

$$\int_{\mathbf{R}^n_+}(Au\cdot\bar{v}-u\,\overline{A^*v})\,dx=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}[Cu\cdot\overline{B'v}]_{y=0}\,dx'-\int_{\mathbf{R}^{n-1}}[Bu\cdot\overline{C'v}]_{y=0}\,dx'. \tag{3.8}$$

Inoltre $B(x', D)$ verifica la condizione completamente rispetto all'operatore $A(x, D)$ se e solo se la verifica $B'(x', D)$ rispetto all'operatore $A^*(x, D)$.

Accenniamo brevemente alla dimostrazione.

Sia $\{B\} \cup \{C\} = \{G_k\}_{k=1}^{T_n}$ con

$$G_k = \|G_{sj}(x', D)|_{\substack{s=(k-1)N+1,\dots,kN \\ j=1,\dots,N}}, \quad \max_j q\text{-ordine } G_{sj} = (k-1)\, q_n$$

e sia $\{G'_{T_n-k+1}\}_{k=1}^{T_n}$ il sistema associato a $\{G_k\}$ a norma del teorema 3.1.

Essendo:

$$(3.9) \qquad G_k\, u\, \overline{G'_{T_n-k+1}\, v} = G_{sj}\, u_j\, \overline{G_{NT_n-s+1,p}\, v_p}, \quad s=(k-1)N+1, \dots, kN$$

si indicherà con $C'_{hp}\,[B'_{hp}]$ quel G'_{lp} tale che nella (3.9) G'_{lp} viene moltiplicato per $B_{hp}\,[C_{hp}]$, allora la (3.8) segue dalla (3.6).

Osserviamo che per $s=(k-1)N+1, \dots, kN$ risulta:

$$\max_j q\text{-ordine } G_{sj} = (k-1)\, q_n, \quad \max_j q\text{-ordine } G'_{NT_n-s+1,j} = (T_n-k)\, q_n$$

e quindi se

$$\max_j q\text{-ordine } B_{hj}\,[C_{hj}] = t - \sigma_h \ (^{11})$$

si ha:

$$\max_j q\text{-ordine } C'_{hj}\,[B'_{hj}] = \sigma_h - q_n.$$

Siano ora $u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N)$; applicando la (3.8) alle funzioni

$$u_\lambda = (u_{1\lambda}, \dots, u_{N\lambda}), \quad v_\lambda = (v_{1\lambda}, \dots, v_{N\lambda}), \qquad \lambda > 1$$

ove si è usata la posizione:

$$w_{i\lambda}(x', y) = w_i(\lambda^{q_1} x, \dots, \lambda^{q_{n-1}} x_{n-1}, \lambda^{q_n} y)$$

e passando al limite per $\lambda \to +\infty$ si ottiene:

(11) Si noti che per la condizione (3.2) deve essere $\dfrac{t-\sigma_h}{q_n} \in \mathbf{N}$ e perciò $\sigma_h/q_n \in \mathbf{N}$.

$$(3.10)\qquad \int_{\mathbf{R}^n_+} (A^0(0,D)\,u(x',y)\,\overline{v(x',y)} - u(x',y)\,\overline{A^{*0}(0,D)\,v(x',y)})\,dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [C^0(0,D)\,u(x',y)\,\overline{B'^0(0,D)\,v(x',y)}]_{y=0}\,dx' -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^{n-1}} [B^0(0,D)\,u(x',y)\,\overline{C'^0(0,D)\,v(x',y)}]_{y=0}\,dx'.$$

Siano poi $\varphi(y), \psi(y) \in C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+; \mathbf{C}^N)$, $\chi(x') \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$ e poniamo:

$$u_j^{(\lambda)}(x',y) = e^{i<\eta,x'>}\,\chi(\lambda x')\,\varphi_j(y)$$

$$(i^2=-1),\ \eta \in \mathbf{R}^{n-1} - \{0\}$$

$$v_j^{(\lambda)}(x',y) = e^{i<\eta,x'>}\,\chi(\lambda x')\,\psi_j(y).$$

Applicando la (3.10) alle funzioni $u^{(\lambda)}$ e $v^{(\lambda)}$ così definite e passando poi al limite per $\lambda \to 0$, si ha:

$$\int_0^{+\infty} \left[A^0\left(0;\eta,\frac{d}{dy}\right)\varphi(y)\,\overline{\psi(y)} - \varphi(y)\,\overline{A^{*0}\left(0;\eta,\frac{d}{dy}\right)\psi(y)} \right] dy =$$

$$= \left[C^0\left(0,\eta,\frac{d}{dy}\right)\varphi(y) \right]_{y=0} \left[\overline{B'^0\left(0,\eta,\frac{d}{dy}\psi\right)(y)} \right]_{y=0} -$$

$$- \left[B^0\left(0,\eta,\frac{d}{dy}\right)\varphi(y) \right]_{y=0} \left[C'^0\left(0,\eta,\frac{d}{dy}\right)\psi(y) \right]_{y=0}.$$

A questo punto, tenendo conto del lemma 2.1, si procede come in [7].

