

# ALCUNI CRITERI PER IL PROLUNGAMENTO DI PROPRIETÀ ARITMETICHE NELL'OPERAZIONE DI CHIUSURA PROIETTIVA (\*)

di EMILIA MEZZETTI e WALTER SPANGHER (a Trieste) (\*\*)

*SOMMARIO. - Si individuano alcuni criteri per il prolungamento per chiusura proiettiva di proprietà globali aritmetiche e geometriche con particolare riguardo alla fattorialità. Condizioni analoghe vengono studiate relativamente a proprietà locali.*

*SUMMARY. - In this paper some conditions are given to extend in projective closure global arithmetic and geometric properties with particular respect to factoriality. Analogous conditions are examined for local properties.*

## **Introduzione.**

In alcuni recenti lavori è riapparso il problema della ricerca di condizioni (algebriche, topologiche, coomologiche) per assicurare la « conservazione » di proprietà algebriche nel passaggio da un anello  $R$  agli anelli  $R_0$ , completizzati proiettivi di  $R$ , o agli anelli  $\tilde{R}$  di Rees associati ad  $R$ . A tale riguardo, ci si propone di determinare - relativamente all'operazione di chiusura proiettiva - condizioni per la conservazione, in diversi significati, di proprietà di fattorialità quali quelle introdotte recentemente in [1] e [14].

Nel primo paragrafo, si precisano le definizioni di proprietà globali aritmetiche e globali geometriche per una varietà proiettiva con

(\*) Pervenuto in Redazione il 18 marzo 1978.

Lavoro parzialmente eseguito nell'ambito di una borsa di studio C.N.R..

(\*\*) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

riguardo ai domini  $UFD$ ,  $C_2FD$ ,  $C_3FD$  e  $(\alpha)$ . Nel seguito i domini di Krull  $A$  che sono  $C_2FD$  vengono caratterizzati tramite l'annullamento di un gruppo  $H(A)$  di cui si determinano proprietà analoghe a quelle del gruppo  $C(A)$  delle classi dei divisori (cfr. [11]); in tal senso si perviene al fatto che la normalità assicura per i domini  $C_2FD$  l'equivalenza della proprietà aritmetica con quella geometrica.

Successivamente, nel paragrafo 2, viene assegnato un procedimento generale dal quale si deduce che una proprietà aritmetica globale viene conservata per chiusura proiettiva qualora sussistano i teoremi di transfer per ampliamento trascendente, per localizzazione, nonché il « teorema di Nagata » (cfr. [4]); adottando questo procedimento si risolvono alcuni quesiti posti in [6].

Il paragrafo terzo è interamente dedicato al problema di transfer per estensione polinomiale della proprietà  $C_2FD$ ; in questa direzione si perviene ad un esempio di anello  $R[X]$  che non verifica la proprietà  $C_2FD$ , pur essendo essa verificata da  $R$ , nonché a varie condizioni sufficienti (di cui la proprietà  $(\omega)$  della prop. 13 appare la più « stretta ») per la sopramenzionata proprietà di trasferimento.

Il procedimento assegnato nel § 2 viene successivamente utilizzato - sebbene in forma particolare, ovvero limitato alle sole situazioni omogenee - per la determinazione di condizioni per il prolungamento delle sole proprietà geometriche; in tale sede appaiono maggiormente circostanziati i vari passaggi del procedimento e riappare, per il « teorema di Nagata relativamente ai  $C_2FD$  », una proprietà  $(\omega_0)$  analoga alla proprietà  $(\omega)$  sopramenzionata.

Nel quinto ed ultimo paragrafo, si studiano le relazioni ed i legami fra proprietà locali di una varietà proiettiva e quelle del cono affine associato; anche in questo caso le proprietà vengono conservate se sussistono i teoremi di transfer per estensione polinomiale, per localizzazione ed il « teorema di Nagata » rispetto ad un sistema moltiplicativamente chiuso che qui risulta sempre generato da elementi primi come si dimostra nella proposizione 22.

### § 1. Proprietà geometriche e aritmetiche.

In questo paragrafo ci proponiamo di indagare sui possibili significati di prolungamenti di proprietà relativi all'operazione di chiusura proiettiva.

Siano  $V$  una varietà affine irriducibile di  $A_n(k)$  <sup>(1)</sup> ed  $R=k[V]$  l'anello delle coordinate della varietà  $V$ . Indicata con  $\bar{V}$  la chiusura proiettiva di  $V$ , sia  $R_0$  l'anello delle coordinate di  $\bar{V}$  ovvero l'anello delle funzioni regolari del cono affine  $C(\bar{V})$  associato a  $\bar{V}$ .

Considereremo proprietà aritmetiche  $\sigma$  la cui validità possa essere attribuita o meno ad ogni dominio d'integrità noetheriano  $A$ .

Diremo che  $A$  verifica  $\sigma$  « globalmente » <sup>(2)</sup> se  $A$  verifica la proprietà  $\sigma$ ; diremo invece che  $A$  verifica  $\sigma$  « localmente » se  $A_{\mathcal{M}}$  verifica la proprietà  $\sigma$  per ogni ideale massimale  $\mathcal{M}$  di  $A$ .

Diremo che una varietà affine  $V$  verifica globalmente (risp. localmente)  $\sigma$  se  $R=k[V]$  verifica globalmente (risp. localmente)  $\sigma$ .

Per quanto attiene alle varietà proiettive, sarà opportuno distinguere (in molti casi) fra proprietà aritmetiche e proprietà geometriche.

Più precisamente, se  $W$  è una varietà proiettiva, diremo che verifica aritmeticamente (globalmente, localmente)  $\sigma$  se  $C(W)$  verifica (globalmente, localmente)  $\sigma$ , dove  $C(W)$  è il cono affine associato a  $W$ .

Per quanto riguarda le proprietà geometriche sembra opportuno precisare volta per volta il significato da darsi alla particolare proprietà  $\sigma$  (in quanto condizioni equivalenti aritmeticamente, potrebbero non esserlo più geometricamente).

Restringiamo quindi la nostra attenzione alle seguenti proprietà geometriche di domini d'integrità noetheriani graduati  $R$ :

*UFD)* ogni ideale primo omogeneo di altezza uno è generato da un elemento <sup>(3)</sup>;

*C<sub>2</sub>FD)* ogni ideale primo omogeneo di altezza uno è radicale di un ideale generato da un elemento <sup>(3)</sup>;

*C<sub>3</sub>FD)* ogni elemento irriducibile omogeneo genera un ideale il cui radicale è primo; (cfr. [1])

( $\alpha$ ) ogni elemento irriducibile omogeneo genera un ideale primario (cfr. [14]).

(1) Anche se le proposizioni che verranno dimostrate possono avere una maggior generalità, si supponrà, per semplicità,  $k$  algebricamente chiuso.

(2) Nel seguito la parola « globalmente » potrà venire omessa.

(3) Si dimostra facilmente che tale elemento, se esiste, è necessariamente omogeneo.

Nei prossimi paragrafi studieremo per le proprietà citate i seguenti tipi di problemi:

a) *Supposto che  $V$  verifichi (globalmente) una proprietà  $\sigma$ , vedere se  $\bar{V}$  verifica (globalmente) aritmeticamente o geometricamente la proprietà  $\sigma$ .*

b) *Supposto che  $V$  verifichi localmente  $\sigma$ , vedere se  $\bar{V}$  verifica localmente la proprietà  $\sigma$ -aritmetica o  $\sigma$ -geometrica.*

## § 2. Prolungamento di proprietà (globali) aritmetiche.

È ben noto da [2] che sussiste la seguente proprietà:

*Sia  $(x_0)$  primo in  $R_0$ ;  $V$  verifica UFD se e soltanto se  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente UFD.*

Come faremo vedere qui di seguito, la proprietà (intrinseca per gli UFD) di normalità è, in un certo senso, fondamentale per il prolungamento di proprietà aritmetiche. Per precisare meglio, restringiamo la nostra attenzione alla proprietà  $C_2FD$ .

Sia  $A$  un anello noetheriano di Krull. Con  $C(A)$  indichiamo il gruppo delle classi di divisori dell'anello (cfr. [3]) e con  $T(A)$  il sottogruppo di  $C(A)$  formato dagli elementi di torsione.

In [16], Storch ha introdotto la nozione di semifattorialità per anelli di Krull; si tratta cioè di anelli verificanti la proprietà che il gruppo  $C(A)$  sia di torsione 0, equivalentemente, che il gruppo quoziente  $C(A)/T(A)$  sia nullo. È immediato verificare che un anello di Krull è semifattoriale se e solo se è  $C_2FD$ .

