INSIEMI INVARIANTI (*)

di MARIA VITTORIA MARCHI (a Padova) (**)

SOMMARIO. - *Sia S un'applicazione multivoca di un sottoinsieme non-vuoto compatto K di E^n in E^n a valori non-vuoti e compatti.*

Si dimostra che se K è convesso e S è continua e sottotangenziale a K, S si può estendere ad un'applicazione $\tilde{S}$ di E^n in sé in modo tale che, per ogni $x_0 \in K$, ogni soluzione del problema di Cauchy: $\dot{x} \in \tilde{S}(x)$ $x(0) = x_0$ rimanga in K.

SUMMARY. - *Let S be a multivalued function from a nonempty compact subset K of E^n to E^n, with nonempty compact values.*

Assuming K convex and S continuous and subtangential to K, it is shown that S is extendible to a multivalued function $\tilde{S}$ on E^n in such a way that, for each $x_0 \in K$, every solution of the Cauchy problem: $\dot{x} \in \tilde{S}(x)$ $x(0) = x_0$ remains in K.

Introduzione. Si consideri la relazione differenziale:

$$\dot{x} \in S(x) \tag{1}$$

dove S è un'applicazione multivoca di un opportuno sottoinsieme A di E^n in E^n; è noto da [1 4 5] che, se K è un sottoinsieme compatto di A e S è continua a valori compatti, la sottotangenzialità di S a K è condizione sufficiente perché K sia debolmente invariante per (1). Come si vede dal seguente esempio, dalle stesse condizioni non deriva l'invarianza di K: $A = E^1$, $K = \{0\}$, $\dot{x} = x^{1/3}$.

(*) Pervenuto in Redazione il 4 maggio 1978.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata - Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.

In questa nota si danno delle condizioni sull'insieme e sull'applicazione che garantiscono l'invarianza di K.

1. Nel seguito S sarà un applicazione multivoca di un opportuno sottoinsieme A di E^n in E^n a valori non vuoti e compatti. Se $x_0 \in A$, diciamo soluzione del problema:

$$\dot{x} \in S(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

una funzione assolutamente continua in un intervallo $[0, T]$ (con $T > 0$) che soddisfi le seguenti condizioni: i) $x(t) \in A$ per ogni $t \in [0, T]$; ii) $\dot{x}(t) \in S(x(t))$ per q. o. $t \in [0, T]$; iii) $x(0) = x_0$.

Sia K un sottoinsieme non vuoto e compatto di A, K si dice debolmente invariante (per la relazione $\dot{x} \in S(x)$) se per ogni $x_0 \in K$ c'è almeno una soluzione del problema (1) che soddisfa la condizione: iv) $x(t) \in K$ per ogni $t \in [0, T]$. K si dice invariante se per ogni $x_0 \in K$ ogni soluzione del problema (1) soddisfa la condizione iv).

Sia d la distanza Euclidea su E^n, siano A e B due sottoinsiemi limitati di E^n, la distanza di Hausdorff tra A e B è:

$$D(A, B) = \max \{\delta^*(A, B), \delta^*(B, A)\},$$

dove

$$\delta^*(A, B) = \sup \{d(B, x) : x \in A\}.$$

La famiglia dei sottoinsiemi non vuoti e compatti di E^n con la distanza di Hausdorff è uno spazio metrico completo che indichiamo comp E^n. In [2. p. 133] si dimostra che un'applicazione multivoca S a valori non vuoti e compatti in E^n è continua se e solo se è una funzione continua nello spazio metrico comp E^n.

Sia K un sottoinsieme non vuoto, convesso e compatto di E^n, è noto che la funzione $d_K : x \mapsto d(K, x)$ è una funzione continua e convessa; definiamo come in [6. p. 22] sottodifferenziale di d_K nel punto $x_0 \in E^n$, il sottoinsieme non vuoto, convesso e compatto di E^n:

$$\partial d_K(x_0) = \{y \in E^n : \langle x - x_0, y \rangle \leq d_K(x) - d_K(x_0) \text{ per ogni } x \in E^n\}.$$

Cono normale a K in x_0, $N(x_0)$, è il cono chiuso e convesso generato da $\partial d_K(x_0)$ nello zero di E^n; cono tangente a K in x_0, $T(x_0)$, è il polare di $N(x_0)$, ossia il sottoinsieme di E^n così definito:

$$T(x_0)=\{x\in E^n:\ \langle x,y\rangle\leq 0 \text{ per ogni } y\in N(x_0)\}.$$

Un'applicazione multivoca si dice sottotangenziale a K se verifica la condizione: $S(x)\subset T(x)$ per ogni $x\in K$.

Sia p_K la proiezione di E^n su K; in seguito useremo la seguente proposizione per la dimostrazione della quale si rimanda a [6. p. 62]:

PROP. 1. *Per ogni $x_0\in K$ esiste un elemento $g\in\partial d_K(p_K(x_0))$, $\|g\|=1$, per cui risulta $d(K,x_0)=\langle x_0-p_K(x_0),g\rangle$.*

2. Sia S un'applicazione continua definita su un sottoinsieme K non vuoto, convesso e compatto di E^n a valori non vuoti e compatti; $S\circ p_K$ è un'estensione continua di S a E^n. È noto che per ogni $x_0\in E^n$ il problema:

$$\dot{x}\in S(p_K(x)),\quad x(0)=x_0 \tag{1}$$

ammette soluzione [3].