4. Teoremi di regolarizzazione.

Indicheremo con $\omega(x')$ una funzione reale e non negativa di classe $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ tale che

$$\operatorname{supp} \omega(x') = \{x' \in \mathbf{R}^{n-1}: |x'| \leq 1\}, \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \omega(x')\, dx' = 1$$

e per ogni $\varepsilon > 0$ porremo:

$$\omega_\varepsilon(x') = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right), \quad U_\varepsilon = (U_{1\varepsilon}, \dots, U_{N\varepsilon}, g_{1\varepsilon}, \dots, g_{r\varepsilon})$$

ove si è usata la posizione

$$v_{j\varepsilon}(x', y) = v_j(x', y) * \omega_\varepsilon(x').$$

Ricordiamo (cfr. Hörmander [8]) che se $u \in H^{s,t}(\mathbf{R}^n_+)$ [risp. $u \in H^r(\mathbf{R}^{n-1})$] allora $u_\varepsilon \in H^{s,t}(\mathbf{R}^n_+)$ [risp. $u_\varepsilon \in H^t(\mathbf{R}^{n-1})$] qualunque sia $t \in \mathbf{R}$ e inoltre si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{H^{s,r}(\mathbf{R}^n_+)} = 0 \ \left[\text{risp. } \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{H^r(\mathbf{R}^{n-1})} = 0\right]. \tag{4.1}$$

Se φ è definita in $\mathbf{R}^n$, per ogni $U = (U_1, \dots, U_N, g_1, \dots, g_r)$ porremo:

$$\dot{\varphi}(x') = \varphi(x', 0), \quad \varphi U = (\varphi U_1, \dots, \varphi U_N, \dot{\varphi} g_1, \dots, \dot{\varphi} g_r)$$

$$(\varphi U)_\varepsilon = ((\varphi U_1)_\varepsilon, \dots, (\varphi U_N)_\varepsilon, (\dot{\varphi} g_1)_\varepsilon, \dots, (\dot{\varphi} g_r)_\varepsilon).$$

Sussiste il seguente teorema di regolarizzazione tangenziale, relativamente all'operatore aggiunto, che estende ai sistemi il teorema 4.1 di [14].

TEOREMA 4.1. *Sia* $U = (U_1, \dots, U_N, g_1, \dots, g_r) \in L^2(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \times \prod_h H^{-\sigma_h \frac{1}{2} q_h}(\mathbf{R}^{n-1})$ *e il sistema quasi-ellittico t-omogeneo* (3.1) *soddisfi le condizioni* (I′) *e* (II′). *Allora per ogni* $s > 0$ *esiste un numero positivo* $\rho_0 \leq \rho_1$ (ρ_1 *del teorema* 2.1) *tale che se per ogni* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *avente supporto contenuto in* $\Gamma_\rho = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| < \rho\}$ *per un* $\rho < \rho_0$, *risulta*

$$\varphi L^* U \in H^{-t,s}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N)$$

allora

$$\varphi U \in H^{0,s}(\mathbf{R}^n_+, \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h + s + \frac{1}{2} q_h}(\mathbf{R}^{n-1})$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *avente supporto contenuto in* Γ_ρ.

DIMOSTRAZIONE. Basterà provare l'asserto nella ulteriore ipotesi che

$$\varphi U \in H^{0,\sigma}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+\sigma+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}), \quad \sigma < s. \tag{4.2}$$

Orbene con $\rho<\rho_0$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ avente supporto contenuto in Γ_ρ, consideriamo il vettore $(\varphi U)_\varepsilon$ per $\varepsilon < \frac{\rho_0-\rho}{2}$ in modo che $(\varphi U_k)_\varepsilon$ e $(\varphi g_h)_\varepsilon$ hanno supporti contenuti, rispettivamente, in $\Sigma_{\rho'}$ e $\Sigma'_{\rho'}$ con $\rho' = \frac{\rho+\rho_0}{2}$; allora tenuto conto che dall'ipotesi

$$U \in L^2(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$$

segue

$$U_\varepsilon \in H^{0,s}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+s+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$$

qualunque sia s, per il teorema 2.2 si ha:

$$\|(\varphi U)_\varepsilon\|_{H^{0,s}(\mathbf{R}^n_+;\mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+s+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq \tag{4.3}$$

$$\leq K\,[\|L^*(\varphi U)_\varepsilon\|_{H^{-t,s}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^N)} + \|(\varphi U)_\varepsilon\|_{H^{0,s-1}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^N)\times}$$

$$\times \prod_h H^{-\sigma_h+s-1+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$$