Indichiamo ora con  $B$  un sopranello di Krull di  $A$  tale che sia verificata la condizione (PDE) di [3, pag. 18] (in particolare,  $S^{-1}A$  dove  $S$  è un sistema moltiplicativamente chiuso di  $A$  o l'anello di polinomi  $A[X]$ ). È noto che si ha allora un omomorfismo canonico  $j: C(A) \rightarrow C(B)$ . Nelle stesse ipotesi, resta definito inoltre, per passaggio al quoziente rispetto alla torsione, un omomorfismo  $\bar{j}: C(A)/T(A) \rightarrow C(B)/T(B)$ .

Si consideri ora la seguente sequenza:

$$D(A) \xrightarrow{\varphi} C(A) \xrightarrow{\pi} C(A)/T(A)$$

dove  $\varphi$  è l'epimorfismo canonico di  $D(A)$  su  $C(A)$ . Sia  $K(A)$  il nucleo dell'omomorfismo composto  $\pi\varphi$ , cioè il sottogruppo di  $D(A)$  formato

dagli elementi del tipo  $\text{div } \alpha$  per cui esistono un intero  $n$  ed un  $x$  del corpo dei quozienti di  $A$ , tali che  $n \text{ div } \alpha = \text{div } (\tilde{\alpha}^n)$  <sup>(4)</sup>  $= \text{div } x$ . È allora immediata la:

PROPOSIZIONE 1.

$$C(A)/T(A) \simeq D(A)/K(A).$$

Nel seguito, tale gruppo quoziente verrà indicato con  $H(A)$ .

Sia ora  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$  un anello di Krull graduato. Detto  $D_g(A)$  (risp.  $F_g(A)$ ) il gruppo generato dai divisori di ideali interi divisoriali (risp. principali) omogenei, siano  $C_g(A) = D_g(A)/F_g(A)$  e  $T_g(A)$  il sottogruppo di  $C_g(A)$  formato dagli elementi di torsione.

PROPOSIZIONE 2. *Nelle ipotesi precedenti, si ha  $H(A) \simeq C_g(A)/T_g(A)$ . (Segue dall'isomorfismo canonico  $C(A) \simeq C_g(A)$  di cui a [3], ex. 16 del § 1).*

COROLLARIO 1. *Sia  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$  un anello graduato di Krull. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $A$  sia  $C_2FD$  è che ogni ideale primo omogeneo di altezza uno sia radicale di un ideale principale.*

COROLLARIO 2. *Una varietà proiettiva aritmeticamente normale verifica aritmeticamente  $C_2FD$  se e soltanto se verifica geometricamente  $C_2FD$ .*

PROPOSIZIONE 3. *Sia  $A$  un anello di Krull ed  $S$  un sistema moltiplicativamente chiuso tale che valga la seguente proprietà:*

(\*) *per ogni  $s \in S$ , esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $s^n$  è prodotto di elementi  $a_i$  con  $\sqrt{(a_i)}$  ideale primo per ogni indice  $i$ .*

*L'omomorfismo  $\bar{j}: H(A) \rightarrow H(S^{-1}A)$  è biiettivo* <sup>(5)</sup>.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $G$  il sottogruppo di  $D(A)$  avente per base i divisori individuati dagli ideali primi di altezza uno con traccia su  $S$ . Se un ideale primo  $\mathcal{P}$  di altezza uno in  $A$  è tale che  $\mathcal{P} \cap S \neq \emptyset$ , allora, posto  $s \in \mathcal{P} \cap S$  e  $s^n = \prod_{i=1}^p a_i$ , decomposizione di cui a (\*), si ha  $\mathcal{P} = \sqrt{(a_k)}$  per qualche  $k$ ; essendo  $(a_k)$  primario e quindi una potenza

<sup>(4)</sup> Se  $\beta$  è un ideale frazionario di  $A$ , con  $\tilde{\beta}$  indichiamo l'ideale divisoriale associato a  $\beta$ .

<sup>(5)</sup> In particolare, la proprietà (\*) è verificata da sistemi moltiplicativamente chiusi generati da elementi primi o da elementi con radicale primo.

simbolica di  $\mathcal{P}$ , riesce  $G \subseteq K(A)$ . Inoltre, essendo  $\ker \bar{j} = \frac{G + K(A)}{K(A)} \simeq \frac{G}{G \cap K(A)}$ , si ha  $\ker \bar{j} = (0)$ .

PROPOSIZIONE 4. *Sia  $A$  un anello di Krull noetheriano ed  $S$  un sistema moltiplicativamente chiuso saturato di  $A$ . Se l'omomorfismo canonico  $\bar{j}: H(A) \rightarrow H(S^{-1}A)$  è biiettivo, allora  $S$  verifica la proprietà (\*).*

DIMOSTRAZIONE. Con le notazioni di cui sopra si ha  $G \subseteq K(A)$ . Se  $\mathcal{P}$  è un ideale primo di altezza uno con  $\mathcal{P} \cap S \neq \emptyset$ , necessariamente  $\mathcal{P}$  è radicale dell'ideale generato da un elemento  $a_i$  che, per la saturazione di  $S$ , appartiene ad  $S$ . Considerato poi un elemento  $s$  di  $S$  e detti  $\mathcal{P}_1 = \sqrt{(a_1)}, \dots, \mathcal{P}_t = \sqrt{(a_t)}$  gli ideali primi minimali sopra  $s$  (tutti di altezza uno), utilizzando in maniera iterata le valutazioni essenziali associate agli ideali  $\mathcal{P}_i$ , si determinano degli interi  $m, r_1, \dots, r_t$  con  $\frac{s^m}{a_1^{r_1} \dots a_t^{r_t}}$  elemento unitario di  $A$ , ovvero la tesi.

PROPOSIZIONE 5. *Sia  $A$  un anello di Krull; l'omomorfismo canonico  $\bar{j}: H(A) \rightarrow H(A[X])$  è biiettivo.*

PROPOSIZIONE 6. *Siano  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  un anello di Krull graduato e  $p$  un elemento omogeneo di grado uno il cui radicale sia primo in  $A$ . Posto  $A_{(p)} = B$  (localizzato geometrico di  $A$  rispetto al sistema moltiplicativamente chiuso generato da  $p$ ), si ha che  $B$  è un anello di Krull e  $H(A)$  è isomorfo ad  $H(B)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti si ha  $B[p, p^{-1}] \simeq A[p^{-1}]$ . Inoltre per le prop. 3,5 riesce  $H(A[p^{-1}]) \simeq H(A) \simeq H(B[p, p^{-1}]) \simeq H(B[p]) \simeq H(B)$ .

COROLLARIO. *Siano  $V$  una varietà affine,  $k[V] \simeq k \left[ \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right]$  il relativo anello delle coordinate e  $\bar{V}$  la sua chiusura proiettiva. Sia inoltre  $k[\bar{V}] = k[x_0, \dots, x_n]$  normale e  $\sqrt{(x_0)}$  primo in  $k[\bar{V}]$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $V$  verifichi  $C_2FD$  è che  $\bar{V}$  verifichi aritmeticamente  $C_2FD$ .*

Diamo qui di seguito un criterio (sufficiente) per il « prolungamento » di proprietà globali aritmetiche da una varietà affine  $V$  alla sua chiusura proiettiva  $\bar{V}$ .

Sia  $k[\bar{V}] = k[x_0, \dots, x_n]$  l'anello delle coordinate omogenee di  $\bar{V}$  su  $k$  e  $k[V] = k[x_1/x_0, \dots, x_n/x_0]$  l'anello delle funzioni regolari su  $V$ .  
Si consideri la seguente sequenza di anelli:

$$(*) \quad k[V] \rightarrow k[V][x_0] \rightarrow k[V][x_0, x_0^{-1}] \xrightarrow{\sim} k[\bar{V}][x_0^{-1}].$$

È ben noto che  $x_0$  è trascendente su  $k(V)$  e che  $(x_0)$  è primo in  $k[V][x_0]$ .

