V-MONOIDALITÀ, V-AGGIUNZIONI E FUNTORI MONOIDALI II (*)

di MARIA CRISTINA PEDICCHIO e FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si inverte il teorema* 4.4 *di* [7] *e si caratterizza una classe di strutture premonoidali derivanti da una struttura di comonoide.*

SUMMARY. - *We prove the converse of the theorem* 4.4 *of* [7] *and this leads to a characterization of a class of premonoidal structures coming from a structure of comonoid.*

Introduzione.

In questa nota si prosegue lo studio, iniziato in [7], delle relazioni esistenti fra comonoidi in una categoria V-monoidale A e la comonoidalità di A stessa in $V_\#$, ove V è una categoria monoidale e simmetrica.

Più precisamente, dopo aver fornito (n. 1) alcuni risultati complementari alla nota [7], si giunge (n. 2) all'inversione dei teorema 4.4 di [7]. Ciò permette, successivamente, la caratterizzazione (nel caso di *V chiusa e bicompleta*) di una classe di strutture premonoidali su una V-categoria A derivanti da una struttura di comonoide su A stessa. In tal modo si ottiene una parziale inversione di un risultato di Day (cfr. [2]).

1. RISULTATI PRELIMINARI. In questo numero faremo alcune considerazioni preliminari per giungere all'inversione del teorema 4.4 di [7] § 2.

(*) Pervenuto in Redazione il 2 marzo 1978.
Lavoro eseguito, limitatamente al secondo autore, nell'ambito del GNSAGA.
(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

Osservazione 1.1.: Il teorema 4.4 si può formulare, con ipotesi leggermente indebolite, al modo seguente:

Teorema 4.4*.: *Sia* $\mathbf{A} = (A, \delta, e)$ *un comonoide in* $V_{\#}$. *Esistano, un* V*-funtore* V*-aggiunto destro* $h\colon \mathcal{I} \to A$ *al* V*-funtore* $e\colon A \to \mathcal{I}$ *ed un* V*-funtore* V*-aggiunto destro* $\overline{\otimes}$ *al* V*-funtore* $\delta\colon A \to A \otimes A$ (1). *Risulta allora che*:

a) *È possibile assegnare una struttura* V*-monoidale canonica su* A, *con unità* $\overline{Z} = h(*)$.

b) *Ogni* $A(r, -)\colon A \to V$ *ha struttura fortemente monoidale.*

c) *Ogni oggetto* r *di* A *ha struttura di comonoide in* A.

Infatti è possibile definire $\overline{a}, \overline{\lambda}', \overline{\rho}'$ come in 2.1, 2.2, 2.5 di [7] § 2 sostituendo al posto di $e^{-1}\colon Z \to A(k, \overline{Z})$ l'aggiunzione $\Phi_0\colon Z = \mathcal{I}(e(k), *) \to A(k, h(*)) = A(k, \overline{Z})$; utilizzando poi le medesime tecniche del n. 3 di [7] § 2 è agevole constatare che $\overline{a}, \overline{\lambda}' \overline{\rho}'$, sono isomorfismi V-naturali, da cui si conclude in maniera ovvia.

Si osservi ancora che il V-funtore $h\colon \mathcal{I} \to A$ deve *necessariamente* coincidere con il V-funtore $J^{\overline{Z}}$, essendo $\overline{Z} = h(*)$ cfr. [4]).

Il legame tra le ipotesi di 4.4 e quelle di 4.4* risulta dalla:

Proposizione 1.2.: *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista un oggetto* $\overline{Z}$ *di* A *tale che* $e\colon A(a, \overline{Z}) \to Z$ *sia isomorfismo per ogni* a *di* A, *è che* e *ammetta un* V*-aggiunto destro* h, V*-pienamente fedele, con* $h(*) = \overline{Z}$.

La dimostrazione si ottiene con facili verifiche.

Si noti ancora che, nel caso che Z sia un oggetto terminale di V (per es.: $V =$ Set; $V =$ categoria cartesiana), le ipotesi di 4.4 e 4.4* risultano equivalenti.