Osserviamo che risulta:

$$L^*(\varphi U) = \varphi L^* U + \sum_j \sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t} \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} a^*_{jk\alpha}(x)\, D^{\alpha-\beta}\varphi \cdot D^\beta U_k + \tag{4.4}$$

$$+ \sum_j \sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t-\sigma_h} \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} b^*_{jh\alpha}(x')\, D^{\alpha-\beta}\varphi \cdot D^\beta (g_h(x') \otimes \delta(y))$$

Si verifica ora che, in virtù della (4.2), per ogni funzione $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, avente supporto contenuto in Γ_ρ con $\rho<\rho_0$, si ha:

$$D^\beta(\psi U_k) \in H^{-t,s}(\mathbf{R}^n), \quad \beta<\alpha, \quad \langle\alpha,q\rangle \leq t$$

$$D^\beta((\dot{\psi}\, g_h)\otimes\delta)\in H^{-t,s}(\mathbf{R}^n),\quad \beta<\alpha,\quad \langle\alpha,q\rangle\leq t-\sigma_h$$

e allora dall'ipotesi $\varphi\, L^*\, U\in H^{-t,s}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^N)$ e dalla (4.4) si ottiene che

$$L^*(\varphi\, U)\in H^{-t,s}(\mathbf{R}^n;\mathbf{C}^N)$$

e quindi, per la (4.1)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|L^*(\varphi\, U)-(L^*(\varphi\, U))_\varepsilon\|_{H^{-t,s}(\mathbf{R}^n;\,\mathbf{C}^N)}=0. \tag{4.5}$$

Osserviamo inoltre che con il ragionamento seguito da L. Hörmander in [8] per provare la (2.4.18), si vede che risulta:

$$\|a^*_{jk\alpha}(\varphi\, U_k)_\varepsilon-(a^*_{jk\alpha}\,\varphi\, U_k)_\varepsilon\|_{H^{0,s}(\mathbf{R}^n_+)}\leq K\,\|\varphi\, U_k\|_{H^{0,s-1}(\mathbf{R}^n_+)} \tag{4.6}$$

e analogamente:

$$\|b^*_{jh\alpha}((\dot{\varphi}\, g_h)\otimes\delta)_\varepsilon-(b^*_{jh\alpha}((\dot{\varphi}\, g_h)\otimes\delta))_\varepsilon\|_{H^{-\sigma_h,s}(\mathbf{R}^n)}\leq \tag{4.7}$$

$$\leq K\,\|\dot{\varphi}\, g_h\|_{H^{-\sigma_h+s-+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

Ora osservato che

$$L^*(\varphi\, U)=\sum_j\Big(\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t}D^\alpha(a^*_{jk\alpha}\,\varphi\, U_k)-\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}a^*_{jk\alpha}D^\beta(\varphi\, U_k)+$$

$$+\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t-\sigma_h}D^\alpha(b^*_{jh\alpha}((\varphi\, g_h)\otimes\delta))-\sum_{\langle\alpha,q\rangle\leq t-\sigma_h}\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}b^*_{jh\alpha}D^\beta((\varphi\, g_h)\otimes\delta))$$

poiché utilizzando le (4.6) e (4.7) si ha

$$\|(D^\alpha(a^*_{jk\alpha}\,\varphi\, U_k))_\varepsilon-D^\alpha(a^*_{jk\alpha}(\varphi\, U_k)_\varepsilon)\|_{-t,s,\mathbf{R}^n_+}\leq K,\quad \langle\alpha,q\rangle\leq t$$

$$\|(D^\alpha(b^*_{jh\alpha}((g_h\,\varphi)\otimes\delta)))_\varepsilon-D^\alpha(b^*_{jh\alpha}((\varphi\, g_h)\otimes\delta)_\varepsilon)\|_{-t,s,\mathbf{R}^n}\leq K,\quad \langle\alpha,q\rangle\leq t$$

con K indipendente da ε, si ottiene:

$$\|(L^*(\varphi\, U))_\varepsilon-L^*(\varphi\, U)_\varepsilon\|_{H^{-t,s}(\mathbf{R}^n;\,\mathbf{C}^N)}\leq \tag{4.8}$$

$$\leq K \sum_j \{ 1 + \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq t} \sum_{\beta < \alpha} \| (D^{\alpha-\beta} a^*_{jk\alpha} \cdot D^\beta (\varphi U_k))_\varepsilon -$$