Dalla sequenza (\*) seguono le seguenti proprietà:

a) Se, relativamente ad una proprietà  $\sigma$ , valgono le proprietà di « transfer » per ampliamento semplice trascendente, per localizzazione ed il « teorema di Nagata » (cfr. [4]), relativamente al sistema moltiplicativamente chiuso  $S = \{1, x_0, \dots, x_0^n, \dots\}$  allora se  $V$  verifica  $\sigma$  ne segue che anche  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente  $\sigma$ .

b) Se, relativamente ad una proprietà  $\sigma$ , valgono le proprietà di transfer per localizzazione, il « teorema di Nagata » e la proprietà di transfer  $A[X] \rightarrow A$  ( $A[X]$  anello di polinomi sopra  $A$ ), se  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente  $\sigma$  ne segue che  $V$  verifica  $\sigma$ .

Per quanto già esposto in [4] e [5], sussiste la seguente:

**PROPOSIZIONE 7.** *Se  $(x_0)$  è primo in  $k[\bar{V}]$ ,  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente UFD (risp.  $C_2FD$  normale, normalità) se e soltanto se  $V$  verifica UFD (risp.  $C_2FD$  normale, normalità).*

Per quanto riguarda la proprietà  $C_2FD$ , si è fatta l'ulteriore ipotesi della normalità in quanto il teorema di transfer  $A \rightarrow A[X]$  relativamente ai  $C_2FD$  è noto soltanto sotto l'ipotesi della normalità di  $A$ . Successivamente si farà vedere con un controesempio che detta proprietà non vale in generale.

Diamo ora un'interpretazione geometrica degli anelli che intervengono nella sequenza (\*):

$k[V][x_0]$  risulta l'anello delle funzioni regolari della varietà prodotto  $V \times k$  ovvero del cilindro proiettante la varietà  $V$ ;

$k[V][x_0, x_0^{-1}]$  risulta l'anello delle funzioni regolari dell'aperto speciale affine del cilindro  $V \times k$  relativamente al chiuso di equazione  $x_0 = 0$ ;

$k[\bar{V}][x_0^{-1}]$  risulta l'anello delle funzioni regolari dell'aperto speciale affine del cono affine  $C(\bar{V})$  relativo al chiuso di equazione  $x_0 = 0$  sul cono.

C'è da osservare che nel Lemma 1 di [1], viene dimostrato in realtà solo il prolungamento della proprietà geometrica  $C_2FD$ , ma non di quella aritmetica; infatti nella relativa dimostrazione si prendono in

considerazione esclusivamente gli ideali primi omogenei di altezza uno di  $k[\bar{V}]$  trascurando quelli non omogenei.

Gli ideali primi di altezza uno degli anelli della sequenza (\*) possono essere variamente classificati. Quelli di  $k[V][x_0]$  possono essere suddivisi in due classi  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  (cfr. [5]); gli elementi di  $\mathcal{F}$  individuano sul cilindro sottocilindri di codimensione uno, mentre quelli della famiglia  $\mathcal{G}$  individuano sottovarietà di codimensione uno non cilindri. Per gli ideali primi di altezza uno di  $k[V][x_0, x_0^{-1}]$  valgono le stesse considerazioni di sopra, tralasciando le sottovarietà di codimensione uno contenute nell'iperpiano  $x_0 = 0$ . Per quanto attiene all'anello  $k[\bar{V}]$  si devono considerare da una parte gli ideali primi di altezza uno omogenei (sottoconi di codimensione uno), dall'altra quelli non omogenei (sottovarietà, non sottoconi, di codimensione uno); considerando  $k[\bar{V}][x_0^{-1}]$ , supposto  $(x_0)$  primo in  $k[\bar{V}]$ , si viene a perdere soltanto il sottocono di equazione  $x_0 = 0$ .

Tramite l'isomorfismo  $k[V][x_0, x_0^{-1}] \xrightarrow{\sim} k[\bar{V}][x_0^{-1}]$ , gli ideali omogenei di  $k[\bar{V}]$  si trasformano negli ideali della classe  $\mathcal{F}$  e quelli non omogenei di  $k[\bar{V}]$  in quelli della classe  $\mathcal{G}$ .

D'altra parte il teorema di transfer  $A \rightarrow A[X]$ , relativamente ai  $C_2FD$ , è valido sicuramente per gli ideali della famiglia  $\mathcal{F}$ , mentre non è detto che risulti valido per gli ideali della famiglia  $\mathcal{G}$ . Va sottolineato altresì che se il Lemma 1 di Stagnaro risultasse vero, per le proprietà *a*) e *b*) relative alla sequenza (\*), il teorema di trasferimento  $A \rightarrow A[X]$  risulterebbe vero per anelli  $A$  che siano  $k$ -domini finitamente generati; questo problema di trasferimento verrà affrontato nel prossimo paragrafo.

Un'altra utilizzazione dei criteri *a*) e *b*) è una risposta affermativa, sotto opportune ipotesi, al problema IV) posto in [6]. Infatti sussistono le seguenti proprietà:

**PROPOSIZIONE 8.** *Sia  $\bar{V}$  una varietà proiettiva aritmeticamente normale (risp. normale) che verifichi geometricamente  $C_2FD$ . Se  $\sqrt{(x_0)}$  è primo <sup>(6)</sup> (risp.  $(x_0)$  è primo) in  $k[V]$ ,  $k[\bar{V}]$  è un  $C_2FD$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti  $V$  (componente affine di  $\bar{V}$ ) verifica  $C_2FD$  ed è normale. Per la proposizione 2 di [5] e per la proposizione 7 di [4], si perviene alla tesi.

<sup>(6)</sup> È sufficiente l'ipotesi che gli ideali primi minimali sopra  $x_0$  siano radicali di principali (cfr. Osservazione alla prop. 17 §4), il che è sempre verificato se  $\bar{V}$  verifica geometricamente  $C_2FD$ .

**PROPOSIZIONE 9.** *Sia  $\bar{V}$  una varietà proiettiva normale, che verifichi geometricamente  $C_3 FD$  (risp.  $(\alpha)$ ). Se  $(x_0)$  è primo,  $k[\bar{V}]$  è un UFD. (cfr. § 4, prop. 18).*

### § 3. Il problema di transfer relativamente a $R \rightarrow R[X]$ per domini $C_2 FD$ .

Nel tentativo di risolvere il problema di transfer  $R \rightarrow R[X]$  per anelli UFD,  $C_2 FD$  e constatato che le difficoltà maggiori si presentano nello studio degli ideali primi della famiglia  $\mathcal{G}$  <sup>(7)</sup>, appare opportuno dare le seguenti caratterizzazioni:

**PROPOSIZIONE 10.** *Detto  $R$  un dominio d'integrità noetheriano ed  $f(X)$  un polinomio a coefficienti in  $R$  di grado positivo, si ha che: l'ideale  $f(X)R[X]$  è primo se e soltanto se  $f(X)K[X]$  è primo e  $I \not\subseteq \mathcal{P}$  per ogni  $\mathcal{P} \in \mathbf{P}(R)$  <sup>(8)</sup>, dove con  $I$  indichiamo l'ideale di  $R$  generato dai coefficienti di  $f(X)$  ( $K$  corpo dei quozienti di  $R$ ). (cfr. [7])*

**OSSERVAZIONE.** È interessante notare che l'ipotesi  $I^{-1} = R$ , equivalente alla proprietà  $I \not\subseteq \mathcal{P}$  per ogni  $\mathcal{P} \in \mathbf{P}(R)$ , individua relativamente agli UFD la ben nota proprietà di primitività del polinomio  $f(X)$ . D'altra parte (per  $R$  non normale), in un'accezione più ampia, la medesima ipotesi equivale al fatto che:

$\text{Ass} \left( \frac{R[X]}{(f(X))} \right) \subseteq \mathcal{G}$  ovvero che il polinomio  $f(X)$ , oltre ad essere primitivo (cfr. [5]), non ammette componenti immerse.

Infatti, considerata una decomposizione primaria ridotta di  $f(X)R[X]$ , gli ideali primi di altezza uno associati alla decomposizione non possono essere di tipo  $\mathcal{F}$  e ve n'è uno solo della famiglia  $\mathcal{G}$  ( $Q = f(X)K[X] \cap R[X]$ ). Se poi esistesse un ideale primo  $\mathcal{P}$  associato ad  $f(X)$  di tipo immerso (i. e.  $Q \subseteq \mathcal{P}$ ), risulterebbe  $\mathcal{P} = (f(X)): g(X)$  con  $g(X) \notin (f(X))$  e quindi esisterebbero un elemento non nullo  $a \in R \cap \mathcal{P}$  ed un polinomio  $h(X)$  tali che  $f(X)h(X) = ag(X)$ . Per la (6.13) di [13] ne consegue che in particolare nella relazione precedente si può supporre  $b = h(X) \in R$ . Ne conseguirebbe quindi che  $b/a$  apparterebbe a  $I^{-1} = R$ , il che è assurdo in quanto  $b \notin (a)$ .