Osservazione 1.3.: In [7] § 1 abbiamo provato che, se A è una V-categoria V-monoidale, ogni struttura monoidale (Φ, Φ_0) su $A(r, -)\colon A \to V$ induce una struttura di comonoide (δ, e) su r e viceversa.

Si osservi che effettuando successivamente le sopraddette costruzioni si presentano i due seguenti casi:

(1) Si ricordi (cfr. [7] § 2 n. 2) che V è una fissata categoria *monoidale e simmetrica*; per la definizione di $V_{\#}$ si veda [4], 3.4 pag. 519; ogni V-aggiunzione fra V-funtori verrà intesa nel senso di [5] Th. 6 pag. 24; cfr. anche [7] § 2.

a) (Φ, Φ_0) *induce* (δ, e); (δ, e) *induce* $(\tilde{\Phi}, \Phi_0)$ *ove, in generale,* $\Phi = \tilde{\Phi}$.

b) (δ, e) *induce* (Φ, Φ_0) *e* (Φ, Φ_0) *induce* (δ, e).

Daremo ora degli esempi in cui la situazione descritta in *a*) non si verifica; ossia in cui $\tilde{\Phi} = \Phi$.

Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 1.4.: *Siano* V *una categoria* (*simmetrica, monoidale*) *ed* A, B *due* V-*categorie* V-*monoidali. Diremo che un* V-*funtore* $F\colon A \to B$ *è* V-*monoidale, con struttura* (Φ, Φ_0), *se* (F, Φ, Φ_0) *è monoidale e* $\Phi\colon F(a_1) \otimes F(a_2) \to F(a_1 \otimes a_2)$ *è una trasformazione* V-*naturale in* a_1, a_2.

Proposizione 1.5.: *Se* V *è* (*monoidale, simmetrica*) *chiusa ed* $(A(r, -), \Phi, \Phi_0)$ *è* V-*monoidale, allora il seguente diagramma commuta*:

$$\begin{tikzcd}
A(r,a) \otimes A(r,b) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\bar{\otimes}"'] & & A(r, a \bar{\otimes} b) \\
& A(r \bar{\otimes} r, a \bar{\otimes} b) \arrow[ur, "A(\delta, 1)"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Essendo $\delta\colon r \to r \bar{\otimes} r$ *la comoltiplicazione su* r *indotta da* Φ.

DIM: $\Phi\colon (A \otimes A)((r, r), (-, -)) \to A(r, - \bar{\otimes} -)$ è V-naturale nelle variabili mute, per definizione; la tesi segue immediatamente essendo V chiusa, dal teorema di rappresentazione per V-funtori 10.8 di [4] pag. 469.

La proposizione 1.5 assicura che $\tilde{\Phi} = \Phi$.

Osservazione 1.7.: *Indicato con* $(A(r, -), \Phi, \Phi_0)$ *il funtore fortemente monoidale di cui al punto b*) *di* 4.4*, *si noti che* Φ *verifica il diagramma* 1.6, ([2]).

Dunque il punto *c*) di 4.4* può essere ulteriormente precisato nel seguente modo:

([2]) Si ricordi che V è *monoidale e simmetrica,* non necessariamente chiusa.

c) Ogni oggetto r di A è comonoide tale che la struttura monoidale indotta su $A(r, -)$ sia forte.*

Infine, ricordando che l'unità $\bar{Z}$ di una categoria monoidale A assume struttura «canonica» di comonoide (δ, e) ove $\delta = \bar{\lambda}^{-1} = (\bar{\rho}^{-1})$ ed $e = 1$, assegnamo la seguente proposizione che fornisce un'ulteriore legame fra 4.4 e 4.4*:

Proposizione 1.8.: *Nelle ipotesi di* 4.4 *il funtore $A(\bar{Z}, -)\colon A \to V$ induce su $\bar{Z}$ la struttura canonica di comonoide. Viceversa, se nelle ipotesi di* 4.4*, *$\bar{Z}$ viene dotato di struttura canonica di comonoide, allora il morfismo $e\colon A(a, \bar{Z}) \to Z$ è un isomorfismo per ogni a di A e le strutture monoidali su A e sui funtori rappresentabili costruite mediante* 4.4 *e* 4.4* *coincidono.*

DIM.: È agevole intanto constatare che, nelle ipotesi di 4.4, $e^{-1}\colon Z \to A(\bar{Z}, \bar{Z})$ coincide con $j_{\bar{Z}}$.