$$D^{\alpha-\beta} a^*_{jk\alpha} \cdot D^\beta (\varphi U_k)_\varepsilon \|_{-t, s, \mathbf{R}^n} \} +$$

$$+ \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq t - \sigma_h} \sum_{\beta < \alpha} \| (D^{\alpha-\beta} b^*_{jh\alpha} \cdot D^\beta ((\dot{\varphi} g_h) \otimes \delta))_\varepsilon -$$

$$- D^{\alpha-\beta} b^*_{jh\alpha} \cdot D^\beta ((\dot{\varphi} g_h)_\varepsilon \otimes \delta) \|_{-t, s, \mathbf{R}^n}$$

da cui, con ripetute applicazioni della (4.6) e (4.7) si ha

$$\| (L^* (\varphi U))_\varepsilon - L^* (\varphi U)_\varepsilon \|_{H^{-t, s}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N)} \leq K$$

indipendentemente da ε.

D'altra parte risulta

$$\| L^* (\varphi U)_\varepsilon \|_{H^{-t, s}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N)} \leq$$

$$\leq \| (L^* (\varphi U))_\varepsilon \|_{H^{-t, s}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N)} + \| (L^* (\varphi U))_\varepsilon - L^* (\varphi U)_\varepsilon \|_{H^{-t, s}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N)}$$

allora dalla (4.3), grazie alle (4.5) e (4.8), si deduce che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni numero positivo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ si ha:

$$\| (\varphi U)_\varepsilon \|_{H^{0, s}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h + s + \frac{1}{2} q_n}(\mathbf{R}^{n-1})} \leq K$$

applicando il teorema di Banach-Saks si perviene all'asserto.

Stabiliamo ora un lemma che consente di provare un risultato di regolarizzazione normale; tali risultati estendono ai sistemi gli analoghi per le equazioni stabiliti in [5].

LEMMA 4.1. *Sia $A(x, D)$ un operatore del tipo* (3.1), *a coefficienti di classe $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}}^n_+)$, con $P^0(0; 0, \dots, 0, 1) \neq 0$, ed inoltre siano $s \in \mathbf{N}_0$ e $\gamma \in]0, 1]$ tali che $\gamma(s+1)/q_n \neq 1/2$ (mod. 1). Allora esiste $\rho_0 > 0$ tale che per ogni distribuzione u su $\mathbf{R}^n_+$ soddisfacente le condizioni:*

(4.9) $\quad \varphi u \in H^{s\gamma, \gamma}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \ \varphi p_{kj} u_j \in H^{(s+1)\gamma - t}(\mathbf{R}^n_+), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0})$

risulta:

$$\varphi\, u \in H^{(s+1)\gamma}(\mathbf{R}^n{}_+;\, \mathbf{C}^N), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0}). \tag{4.10}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla continuità dei coefficienti di $A(x, D)$ segue che esiste $\rho_0 \in \mathbf{R}_+$ tale che

$$P^0(x;\, 0, \dots, 0, 1) \neq 0, \qquad \forall x \in \bar{\Sigma}_{\varrho_0} \tag{4.11}$$

consideriamo quindi u soddisfacente alle (6.9) per un tale ρ_0.

Osserviamo poi che utilizzando il teorema 3.4 in [5] si ha:

$$\varphi\, D^\alpha u_j \in H^{(s+1)\gamma - t}(\mathbf{R}^n{}_+), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0}), \quad \langle \alpha, q \rangle \leq t, \quad \alpha_n < T_n. \tag{4.12}$$

Orbene, posto $f_k = p_{kj}\, u_j$, si ha:

$$a_{kj(0,\dots,0,T_n)}\, \varphi\, D_{x_n}^{T_n} u_j = \varphi\, f_k - \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle \leq t \\ \alpha_n < T_n}} a_{kj\alpha}\, \varphi\, D^\alpha u_j. \tag{4.13}$$

Dalla condizione $P^0(x;\, 0, \dots, 0, 1) \neq 0$ segue che è possibile ricavare dalle (4.13) le $\varphi\, D_{x_n}^{T_n} u_j$ come funzioni lineari di $\varphi\, f_k$ e $\varphi\, D^\alpha u_j$, ove $\langle \alpha, q \rangle \leq t$ ed $\alpha_n < T_n$, con coefficienti dipendenti linearmente da f_k e $a_{kj\alpha}$, allora per la seconda delle (4.9) e per la (4.12) risulta:

$$\varphi\, D_{x_n}^{T_n} u_j \in H^{(s+1)\gamma - t}(\mathbf{R}^n{}_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0}). \tag{4.14}$$