<sup>(7)</sup> Indicheremo con  $\mathcal{F}$  la famiglia degli ideali primi  $Q$  di  $R[X]$  con  $Q = \mathcal{P}R[X]$  dove  $\mathcal{P}$  è un ideale primo di altezza uno di  $R$ , e con  $\mathcal{G}$  la famiglia degli ideali primi  $Q$  di  $R[X]$  con  $Q \cap R = (0)$ .

<sup>(8)</sup>  $\mathbf{P}(R) = \{ \mathcal{P} \in \text{Spec}(R); \mathcal{P} \text{ minimale sopra ideali del tipo } (a): b(a, b \in R) \}$ .

PROPOSIZIONE 11. *Con le notazioni della prop. 10, l'ideale  $\sqrt{f(X)R[X]}$  è primo se e soltanto se  $\sqrt{f(X)K[X]}$  è primo e  $I \not\subseteq \mathcal{P}$  per ogni ideale primo  $\mathcal{P}$  di altezza uno di  $R$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\sqrt{f(X)R[X]}$  primo e si consideri una decomposizione primaria ridotta di  $f(X)R[X]$ ; in essa interviene un unico ideale primario non immerso, con primo associato di altezza uno appartenente alla famiglia  $\mathcal{G}$ . Da ciò segue che  $f(X)K[X]$  è primario.

Viceversa, poiché  $\sqrt{f(X)K[X]}$  è primo, ne segue che  $f(X)K[X]$  è primario e quindi nella decomposizione primaria ridotta di  $f(X)R[X]$  interviene un solo primario non immerso, ovvero  $\sqrt{f(X)R[X]}$  risulta primo.

PROPOSIZIONE 12. *Con le notazioni precedenti, l'ideale  $f(X)R[X]$  è primario se e soltanto se  $f(X)K[X]$  è primario ed  $I \not\subseteq \mathcal{P}$  per ogni primo  $\mathcal{P} \in \mathbf{P}(R)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dall'osservazione precedente e da considerazioni già svolte in sede di dimostrazione della prop. 11.

Nel caso che l'anello  $R$ , supposto  $C_2FD$ , risulti pure normale (o di Krull), sussiste il teorema di transfer (cfr. [5], Teor. 2). Diamo qui di seguito altre condizioni sufficienti.

PROPOSIZIONE 13. *Sia  $R$  un dominio noetheriano  $C_2FD$  tale che sussista la seguente proprietà:*

( $\omega$ ) *preso  $f(X) \in \mathcal{P}R[X]$ ,  $\mathcal{P}$  primo di altezza uno di  $R$ , esistono  $(n, r) \in \mathbb{N}^2$  e  $g(X) \in R[X] \div \mathcal{P}R[X]$  con  $f(X)^n = p^r g(X)$  e  $\sqrt{pR[X]} = \mathcal{P}R[X]$  ( $p \in R$ ).*

*L'anello dei polinomi  $R[X]$  è pure  $C_2FD$  <sup>(9)</sup>.*

DIMOSTRAZIONE. È banale far vedere che ogni ideale  $Q$  di  $\mathcal{F}$  è radicale di un ideale principale. Sia  $Q \in \mathcal{G}$  ed  $f(X)K[X] = QK[X]$  con  $f(X) \in R[X]$ . Considerati gli ideali primi minimali sopra  $f(X)$  (necessariamente in numero finito), ed osservato che ce n'è uno solo della famiglia  $\mathcal{G}$  (i. e.  $Q$ ), siano  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$  i primi minimali sopra  $f(X)$  di  $\mathcal{F}$ .

Sussistendo la relazione  $f(X)^n = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s} \cdot g(X)$  con  $\sqrt{p_i} = \mathcal{P}_i$  e  $g(X) \notin \mathcal{P}_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ), se ne deduce che  $\sqrt{g(X)} = Q$ .

C. V. D.

<sup>(9)</sup> La proprietà ( $\omega$ ) è verificata qualora  $R$  sia normale.

PROPOSIZIONE 14. *Sia  $R$  un dominio noetheriano  $C_2FD$  di dimensione finita e catenario, ed  $\bar{R}$  la sua chiusura integrale. Se per ogni ideale primo  $\mathcal{P}$  di altezza uno di  $R$  esiste un solo ideale primo di  $\bar{R}$  sopra  $\mathcal{P}$  <sup>(10)</sup> allora  $\bar{R}$  risulta pur esso  $C_2FD$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $Q'$  un ideale primo di  $\bar{R}$  con  $htQ'=1$  e sia  $\mathcal{P}=Q' \cap R$ . Per la finita dimensione di  $R$  e la catenarietà, essendo  $\dim R = \dim \bar{R}$ , ne segue  $ht \mathcal{P}=1$  e quindi  $\mathcal{P} = \sqrt{(p)}$  ( $p \in R$ ). Essendo  $\bar{R}$  di Krull, gli ideali primi minimali sopra  $p$  in  $\bar{R}$  hanno altezza uno (cfr. [13], pag. 115) e contengono  $\mathcal{P}$  e quindi  $Q' = \sqrt{p \bar{R}}$ .

C. V. D.

Per il raggiungimento della prossima proposizione premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. *Sia  $R$  un dominio noetheriano. Condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento  $u=a/b$  ( $a, b \in R, b \neq 0$ ) appartenga ad  $R$  è che  $u$  appartenga a*

$$\bigcap_{\mathcal{P} \in \text{Ass}\left(\frac{R}{(b)}\right)} R_{\mathcal{P}} \quad (11).$$

LEMMA 2. *Sia  $R$  un dominio noetheriano. Ogni prodotto di elementi puri è puro.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $p_1, \dots, p_s$  elementi puri di  $R$ . Posto  $b = \prod_{i=1}^s p_i$ , sia  $\mathcal{P} = (b): a$  un primo associato di  $b$ . Se  $a \in (p_1)$ , allora  $\mathcal{P} = (b): a = (p_2 \cdots p_s): r$  dove  $a = p_1 r$  e si procederebbe quindi per induzione dimostrando che  $ht \mathcal{P} = 1$ .

Se invece  $a \notin (p_1)$ , sia  $\mathcal{P}_1$  un primo associato a  $(p_1): a$ . Essendo  $\mathcal{P} \subseteq (p_1): a \subseteq \mathcal{P}_1$  e  $ht \mathcal{P}_1 = 1$ , per la purezza di  $p_1$  ne segue la tesi.

PROPOSIZIONE 15. *Sia  $R$  un dominio noetheriano  $(R_1)$ ,  $C_2FD$  e tale che ogni primo  $\mathcal{P}$  di altezza uno sia radicale di un ideale principale primario <sup>(12)</sup>. Allora  $R[X]$  è  $C_2FD$ .*

<sup>(10)</sup> La proprietà è sicuramente verificata se  $R$  verifica  $(R_1)$ , ed in particolare quindi se  $R$  è l'anello delle coordinate di una varietà non singolare in codimensione uno.

<sup>(11)</sup> Si può altresì dimostrare che se  $u = a/b \notin R_{\mathcal{P}}$  per qualche  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(R)$ , esiste un ideale primo  $\mathcal{P}'$ , associato ad  $I = (b): a$ , con  $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$  e  $u \notin R_{\mathcal{P}'}$ .

<sup>(12)</sup> È equivalente a dire che il generatore dell'ideale principale può essere scelto puro.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un ideale  $Q$  di  $R[X]$  della famiglia  $\mathcal{G}$  e sia  $f(X) \in R[X]$  un polinomio tale che  $f(X)K[X] = QK[X]$ . Di ideali primi minimali sopra  $f(X)$  in  $R[X]$  ve n'è uno solo della famiglia  $\mathcal{G}$  (i. e.  $Q$ ) ed un numero finito  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$  della famiglia  $\mathcal{F}$ . Sia  $\mathcal{P}_i = \sqrt{(p_i)}$  ( $p_i \in R$ ) e  $(p_i)$  primario. Pensando invece  $f(X)$  quale elemento di  $\bar{R}[X]$  dove  $\bar{R}$  è la chiusura integrale di  $R$ , gli ideali primi minimali sopra  $f(X)$  sono  $\bar{Q} = f(X)K[X] \cap R[X]$  e  $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_s$  dove  $\mathcal{P}'_i$  è l'unico ideale primo di  $\bar{R}[X]$  sopra  $\mathcal{P}_i$ ; riesce parimenti  $\mathcal{P}'_i = \sqrt{p_i \bar{R}[X]}$  (per le considerazioni svolte nella dimostrazione della prop. 14). Con tecnica analoga a quella utilizzata in [5], Teor. 2, si perviene ad un elemento  $g(X) = \frac{f(X)^n}{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}}$  di  $\bar{R}[X]$  che appartiene ad un unico ideale primo di altezza uno (i. e.  $\bar{Q}$ ).