TEOREMA 1. *Sia K un sottoinsieme non vuoto, convesso e compatto di E^n, sia S un'applicazione multivoca di K in E^n continua, a valori compatti e sottotangenziale a K, allora K è invariante per*

$$\dot{x}\in S(p_K(x)). \tag{2}$$

DIM. Per $x_0\in K$, $x=x(t)$ sia una soluzione del problema (1) definita nell'intervallo $[0,T]$, dimostreremo che esiste una successione $\{x_n\}$ uniformemente convergente a x su $[0,T]$ che verifica la seguente condizione: i) per ogni $\varepsilon>0$ si può determinare n_ε tale che per ogni $n\geq n_\varepsilon$ e per ogni $t\in[0,T]$ risulti: $d(K,x_n(t))\leq\varepsilon t$. A questo scopo, presa una successione $\{z_n\}$ di funzioni gradino uniformemente limitate, uniformemente convergente su $[0,T]$ a una funzione integrabile e limitata z per cui risulti: $z(t)\in S(p_K(t)))$ per ogni $t\in[0,T]$ e $z(t)=\dot{x}(t)$ per ogni t per cui $\dot{x}(t)\in S(p_K(x(t)))$, poniamo per ogni $n\geq 1$ e per $t\in[0,T]$:

$$y_n(t)=\int_0^t z_n(s)\,ds+x_0.$$

La successione $\{y_n\}$ è una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue su $[0, T]$ che converge puntualmente a x; da essa si può estrarre una sottosuccessione, che indichiamo $\{x_n\}$, che converge uniformemente a x su $[0, T]$. Vogliamo dimostrare che $\{x_n\}$ verifica la condizione i). Per $\varepsilon > 0$ e per $n \geq 1$, definiamo:

$$I_n^\varepsilon = \{t \in [0, T] : d(K, x_n(s)) \leq \varepsilon s \ \text{ per ogni } s \in [0, t]\}.$$

Si verifica banalmente che I_n^ε è l'intervallo $[0, t_0]$, dove $t_0 = t_0(n, \varepsilon) = \sup I_n^\varepsilon$.

Per l'uniforme convergenza di $\{x_n\}$ e per la continuità di S, possiamo scegliere n_ε in modo tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si abbia, per ogni $t \in [0, T]$:

$$d(\dot{x}_n(t), z(t)) \leq \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad D(S(p_K(x_n(t))), S(p_K(x(t)))) \leq \varepsilon/3.$$

Supponiamo che per qualche $n \geq n_\varepsilon$ sia $t_0 < T$; scelto $\delta > 0$ (con $\delta < T - t_0$) in modo tale che per ogni coppia di elementi t', t'' appartenenti all'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$ risulti:

$$D(S(p_K(x(t'))), S(p_K(x(t'')))) \leq \varepsilon/3,$$

per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ prendiamo $g_n(t) \in \partial d_K(p_K(x_n(t)))$ come nella Prop. 1.1.; risulta allora:

$$\begin{aligned} d(K, x_n(t)) &= \langle x_n(t) - p_K(x_n(t)), g_n(t) \rangle = \\ &= \langle x_n(t) - x_n(t_0), g_n(t) \rangle + \langle x_n(t_0) - p_K(x_n(t_0), g_n(t) \rangle + \\ &\qquad + \langle p_K(x_n(t_0)) - p_K(x_n(t)), g_n(t) \rangle. \end{aligned}$$

Sappiamo che:

$$\langle p_K(x_n(t_0)) - p_K(x_n(t)), g_n(t) \rangle \leq 0$$

e che:

$$\langle x_n(t) - x_n(t_0), g_n(t) \rangle = (t - t_0) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle \dot{x}_n(t_i), g_n(t) \rangle$$

dove $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ e $t_0 \leq t_i \leq t$, per $i = 1, 2, \dots, m$. Siano $s^i(t) \in S(p_K(x(t)))$, $s_n^i(t) \in S(p_K(x_n(t)))$ elementi per cui risulti rispettivamente:

$$|z(t_i) - s^i(t)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad |s^i(t) - s_n^i(t)| \leq \varepsilon/3, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m,$$

allora:

$$\langle \dot{x}_n(t_i), g_n(t) \rangle =$$

$$= \langle \dot{x}_n(t_i) - z(t_i), g_n(t) \rangle + \langle z(t_i) - s^i(t), g_n(t) \rangle +$$

$$+ \langle s^i(t) - s_n^i(t), g_n(t) \rangle + \langle s_n^i(t), g_n(t) \rangle,$$

essendo l'ultimo termine minore o uguale a zero per la condizione di sotto tangenzialità, si ha per ogni $t \in [t_0, t_0+\delta]$:

$$d(K, x_n(t)) \leq \varepsilon (t-t_0) + \langle x_n(t_0) - p_K(x_n(t_0)), g_n(t) \rangle \leq$$

$$\leq \varepsilon (t-t_0) + d(K, x_n(t_0)) \leq \varepsilon t.$$

Questo contraddice la massimalità di t_0. Così la successione $\{x_n\}$ verifica la i) e pertanto $d(K, x(t)) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Da qui, poiché K è compatto, segue che $x(t) \in K$ per ogni $t \in [0, T]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. P. Aubin, F. H. Clarke. *Monotone invariant solutions to differential inclusions.* J. London Math. Soc. (1977).

[2] C. Berge. *Espace topologique. Function multivoques.* Dunod, Paris (1959).

[3] A. F. Fillipov. *On the existence of solutions of multivalued differential equations.* Mat. Zametki 10 (1971) 307-313.

[4] M. G. Grandall. *A generalization of Peano's existence theorem and flow invariance.* Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972) 151-155.

[5] P. Hartman. *On invariant sets and on a theorem of Wazewski.* Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972) 511-520.

[6] R. B. Holmes. *A course of Optimization and best approximation.* Lecture notes 257, Springer-Verlag, Berlino (1972).