Osserviamo inoltre che

$$D_{x_n}^{T_n}(\varphi\, u_j) = \varphi\, D_{x_n}^{T_n} u_j + \sum_{h=1}^{T_n} \binom{T_n}{h} D_{x_n}^h \varphi \cdot D_{x_n}^{T_n - h} u_j$$

per le (4.12) e (4.14) si ha:

$$D_{x_n}^{T_n}(\varphi\, u_j) \in H^{(s+1)\gamma - t}(\mathbf{R}^n{}_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0})$$

e quindi:

$$D_{x_n}^{m_n}(\varphi\, u_j) \in H^{(s+1)\gamma - m}(\mathbf{R}^n{}_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0}) \tag{4.15}$$

Tenendo conto della (6.15) e che per ipotesi $\varphi\, u \in H^{0,(s+1)\gamma}(\mathbf{R}^n{}_+;\, \mathbf{C}^N)$ dal teorema 3.3 di [5] segue l'asserto.

TEOREMA 4.2. *Se $A(x, D)$ è un operatore del tipo* (3.1), *a coefficienti di classe $C_0^\infty(\bar{\mathbf{R}}^n_+)$ con $P^0(0; 0, \dots, 0, 1) \neq 0$, e $s \in \mathbf{R}_+$ è tale che $s\,\nu/q_n\,[s]_+ \neq 1/2$ (mod. 1) per $\nu = 0, 1, \dots, [s]_+$* (12), *allora esiste $\rho_0 \in \mathbf{R}_+$ tale che se risulta*:

$$\varphi\, u \in H^{0,s}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \quad \varphi\, p_{kj}\, u_j \in H^{s-t}(\mathbf{R}^n_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0})$$

si ha:

$$\varphi\, u \in H^s(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0}).$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente basta dimostrare che se $p \in \mathbf{N}_0$ e $\gamma \in]0, 1]$ sono tali che $\gamma^\nu/q_n \neq 1/2$ (mod. 1) per $\nu = 0, \dots, p$ allora

$$\varphi\, u \in H^{0,\gamma p}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \quad \varphi\, p_{kj}\, u_j \in H^{\gamma p - t}(\mathbf{R}^n_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0}) \tag{4.16}$$

implicano che

$$\varphi\, u \in H^{\gamma p}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0}). \tag{4.17}$$

Ragionando per ricorrenza, osservato che per $p = 0$ la tesi è banale, si deve provare che vale la (4.17) nelle ipotesi (4.16) e

$$\varphi\, u \in H^{\gamma(p-1)}(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0}), \quad p \geq 1.$$

Allora basta osservare che da questo e dalla seconda delle (4.16) segue che

$$p_{kj}(\varphi\, u_j) \in H^{\gamma p - t}(\mathbf{R}^n_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0})$$

ed inoltre che per il lemma 5.2 in [5] si ha:

$$p_{kj}(\lambda_\gamma * (\varphi\, u)) \in H^{\gamma(p-1)-t}(\mathbf{R}^n_+), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\rho_0})$$

e ragionare poi come per il lemma 5.4 in [5].

Dai teoremi 4.1 e 4.2, osservato che

$$L_j^* U|_{\mathbf{R}^n_+} = p_{jk}^* U_k$$

si deduce facilmente il seguente teorema di regolarizzazione:

(12) Con $[s]_+$ denotiamo il più piccolo intero maggiore di s.

TEOREMA 4.3. *Sia* $U=(U_1, \dots, U_N, g_1, \dots, g_r) \in L^2(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \times \prod_h H^{-\sigma_h+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$ *e il sistema quasi-ellittico t-omogeneo* (3.1) *soddisfi le condizioni* (I′) *e* (II′). *Allora per ogni s positivo tale che* $(s\,\nu)/q_n\,[s]_+ \neq \neq 1/2$ (*mod.* 1) *per* $\nu=0, 1, \dots, [s]_+$, *esiste* $\rho_0>0$ *tale che se risulta*:

$$\varphi\, L^* U \in H^{s-t}_{\bar{\mathbf{R}}^n_+}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0})$$

si ha:

$$\varphi\, U \in H^s(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+s+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Sigma_{\varrho_0}).$$

Se poi il sistema è a coefficienti costanti si ha:

TEOREMA 4.4. *Se il sistema* (3.1) *e gli operatori di frontiera sono a coefficienti costanti, nelle stesse ipotesi del teorema* 4.3 *risulta*:

$$L^* U \in H^{s-t}_{\bar{\mathbf{R}}^n_+}(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^N) \Rightarrow U \in H^s(\mathbf{R}^n_+; \mathbf{C}^N) \times \prod_h H^{-\sigma_h+s+\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

5. Esistenza ed unicità.

In questo numero consideriamo sistemi t-omogenei e operatori di frontiera normali a coefficienti costanti.