Essendo  $\bar{R} = \bigcap_{\substack{ht Q'=1 \\ Q' \in \text{Spec}(\bar{R})}} \bar{R}_{Q'} \subseteq \bigcap_{\substack{ht \mathcal{P}=1 \\ \mathcal{P} \in \text{Spec}(R)}} \bar{R}_{\mathcal{P}}$ , ne consegue che

$g(X) \in \bigcap_{\substack{ht \mathcal{P}=1 \\ \mathcal{P} \in \text{Spec}(R)}} \bar{R}_{\mathcal{P}}[X]$  <sup>(13)</sup>. Poiché  $R$  verifica l'ipotesi  $(R_1)$ , riesce

$\bigcap_{\substack{ht \mathcal{P}=1 \\ \mathcal{P} \in \text{Spec}(R)}} \bar{R}_{\mathcal{P}} = \bigcap_{\substack{ht \mathcal{P}=1 \\ \mathcal{P} \in \text{Spec}(R)}} R_{\mathcal{P}}$ . Per i Lemmi 1 e 2 e per l'ipotesi di

purezza dei  $p_i$ , ne consegue che  $g(X) \in R[X]$  e quindi  $\sqrt{g(X)} = Q$ .  
(C. V. D.)

OSSERVAZIONE. Si noti che nelle ipotesi della Prop. 15 è verificata la condizione  $(\omega)$ , che risulta sufficiente per il trasferimento della proprietà  $C_2FD$  ad  $R[X]$ .

Altresì dalla Prop. 11 apparirebbe che la  $(\omega)$  non sia condizione necessaria. Infatti l'elemento  $g(X)$  cercato (di  $R[X]$ , tale che  $\sqrt{g(X)} = Q$ ), se esiste, deve essere del tipo  $g(X) = f(X)^n a/b$  ( $a, b$  privi di fattori irriducibili comuni) <sup>(14)</sup> ( $a, b \in R$ ).

<sup>(13)</sup> Il significato geometrico degli anelli  $\bar{R}_{\mathcal{P}}$ , supposto  $R$  anello delle coordinate di una varietà  $V$ , è ovvio; trattasi infatti degli anelli di valutazione (discreta) relativi ai divisori primi di prima specie della varietà  $V$ .

<sup>(14)</sup> Infatti l'elemento  $g(X)$  deve appartenere a  $f(X)K[X] \cap R[X]$  ed inoltre  $\sqrt{g(X)K[X]}$  deve essere primo. Supposto  $g(X) = f(X)q(X)$ , ( $q(X) \in K[X]$ ), ed utilizzando una decomposizione in fattori primi di  $q(X)$  in  $K[X]$  si deduce che ogni fattore primo di  $q(X)$  è associato ad  $f(X)$ .

Va sottolineato peraltro che la proprietà  $(\omega)$  può venir meno anche nell'ipotesi di anelli che siano  $k$ -algebre finitamente generate o che siano anelli  $C_2FD$ .

Infatti, relativamente all'anello  $R=C[t^2, t^3]$  ( $C$  corpo complesso), si ha:  $t^2+t^3 \in \sqrt{(t^2)}=(t^2, t^3)$  ma  $(t^2+t^3)^n$  (per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ) non può essere scritto sotto la forma  $t^{2m} g(t)$  con  $g(t) \in R \setminus \sqrt{(t^2)}$ ; inoltre nell'anello locale  $C_2FD$   $R'=C[t^2, t^3]_{(t^2, t^3)}$  potremmo parimenti considerare l'elemento  $t^2+t^3 \in \sqrt{t^2} R'$ .

Infine l'anello  $R'[X]$  non è  $C_2FD$ , pur essendo  $R'$  un dominio che verifica la proprietà  $(\alpha)$ . Consideriamo infatti l'elemento  $t^2 X+t^3$ ; esso genera in  $K[X]$  ( $K$  corpo dei quozienti di  $R'$ ) un ideale primo la cui traccia su  $R'[X]$  indichiamo con  $Q$ . Per quanto detto in precedenza, se  $Q$  fosse radicale di un ideale principale  $g(X)R'[X]$  ( $g(X) \in R[X]$ ) risulterebbe  $g(X)=(t^2 X+t^3)^n \cdot \frac{a}{b}$  ( $a, b \in R'$ ), anzi si può supporre  $a, b \in R$ .

Da ciò:  $g(X)b=t^{2n}a(X+t)^n$ ; pensata detta relazione nell'anello  $C[t, X]$ , poiché  $b$  divide  $t^{2n}a$ , ne segue  $g(X)=(X+t)^n h(t)$  ( $h(t) \in C[t]$ ). Da un lato, se  $\text{ord } h(t) \leq 1$ , si avrebbe che  $g(X)$  non appartiene ad  $R'[X]$ , dall'altro, se  $\text{ord } h(t) \geq 2$ ,  $g(X)$  non sarebbe primitivo (i. e.  $g(X) \in \sqrt{(t^2)}$ ).

#### § 4. Prolungamento di proprietà (globali) geometriche.

Con riferimento alle notazioni e considerazioni del § 1, siano  $R=k[V]=k[Y_1, \dots, Y_n]$  e  $R_0=k[\bar{V}]=k[X_0, \dots, X_n] \left( Y_i = \frac{X_i}{X_0} \right)$  l'anello delle coordinate di una varietà affine  $V$  e della sua chiusura proiettiva  $\bar{V}$ .

**PROPOSIZIONE 16.** *Supposto  $R$  un dominio UFD e supposto che gli ideali primi minimali sopra  $X_0$  (in  $R_0$ ) siano tutti principali, la varietà  $\bar{V}$  verifica geometricamente UFD.*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti con riferimento alla sequenza (\*) del paragrafo 2, si ha immediatamente che  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente UFD e quindi geometricamente.

**COROLLARIO.** *Supposto  $R$  un dominio UFD, condizione necessaria e sufficiente affinché  $\bar{V}$  verifichi aritmeticamente UFD è che  $X_0$  sia primo in  $R_0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Discende dalla proposizione precedente e dalla Remarque 3 del § 1 di [10], essendo  $X_0$  omogeneo di grado uno.

OSSERVAZIONE. Si noti che se  $\bar{V}$  verifica geometricamente *UFD*, necessariamente  $(X_0)$  è primo in  $R_0$  (essendo  $X_0$  omogeneo di grado uno) e quindi  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente *UFD*. Di conseguenza « $X_0$  primo in  $R_0$ » risulta condizione necessaria e sufficiente per il prolungamento geometrico della proprietà *UFD*.

PROPOSIZIONE 17. *Sia  $R$  un  $C_2$  FD e supponiamo che gli ideali primi minimali sopra  $X_0$  siano radicali di principali, e che sia verificata la proprietà:*

( $\omega_0$ ) *per ogni elemento omogeneo  $f_0$  di  $R_0$ , detti  $\mathcal{P}_i$  i primi minimali sopra  $X_0$ , esistono  $s$  elementi omogenei  $b_1, \dots, b_s \in R_0$  ed  $r, r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$  tali che  $f_0^r = b_1^{r_1} \cdots b_s^{r_s} \cdot \lambda$  con  $\lambda \notin \sqrt{b_i} = \mathcal{P}_i$  per ogni  $i=1, \dots, s$ .*

*Riesce allora che  $\bar{V}$  verifica geometricamente  $C_2$  FD.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $Q_0$  un ideale primo omogeneo di altezza uno di  $R_0$ . Se  $X_0 \in Q_0$ , allora  $Q_0 \in \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s\}$ .