Detta z una nuova variabile reale e posto $D=D_x, D_z=\dfrac{\partial}{i\,\partial z}$ consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\mathcal{E}^\theta(D_x, D_z)v=\{\mathcal{E}^\theta_{kj}(D_x, D_z)\, v_j\}=\{(p_{kj}(D)+e^{i\theta}\,\delta_{kj}\,D_z^t)\, v_j\}$$

ove $\theta \in \mathbf{R}$ e δ_{kj} è il simbolo di Kronecker; facciamo la seguente ipotesi:

(III). *Esiste* θ *tale che* $\mathcal{E}^\theta(D_x, D_z)$ *è quasi-ellittico t-omogeneo e soddisfa la condizione* (I′), *inoltre il sistema di operatori di frontiera* $B(D)=\|B_{hj}(D)\|_{\substack{h=1,\dots,r\\ j=1,\dots,N}}$ *verifica la condizione complementare rispetto ad* $\mathcal{E}^\theta(D_x, D_z)$ *su* $\partial\mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}$.

Consideriamo il problema

$$(5.1)\qquad \begin{cases} u\in H^t(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N) \\ p_{kj}(D)\,u_j+\lambda\,\delta_{kj}\,u_j=f_k \text{ per } x_n>0,\ f=(f_1,\dots,f_N)\in L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N) \\ B_{hj}(D)\,u_j\,|_{x_n=0}=g_h,\ g_h\in H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}) \end{cases}$$

ove λ è una costante complessa.

Sissiste il seguente *teorema di unicità*:

TEOREMA 5.1. *Se è verificata la condizione* (III), *esiste una costante* $\lambda_0\in\mathbf{R}_+$ *tale che per ogni* $\lambda\in\mathbf{C}$, *con* $|\lambda|\geq\lambda_0$ *ed* $\arg\lambda=\theta$, *una eventuale soluzione del problema* (5.1) *soddisfa la limitazione*

$$(5.2)\qquad \|u\|_{H^t(\mathbf{R}^n_+;\mathbf{C}^N)}\leq$$

$$\leq K\left(\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+;\mathbf{C}^N)}+\sum_h\|g_h\|_{\sigma_h-\frac{1}{2}q_n,\,\mathbf{R}^{n-1}}\right).$$

Eseguiremo la dimostrazione servendoci di un noto procedimento introdotto, per le equazioni ellittiche, da S. Agmon [1] e già utilizzato per le equazioni quasi-ellittiche (cfr. [5], [14]).

Siano $u\in H^t(\mathbf{R}^n{}_+,\mathbf{C}^N)$, $\gamma\in\mathbf{R}$ tale che $|\gamma|\geq 1$ e $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tale che $\varphi(z)=1$ per $|z|\leq 1/2$, $\varphi(z)=0$ per $|z|\geq 1$.

Posto:

$$v_j=\varphi(z)\,e^{i\gamma z}\,u_j(x)$$

per il teorema 2.1 si ha:

$$(5.3)\qquad \|v\|_{H^t(\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}_z;\mathbf{C}^N)}\leq K\left(\|\mathcal{E}v^\theta\|_{L^2(\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}_z;\mathbf{C}^N)}\right.$$

$$\left.+\sum_h\|B_{hj}\,v_j\|_{H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}_z)}+\|v\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+\times\mathbf{R}_z;\mathbf{C}^N)}\right).$$

Osservato che

$$\mathcal{E}^\theta{}_{kj}\,v_j=\varphi(z)\,e^{i\gamma z}\,(p_{kj}+\gamma^t\,e^{i\theta}\,\delta_{kj})\,u_j+\sum_{p=0}^{t-1}e^{i\theta}\,\gamma^p\,C_p(z)\,e^{i\gamma z}\,\delta_{kj}\,u_j$$

con $C_p(z)=\binom{t}{p}D_z^{t-p}\,\varphi(z)$ e tenuto conto che $|\gamma|\geq 1$, si ha:

$$(5.4) \qquad \|\mathcal{E}^{\theta}{}_{kj}\, v_j\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+\times\mathbf{R}_z)} \leq$$

$$\leq K\,(\|(p_{kj}+\gamma^t e^{i\theta}\delta_{kj})\, u_j\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+)} + |\gamma|^{t-1}\,\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\,\mathbf{C}^N)}\,).$$

Osserviamo ora che si ha:

$$(5.5) \qquad \|B_{hj}\, v_j\|^2_{H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_h}(\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}_z)} \leq$$

$$\leq K\int_{\mathbf{R}^{n-1}} [(1+\langle\xi'\rangle^2)^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_h}+1]\;|\widehat{B_{hj}\,u_j}|^2\, d\,\xi' \leq K\,\|B_{hj}\,u_j\|^2_{H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_h}(\mathbf{R}^{n-1})}$$

D'altra parte risulta:

$$(5.6) \qquad \|v_j\|_{H^t(\mathbf{R}^n{}_+\times\mathbf{R}_z)} \geq \sum_{\langle\alpha,\,q\rangle+p\leq t} \|D_x{}^{\alpha}\, D_z{}^{p}\, v_j\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+\times\mathbf{R}_z)} \geq$$

$$\geq \sum_{p=0}^{t} |\gamma|^p \sum_{\langle\alpha,\,q\rangle\leq t-p} \|D_x{}^{\alpha}\, u_j\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+)}\,.$$

Per le (5.4), (5.5) e (5.6), dalla (5.3) segue:

$$\left(1-\frac{K}{|\gamma|}\right)|\gamma|^t\,\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\,\mathbf{C}^N)} + \sum_{p=0}^{t-1} |\gamma|^p \sum_{\langle\alpha,\,q\rangle\leq t-p} \|D_x{}^{\alpha}\, u\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\,\mathbf{C}^N)} \leq$$

$$\leq K'\,(\sum_{k} \|(p_{kj}+\gamma^t e^{i\theta}\delta_{kj})\, u_j\|_{L^2(\mathbf{R}^n{}_+)} + \sum_{h} \|B_{hj}\, u_j\|_{H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_h}(\mathbf{R}^{n-1})}\,).$$

Quindi posto $\lambda=\gamma^t e^{i\theta}$ e scelto γ tale che $|\gamma|>2K$, si ottiene la (5.2). Proviamo quindi il seguente teorema di esistenza ed unicità:

TEOREMA 5.2. *Se vale la condizione* (III) *e* $B=\|B_{hj}(D)\|_{\substack{h=1,\dots,r\\ j=1,\dots,N}}$ *è un operatore normale allora esiste una costante* $\lambda_0>0$ *tale che per ogni* $\lambda\in\mathbf{C}$, *con* $|\lambda|\geq\lambda_0$ *ed* $\arg\lambda=\theta$, *il problema* (5.1) *è univocamente risolubile qualunque siano* $f\in L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\,\mathbf{C}^N)$ *e* $g_h\in H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_h}(\mathbf{R}^{n-1})$.

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto del teorema 3.2, si ha che gli operatori A^* e B' verificano la condizione (III) con $-\theta$ al posto di θ e quindi dal teorema 5.1 segue che esiste $\lambda_0>0$ tale che per ogni numero comples-

so λ, con $|\lambda|>\lambda_0$ e $\arg\lambda=\theta$, il problema (5.1) ed il problema

$$(5.7)\qquad \begin{cases} v\in H^t(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N) \\ p_{jk}^*(D)\,v_k+\bar{\lambda}\,\delta_{kj}\,v_k=f_j', \quad x_n>0, \quad f'\in L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N) \\ B'_{hj}(D)\,v_j\,|_{x_n=0}=g'_h, \quad g'_h\in H^{\sigma'_h-\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1}), \quad h=1,\dots,N\,T_n-r \end{cases}$$

ammettono al più una soluzione.

Posto $L=A+\lambda$, consideriamo l'operatore

$$\mathcal{P}:\ u\to\mathcal{P}u=(Lu, B_1\,u\,|_{x_n=0},\dots,B_r\,u\,|_{x_n=0})$$

che è lineare e continuo da $H^t(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N)$ in

$$E=L^2(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N)\times\prod_h H^{\sigma_h-\frac{1}{2}q_n}(\mathbf{R}^{n-1})$$

Poiché dal teorema 5.1 segue la maggiorazione

$$\|u\|_{H^t(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N)}\leq K\,\|\mathcal{P}u\|_E\,,$$

per un noto teorema di J. Peetre [11] e il teorema del codominio chiuso di Banach, si ha che, assegnata $F\in E$, l'equazione $\mathcal{P}u=F$ ha soluzione se e solo se

$$\langle F,V\rangle=0,\quad \forall V=(v,w_1,\dots,w_r)\in E':\ \mathcal{P}^*\,V=0\ \ (^{13})$$

ove $\mathcal{P}^*$ è l'aggiunto di $\mathcal{P}$.