Sia  $X_0 \notin Q_0$ . Considerato l'ideale  ${}^a Q_0 = Q$  (cfr. [12], II), primo di altezza uno di  $R$ , riesce  $Q = \sqrt{(f)}$  ( $f \in R$ ). Considerato un elemento omogeneo  $f_0 \in R_0$  tale che  ${}^a f_0 = f$ , per l'ipotesi ( $\omega_0$ ) si ha la relazione:

$$f_0^r = b_1^{r_1} \cdots b_s^{r_s} \cdot \lambda \quad \text{con } \lambda \notin \mathcal{P}_i \quad (i=1, 2, \dots, s)$$

e quindi  $\lambda \in Q_0$ . Inoltre essendo  $X_0 \in \sqrt{b_i}$ , sussistono relazioni del tipo:

$$X_0^n = b_i^{m_i} \mu_i \quad (i=1, \dots, s);$$

disomogeneizzando dette relazioni, si deduce che il disomogeneizzato di  $b_i^{m_i}$  è unitario in  $R$ . Posto  $m = \prod_{i=1}^s m_i$ , si ha:

$$f_0^m = b_1^{r_1 m} \cdots b_s^{r_s m} \cdot \lambda^m \quad \text{da cui } \sqrt{(f)} = \sqrt{({}^a \lambda)}.$$

Sia  $\sqrt{{}^a \lambda} = Q_1 \cap \dots \cap Q_t (\subseteq Q_0)$ , dove i  $Q_i$  sono i primi minimali sopra  $\lambda$ . Posto  $Q_1 = Q_0$  (conseguenza immediata dell'inclusione precedente) e poiché  $\sqrt{({}^a \lambda)} = \sqrt{(f)} = Q$ , gli ideali  $Q_2, \dots, Q_t$ , se esistenti, contengono necessariamente  $X_0$  e quindi sono primi minimali sopra  $X_0$ . Essendo  $\lambda \notin \mathcal{P}_i$  ( $i=1, \dots, s$ ), riesce  $\sqrt{({}^a \lambda)} = Q_1 = Q_0$ . (C. V. D.)

OSSERVAZIONE. Va notato che nell'ipotesi che  $X_0$  sia prodotto di primi (i. e.  $X_0$  primo), la proposizione 17 può essere dimostrata più semplicemente.

Infatti in relazione alla sequenza:

$$(**) \quad R \rightarrow R[X_0] \rightarrow R[X_0, X_0^{-1}] \xrightarrow{\sim} R_0[X_0^{-1}] \leftarrow R_0,$$

considerato un ideale primo omogeneo  $Q_0$  di altezza uno di  $R_0$  ( $X_0 \notin Q_0$ ),  $Q_0[X_0^{-1}]$  riesce il trasformato di un ideale  $Q$  di  $R$ , o di un ideale  $Q^*$  di  $R[X_0]$  della famiglia  $\mathcal{F}$ . In considerazione del fatto che il teorema di transfer della generazione principale sotto radicale vale per gli ideali della famiglia  $\mathcal{F}$  (cfr. [5]) e che sussiste nelle ipotesi fatte il teorema di Nagata, ne consegue che  $Q_0$  è radicale di un ideale principale.

Va notato che, difformemente al caso  $UFD$ , possono esistere varietà proiettive che verificano geometricamente  $C_2FD$  ma non aritmeticamente; in questo caso, oltre alle difficoltà di « inversione » del teorema di Nagata (cfr. prop. 4) nel caso  $R_0$  non normale, non sussiste la proprietà di transfer in generale relativamente a  $R \rightarrow R[X_0]$ .

Il passaggio da  $\bar{V}$  a  $V$  delle proprietà geometriche  $UFD$  e  $C_2FD$  è di immediata dimostrazione e senza alcuna ipotesi.

Per quanto attiene i domini  $C_3FD$  e quelli che verificano la proprietà  $(\alpha)$ , si può dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 18. *Sia  $(X_0)$  primo in  $R_0$ . La varietà  $\bar{V}$  verifica geometricamente  $C_3FD$  (risp.  $(\alpha)$ ), se e solo se  $V$  verifica  $C_3FD$  (risp.  $(\alpha)$ ).*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $p$  un elemento irriducibile di  $R$  e  $p_0$  un elemento omogeneo di  $R_0$  non divisibile per  $X_0$  tale che  ${}^a p_0 = p$  (i. e.  $p = p_0/X_0^{ap_0}$ ). Considerata la sequenza (\*\*), l'elemento  $p$  permane irriducibile in  $R_0[X_0^{-1}]$ , ovvero  $p_0$  risulta irriducibile in  $R_0[X_0^{-1}]$ ; poiché  $p_0$  non è divisibile per  $X_0$  ed  $(X_0)$  è primo, ne consegue <sup>(15)</sup> che  $p_0$  è irriducibile in  $R_0$ . Riesce allora:  $\sqrt{(p_0)}$  primo e quindi  ${}^a\sqrt{(p_0)} = \sqrt{{}^a p_0} = \sqrt{(p)}$  ideale primo di  $R$  (risp.  $(p_0)$  primario e quindi  ${}^a(p_0) = {}^a p_0 = (p)$  primario).

<sup>(15)</sup> Sussiste infatti la seguente proprietà:

— Siano  $A$  un dominio d'integrità ed  $S$  un sistema moltiplicativamente chiuso generato da elementi primi  $\{p_i\}_{i \in I}$  di  $A$ , ed  $a$  un elemento irriducibile in  $S^{-1}A$  ( $a \in A$ ), non divisibile da alcun  $p_i$ . Allora  $a$  è irriducibile in  $A$ .

Viceversa, sia  $q_0$  un elemento irriducibile omogeneo di  $R_0$ . Se  $q_0$  è associato ad  $X_0$ , la tesi è verificata. Altrimenti,  $q_0$  permane irriducibile in  $R_0 [X_0^{-1}]$ ; l'elemento  $q = q_0/X_0^{q_0} \in R$  è pure irriducibile in  $R [X_0, X_0^{-1}]$ , quindi in  $R [X_0]$  (per la nota precedente), e quindi pure in  $R$ . Riesce perciò  $\sqrt{(q)}$  ideale primo di  $R$ , ovvero  $\sqrt{q_0/X_0^{q_0}}$  primo in  $R_0 [X_0^{-1}]$  (risp.  $(q)$  primario in  $R$  e  $(q_0/X_0^{q_0})$  primario in  $R_0 [X_0^{-1}]$ ).

Per le diverse formulazioni del teorema di Nagata (cfr. [4], prop. 6 e [14], prop. 4.2), si ha la tesi.

OSSERVAZIONE. Sotto l'ipotesi  $(X_0)$  primo in  $R_0$ , e se fosse verificata la proprietà di transfer per  $R \rightarrow R [X_0]$  relativamente alla proprietà  $C_3 FD$  (risp.  $(\alpha)$ ), dal verificare  $\bar{V}$  geometricamente  $C_3 FD$  (risp.  $(\alpha)$ ) ne seguirebbe che  $\bar{V}$  verifica aritmeticamente  $C_3 FD$  (risp.  $(\alpha)$ ).

## § 5. Il caso locale.

Detta  $V$  una varietà proiettiva ed  $R$  l'anello omogeneo delle coordinate di  $V$ , tale anello può essere interpretato come anello delle coordinate del cono affine  $C(V)$  associato.

Il problema che ci si propone di studiare è di ricercare condizioni sufficienti affinché una proprietà locale valida in ogni punto di una varietà affine  $W$  continui a sussistere anche nei « punti impropri » della sua chiusura proiettiva  $\bar{W}$ .

In tal senso, osservato che l'anello delle coordinate  $A$  di  $W$  non può dare alcuna informazione relativamente alla varietà proiettiva  $\bar{W}$ , ma che dette informazioni sono insite nel punto generico di  $W$ , ovvero nella generazione di  $A$  come  $k$ -algebra, appare opportuno ricercare le succitate condizioni nell'anello  $R$  (anello delle coordinate di  $\bar{W}$ ) oppure nella coppia  $(A, R)$ .

A tale scopo si ricercano relazioni fra gli anelli locali di  $A$  ovvero anelli locali geometrici di  $R$  e gli anelli locali (aritmetici) di  $R$ ; enunceremo i risultati seguenti in una forma più generale.

Sia  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  un dominio graduato noetheriano con  $R_1 \neq 0$ . Detto  $\mathcal{M}$  un ideale primo non irrilevante di  $R$ , si indichi con  $\mathcal{P}$  l'ideale primo omogeneo generato dalle forme di  $\mathcal{M}$ . Supponiamo inoltre che esista un elemento omogeneo  $r_1 (\in R_1)$  non appartenente a  $\mathcal{P}$  (e quindi non appartenente ad  $\mathcal{M}$ ) <sup>(16)</sup>.

<sup>(16)</sup> Gli anelli omogenei  $R$  delle coordinate di una varietà proiettiva verificano queste ipotesi.

Riesce:

$$R_{\mathcal{P}} = (R_{(\mathcal{P})}[r_1])_{R \dot{-} \mathcal{P}}$$

Considerata l'inclusione canonica  $R_{(\mathcal{P})} \rightarrow R_{\mathcal{P}}$ , indichiamo con  $^h$  (resp.  $^a$ ), l'operazione di estensione (resp. di contrazione) di ideali, cioè:

$$^h: \alpha \rightarrow ^h\alpha = (\alpha R_{(\mathcal{P})}[r_1])_{R \dot{-} \mathcal{P}} = \alpha R_{\mathcal{P}} \quad (\alpha \text{ ideale di } R_{(\mathcal{P})});$$

$$^a: \beta \rightarrow ^a\beta = \beta \cap R_{(\mathcal{P})} \quad (\beta \text{ ideale di } R_{\mathcal{P}}).$$

OSSERVAZIONI.

1) Considerato un ideale  $\alpha$  di  $R_{(\mathcal{P})}$ , si indichi con  $\tilde{\alpha}$  l'ideale omogeneo di  $R$  generato dalle forme che compaiono a numeratore nei vari elementi di  $\alpha$ .

Riesce:

$$^h\alpha = (\tilde{\alpha} R_{(\mathcal{P})}[r_1])_{R \dot{-} \mathcal{P}} \stackrel{(17)}{=} \tilde{\alpha} R_{\mathcal{P}}.$$

2) Considerato un ideale  $\beta$  di  $R_{\mathcal{P}}$ , cioè  $\beta = \gamma_{\mathcal{P}}$  con  $\gamma$  ideale di  $R$ , indichiamo con  $\gamma^*$  l'ideale omogeneo di  $R$  generato dalle forme di  $\gamma$ .

Riesce:

$$^a\beta = ^a(\gamma_{\mathcal{P}}^*) = \gamma_{(\mathcal{P})} = \gamma_{(\mathcal{P})}^*.$$

Da ciò ne consegue che gli ideali contratti in  $R_{(\mathcal{P})}$  sono tutti e soli quelli ottenuti per contrazione da ideali « omogenei » (del tipo  $\gamma_{\mathcal{P}}^*$  con  $\gamma^*$  omogeneo) di  $R_{\mathcal{P}}$  ed in tal senso l'operatore  $^a$  verrà in seguito applicato soltanto agli ideali « omogenei » di  $R_{\mathcal{P}}$ . Si osservi inoltre che tutti gli ideali di  $R_{(\mathcal{P})}$  sono ideali contratti, e che tutti e soli gli ideali « omogenei » di  $R_{\mathcal{P}}$  sono gli ideali estesi.

3) È ben noto (cfr. [12], I) che gli operatori  $^h$  ed  $^a$  stabiliscono un isomorfismo tra gli ideali contratti di  $R_{(\mathcal{P})}$  e gli ideali estesi di  $R_{\mathcal{P}}$  rispetto alle « operazioni » di somma, prodotto, intersezione, quoziente,

(17) Infatti  $R \subseteq R_{(\mathcal{P})}[r_1]$ .

radicale. Precisamente per l'operatore  $^h$  valgono le seguenti proprietà: ( $\alpha, \beta$  ideali di  $R_{(\mathcal{P})}$ )

- i) Se  $\alpha \subseteq \beta$ , allora  $^h\alpha \subseteq ^h\beta$ ;
- ii)  $^h(\alpha + \beta) = ^h\alpha + ^h\beta$ ;
- iii)  $^h(\alpha \cdot \beta) = ^h\alpha \cdot ^h\beta$ ;
- iv)  $^h(\alpha \cap \beta) = ^h\alpha \cap ^h\beta$ ;
- v)  $^h(\alpha : \beta) = ^h\alpha : ^h\beta$ ;
- vi)  $^h(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{^h\alpha}$ ;
- vii) Se  $Q$  è primo in  $R_{(\mathcal{P})}$ , allora  $^hQ$  è primo in  $R_{\mathcal{P}}$ .
- viii) Se  $\alpha$  è  $Q$ -primario in  $R_{(\mathcal{P})}$ , allora  $^h\alpha$  è  $^hQ$ -primario in  $R_{\mathcal{P}}$ .

Per l'operatore  $^a$ , relativamente ad ideali « omogenei » (i. e. estesi) <sup>(18)</sup> di  $R$ , sussistono analoghe proprietà.

Inoltre, in relazione alle decomposizioni primarie, valgono le seguenti proprietà:

a) Se  $\alpha = \bigcap_{i=1}^n Q_i$  è una decomposizione primaria ridotta, allora  $^h\alpha = \bigcap_{i=1}^n ^hQ_i$  è pure una decomposizione primaria ridotta.

(Infatti la decomposizione rimane ridotta nel passaggio  $R_{(\mathcal{P})} \rightarrow R_{(\mathcal{P})}[r_1]$ , e così pure nella successiva localizzazione rispetto a  $R \div \mathcal{P}$  in quanto  $Q_i R_{(\mathcal{P})}[r_1]$  è disgiunto da  $R \div \mathcal{P}$ ).

b) Se  $\beta = \bigcap_{j=1}^m Q_j'$  è una decomposizione primaria ridotta in primari « omogenei »  $Q_j'$  dell'ideale omogeneo  $\beta$  di  $R_{\mathcal{P}}$  allora  $^a\beta = \bigcap_{j=1}^m ^aQ_j'$  è una decomposizione primaria ridotta.

(Il fatto che l'ultima decomposizione risulti ridotta è conseguenza della parte a) e delle i) e iv)).

4) Se  $\alpha$ , ideale di  $R_{(\mathcal{P})}$ , è generato dagli elementi  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ , allora  $^h\alpha = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ .

Se  $\beta$ , ideale di  $R_{\mathcal{P}}$ , è generato dagli elementi omogenei  $\psi_1, \dots, \psi_s$

<sup>(18)</sup> Si ricordi che la saturazione tramite un sistema moltiplicativamente chiuso di un ideale omogeneo è pure omogenea.

di  $R$ , riesce:

$${}^a\beta = \left( \frac{\psi_1}{r_1 \partial \psi_1}, \dots, \frac{\psi_s}{r_1 \partial \psi_s} \right).$$

5) Sia  $S$  un sistema moltiplicativamente chiuso di  $R$  contenente un elemento  $r_1 \in R_1$ . Possiamo considerare il sistema moltiplicativamente chiuso  $S^*$  costituito dagli elementi omogenei di  $S$ .

Riesce:

$$R_{(S)} = R_{(S^*)} \text{ e } R_S = (R_{(S^*)} [r_1])_S; R_{S^*} = R_{(S^*)} [r_1, r_1^{-1}].$$

Tutte le considerazioni fatte finora relativamente alla coppia  $(R_{(\mathcal{P})}, R_{\mathcal{P}})$ , possono essere ripetute con ovvie modifiche per la coppia  $(R_{(S^*)}, R_S)$ .

Conservando le precedenti notazioni, sussiste la seguente:

PROPOSIZIONE 19.

- a)  $R_{(\mathcal{P})}$  è normale se e solo se  $R_{\mathcal{P}}$  è normale (risp.  $R_{\mathcal{M}}$  è normale) (cfr. [8]).
- b)  $R_{(\mathcal{P})}$  è regolare (risp. C-M) se e solo se  $R_{\mathcal{P}}$  è regolare (risp. C-M) (risp.  $R_{\mathcal{M}}$  è regolare (risp. C-M)) (cfr. [15]).
- c)  $R_{(\mathcal{P})}$  è UFD se e solo se  $R_{\mathcal{P}}$  è UFD (risp.  $R_{\mathcal{M}}$  è UFD).
- d) Se  $R_{(\mathcal{P})}$  è  $C_2$ FD normale, allora  $R_{\mathcal{P}}$  è  $C_2$ FD normale (risp.  $R_{\mathcal{M}}$  è  $C_2$ FD normale).
- e) Se  $R_{\mathcal{P}}$  è  $C_2$ FD, allora  $R_{(\mathcal{P})}$  è  $C_2$ FD (risp. se  $R_{\mathcal{M}}$  è  $C_2$ FD,  $R_{(\mathcal{P})}$  è  $C_2$ FD).