Osserviamo che, se $V\in E'$ è tale che $\mathcal{P}^*\,V=0$, tenendo conto del teorema di regolarizzazione 4.4 e del teorema 3.2, qualunque sia $u\in H^t(\mathbf{R}^n{}_+;\mathbf{C}^N)$ si ha:

$$(5.8)\qquad 0=\langle\mathcal{P}^*\,V,\bar{u}\rangle=\langle V,\overline{\mathcal{P}u}\rangle=\langle V,\overline{Lu}\rangle+\langle w,\overline{Bu}\rangle=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n_+} v\,\overline{Lu}\,dx+\int_{\mathbf{R}^{n-1}}[w\,\overline{Bu}]_{x_n=0}\,dx'=$$

(13) Son E' indichiamo il duale forte di E.

$$=\int_{\mathbf{R}^n_+} \bar{u}\, L^* v\, dx+\int_{\mathbf{R}^{n-1}} [\overline{Cu}\cdot B' v]_{x_n=0}\, dx'+\int_{\mathbf{R}^{n-1}} [(w-C' v)\, \overline{Bu}]_{x_n=0}\, dx'.$$

Da quest'ultima relazione si ricava che

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} \bar{u}\, L^* v\, dx=0, \qquad \forall u\in C_0^\infty\, (\mathbf{R}^n{}_+;\, \mathbf{C}^N)$$

e quindi $L^* v=0$.

Allora dalla (5.8) segue che per ogni $u\in C_0^\infty\, (\overline{\mathbf{R}}^n{}_+;\, \mathbf{C}^N)$ risulta:

$$0=\int_{\mathbf{R}^{n-1}} [\overline{Cu}\cdot B' v]_{x_n=0}\, dx'+\int_{\mathbf{R}^{n-1}} [(w-C' v)\, \overline{Bu}]_{x_n=0}\, dx'$$

dalla quale, tenuto conto del lemma 3.2, si ricava che

$$B' v=0, \quad w-C' v=0.$$

Dunque v è soluzione del problema (5.7) con $f'=0$ e $g'_h=0$ $(h=1, \dots, NT_n-r)$, per cui, in virtù della unicità della soluzione si ha $v=0$ e dunque anche $w_h=0$ $(h=1, \dots, r)$.

Pertanto risulta $V=0$ e allora per ogni $F\in E$ l'equazione $\mathcal{P}u=F$ ammette un'unica soluzione $u\in H^t\, (\mathbf{R}^n{}_+;\, \mathbf{C}^N)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,* Comm. Pure Appl. Math., Vol. XV, pp. 119-147, (1962).

[2] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,* II, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XVII, pp. 35-92, (1964).

[3] T. Bruno, *Sistemi quasi-ellittici e classi di Gevrey,* Ricerche di Mat., Vol. XXVII, pp. 155-185, (1978).

[4] P. Buonocore, *Esistenza e unicità in un semispazio per problemi normali relativi a sistemi quasi-ellittici t-omogenei con coefficienti costanti,* Rend. Accad. Naz. Lincei, Vol. LXIII, fasc. 1-2, pp. 19-26, (1977).

[5] V. Del Prete - D. Fortunato, *Teoremi di regolarizzazione per problemi quasi-ellittici in un semispazio e applicazioni,* Ricerche di Mat., Vol. XXIII, pp. 87-128, (1974).

[6] G. Geymonat, *Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici,* Annali Mat. Pura ed Appl., (IV) Vol. LXIX, pp. 207-284, (1965).

[7] G. Geymonat, *Su alcuni problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici secondo Petrowsky,* Le Matematiche, Vol. XX, pp. 211-253, (1965).

[8] L. Hörmander, *Linear partial differential operators,* Springer-Verlag, (1963).

[9] J. L. Lions - E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications,* Vol. I, Springer-Verlag, (1972).

[10] C. Parenti, *Valutazioni a priori e regolarità per soluzioni di equazioni quasi-ellittiche,* Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XLV, pp. 1-70, (1971).

[11] J. Peetre, *Another approach to elliptic boundary problems,* Comm. Pure Appl. Math., Vol. XIV, pp. 711-731, (1961).

[12] L. N. Slobodeckii, *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations,* Amer. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 57, pp. 207-276, (1966).

[13] V. A. Solonnikov, *On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg,* I, Am. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 56, pp. 193-232, (1966).

[14] M. Troisi, *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche,* Ann. Mat. Pura ed Appl., (IV) Vol. XC, pp. 331-412, (1971).

[15] L. R. Volevich, *Proprietà locali delle soluzioni di sistemi quasi-ellittici,* (in russo), Mat. Sbornik, t. 59, pp. 3-52, (1962).

[16] L. R. Volevich, *Solvability of boundary problems for general elliptic systems,* Am. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 67, pp. 182-225, (1968).

[17] L. R. Volevich - B. P. Paneyakh, *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione,* Russian Math. Surveys, Vol. XX, pp. 1-73, (1965).