DIMOSTRAZIONE.

c) Supposto  $R_{(\mathcal{P})}$  UFD, la fattorialità di  $R_{\mathcal{P}}$  discende dal teorema di Gauss. Viceversa, considerato un ideale primo di altezza uno  $Q$  di  $R_{(\mathcal{P})}$ ,  ${}^hQ$  risulta primo di altezza uno e quindi principale, per 4).

d) (cfr. [5]).

e) Considerato un ideale primo di altezza uno  $Q$  di  $R_{(\mathcal{P})}$ ,  ${}^hQ$  risulta primo di altezza uno e quindi del tipo  $\sqrt{(f)}$  (dove  $f$  può essere supposto omogeneo appartenente ad  $R$ ). Ne consegue che  $Q = {}^a({}^hQ) = \sqrt{{}^a(fR_{\mathcal{P}})} = \sqrt{(f/r_1^{\partial f})}$ .

## CONSEGUENZE GEOMETRICHE.

a) Sia  $Z$  una sottovarietà irriducibile della varietà affine  $W$  e supponiamo che l'anello locale  $\nu(Z, W)$  di  $Z$  in  $W$  sia normale (risp. regolare,  $C$ - $M$ ,  $UFD$ ,  $C_2FD$  normale). Considerato il cono  $C(W)$  ed il sottocono  $C(Z)$ , riesce  $\nu(C(Z), C(W))$  normale (risp. regolare,  $C$ - $M$ ,  $UFD$ ,  $C_2FD$  normale). Inoltre, considerata una qualunque sottovarietà  $Z'$  sezione iperpiana di  $C(Z)$  con l'iperpiano di equazione  $X_0 = a$  ( $a \neq 0$ ) dove  $X_0$  è la variabile aggiuntiva, riesce  $\nu(Z', C(W))$  normale (risp. regolare,  $C$ - $M$ ,  $UFD$ ,  $C_2FD$  normale).

Infatti, detto  $R$  l'anello omogeneo delle coordinate di  $C(W)$  e  $\mathcal{P}$  l'ideale primo di  $C(Z)$  e  $\mathcal{M}$  l'ideale di  $Z'$ , riesce  $\nu(Z, W) = R_{(\mathcal{P})}$ ;  $R_{\mathcal{P}} = \nu(C(Z), C(W))$ ,  $R_{\mathcal{M}} = \nu(Z', C(W))$ .

b) Utilizzando le osservazioni precedenti, alcuni teoremi già noti si possono ritrovare in maniera molto semplice.

— Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà proiettiva  $V$  sia normale è che il conduttore di  $R$ , anello delle coordinate di  $V$ , sia irrilevante. (Infatti considerato il cono affine  $C(V)$  associato a  $V$ , risulta  $V$  normale se e soltanto se tutti i punti di  $C(V)$ , eccezion fatta al più per il vertice, risultano normali.)

— Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà proiettiva  $V$  sia aritmeticamente normale è che il vertice di  $C(V)$  risulti normale (cfr. [8]).

Analogamente, per una varietà proiettiva normale  $V$ , considerata la proprietà geometrica locale  $UFD$  (risp.  $C_2FD$ ) e considerato il luogo degli ideali primi  $\mathcal{P}$  di  $\text{Spec}(k[V])$  tali che  $R_{\mathcal{P}}$  è non  $UFD$  (risp. non  $C_2FD$ ), sia  $\alpha$  l'ideale della chiusura di tale luogo.

— Condizione necessaria e sufficiente affinché  $V$  sia localmente  $UFD$  (risp.  $C_2FD$ ) è che  $\alpha$  sia irrilevante.

Sussistono inoltre le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 20. Sia  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  un anello graduato. Sia  $S$  un sistema moltiplicativamente chiuso di  $R$  con  $S \cap R_1 \neq \emptyset$ . Sia  $R_S$  di Krull. Indicato con  $D_g(R_S)$  il gruppo generato dai divisori degli ideali primi « omogenei » minimali di  $R_S$  e con  $F_g(R_S)$  quello individuato dagli ideali principali « omogenei », e posto  $C_g(R_S) = \frac{D_g(R_S)}{F_g(R_S)}$ , riesce  $C_g(R_S) = C(R_S)$ .

DIMOSTRAZIONE. Considerato il sistema moltiplicativamente chiuso  $T$  degli elementi omogenei di  $R$ , riesce  $D_g(R_S) = G$ , dove con  $G$  indichiamo

il gruppo generato dagli ideali primi minimali « omogenei » con traccia su  $T$ .

Considerato l'anello  $T^{-1}R_S$  che risulta *UFD* in quanto una localizzazione di  $K_0[X, X^{-1}]$  ( $X$  indeterminata e  $K_0$  il corpo degli elementi quozienti di elementi omogenei dello stesso grado di  $R$ , (cfr. [9])), riesce  $C(T^{-1}R_S) = 0$ . In relazione all'omomorfismo canonico  $\bar{i}: C(R_S) \rightarrow C(T^{-1}R_S)$ , si ha:

$$\ker \bar{i} = C(R_S) = \frac{G}{G \cap F(R_S)} \simeq \frac{D_g(R_S)}{F_g(R_S)} = C_g(R_S).$$

PROPOSIZIONE 21. *Con le notazioni della proposizione precedente, si ha:*

$$C(R_{(S)}) = C_g(R_S).$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti l'omomorfismo canonico  $\bar{i}: D(R_{(S)}) \rightarrow D(R_S)$  può fattorizzarsi tramite gli omomorfismi canonici:

$$D(R_{(S)}) \rightarrow D(R_{(S)}[r_1]) \rightarrow D(R_{(S)}[r_1]_S) = D(R_S)$$

ed è tale che il divisore relativo all'ideale primo minimale  $Q$  di  $R_{(S)}$  viene mutato nel divisore dell'ideale  ${}^hQ$  di  $R_S$ . D'altronde  $\bar{i}(D(R_{(S)})) = D_g(R_S)$  ed  $\bar{i}(F(R_{(S)})) = F_g(R_S)$ , da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 22. *Con le notazioni delle proposizioni precedenti, essendo  $R_S = (R_{(S)}[r_1])_S = (R_{(S)}[r_1])_{\bar{S}}$  dove  $\bar{S}$  è il sistema moltiplicativamente chiuso saturato individuato da  $S$  in  $R_{(S)}[r_1]$ , riesce  $\bar{S}$  generato da elementi primi.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti  $C(R_{(S)}) = C(R_{(S)}[r_1]) = C(R_S)$ , da cui per [10], Remarque 3 del § 1,  $\bar{S}$  è generato da elementi primi.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] STAGNARO E., *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Vol. XIX (1974).
- [2] ANDREOTTI A. - SALMON P., *Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete*, Monatsh. Math. Vol. 6 (1957).
- [3] BOURBAKI N., *Algèbre commutative*, Ch. 7, *Diviseurs*, Hermann (1965).
- [4] MEZZETTI E. - SPANGHER W., *Su alcune generalizzazioni di un noto teorema di M. Nagata*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. Vol. IX fasc. I-II (1977).
- [5] MEZZETTI E. - SPANGHER W., *Anelli di polinomi su domini  $C_2FD$  e  $C_3FD$*  Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, Vol. IX fasc. I-II (1977).
- [6] STAGNARO E., *Sopra alcune estensioni della nozione di dipendenza integrale e di fattorialità ed applicazioni geometriche*, Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat., Vol. XLVIII, giu. 1970.
- [7] VASCONCELOS W. V., *Divisor Theory in Module Categories*, North-Holland (1974).
- [8] SEIDENBERG A., *The hyperplane sections of arithmetically normal varieties*, Am. Jour. Math. XCIV, (1972).
- [9] GROTHENDIECK A. - DIEUDONNÉ J., *E. G. A. II*, I. H. E. S. 8 (1961).
- [10] SAMUEL P., *Sur les anneaux factoriels*, Bull. Soc. Math. France 89 (1961).
- [11] SAMUEL P., *Lectures on unique factorization domains*, Tata Institute, Bombay (1964).
- [12] ZARISKI O. - SAMUEL P., *Commutative Algebra*, Vol. I-II, Van Nostrand (1960).
- [13] NAGATA M., *Local rings*. Interscience publ. (1962).
- [14] TAMONE G., *Su una condizione di fattorialità debole e l'annullamento del gruppo di Picard*, Ann. Mat. Pura Appl., Serie IV, CXII (1977).
- [15] DIEUDONNÉ J., *Topics in Local Algebra*, Notre Dame, Indiana (1967).
- [16] STORCH U., *Fastfaktorielle Ringe*, Schr. Math. Inst. Univ. Münster, Heft 36 (1967).