Inoltre, il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddrr, "j_{\bar{Z}}"] \arrow[dddrrr, "\bar{\lambda}^{-1}"'] & Z \otimes Z \arrow[rr, "j_{\bar{Z}} \otimes j_{\bar{Z}}"] \arrow[dr, "1 \otimes j_{\bar{Z}}"] & & A(\bar{Z},\bar{Z}) \otimes A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[dl, "\Phi_0^{-1} \otimes 1"] \arrow[ddd, "\Phi"] \\
 & & Z \otimes A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[d, "\lambda"] & \\
 & & A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[dr, "A(1,\bar{\lambda}^{-1})"] & \\
 & & & A(\bar{Z}, \bar{Z} \mathbin{\bar{\otimes}} \bar{Z})
\end{tikzcd}$$

commuta per definizione di $\bar{\lambda}^{-1}$ (cfr. [7] § 2, def. 2.2) e per l'osservazione precedentemente fatta; onde, ricordando la costruzione della struttura indotta su $\bar{Z}$ (cfr. [7] § 1 n. 2), si conclude che essa è canonica.

Viceversa, l'isomorfismo $\Phi_0\colon Z = \mathcal{J}(e(\bar{Z}), *) \to A(\bar{Z}, \bar{J}^{Z}(*)) = A(\bar{Z}, \bar{Z})$

deve coincidere con $j_{\bar{Z}}$, onde, ricordando la definizione di counità ε di una V-aggiunzione, ne consegue che $\varepsilon\colon e j^{\bar{Z}}(*) \to *$ coincide con $1\colon * \to *$. Ben note proprietà della V-aggiunzione (cfr. per es. [7] § 2, n. 1) portano allora a concludere che $e\colon A(a, \bar{Z}) \to Z$ coincide con Φ_0^{-1}, per ogni a di A. Pertanto, e risulta essere un isomorfismo per ogni a di A, ed inoltre le costruzioni delle strutture monoidali in esame effettuate in 4.4 e 4.4*, coincidono.

2. Inversione del teorema 4.4*. In questo numero giungeremo all'inversione del teorema 4.4*. (Cfr. n. 1).

Sia $(A, \bar{\otimes}, \bar{Z}, \bar{a}, \bar{\rho}, \bar{\lambda})$ una V-categoria V-monoidale, con V monoidale e simmetrica; supponiamo inoltre che ogni r di A sia un comonoide $(r, \bar{\delta}_r, \bar{e}_r)$ tale che la struttura monoidale (Φ_r, Φ_{0r}) indotta su $A(r, -)$ sia forte (cioè Φ_r e Φ_{0r} siano isomorfismi in V).

Proposizione 2.1.: *Sia $\delta\colon A \to A \otimes A$ definito da:*

1) $a \xrightarrow{\delta} (a, a)$ *per ogni a di A*

2)

$$
\begin{tikzcd}
A(a,b) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "A(1,\bar{\delta}_b)"'] & A(a,b)\otimes A(a,b)=(A\otimes A)((aa),(bb)) \\
A(a,b\bar{\otimes}b) \arrow[ur, "\Phi_a^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Allora δ è un V-funtore (3).

Dim.: Si tratta di verificare la commutatività dei diagrammi $VF\,1'$ e $VF\,2'$ (cfr. [4] pag. 497).

$VF\,1'$ risulta essere:

(3) Converremo d'ora in poi, per semplicità di scrittura, di omettere gli indici in $\bar{\delta}_r, \bar{e}_r, \Phi_r, \Phi_{0r}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "\zeta"] & Z\otimes Z \arrow[r, "j\otimes j"] & (A\otimes A)((aa),(aa)) \\
A(a,a) \arrow[r, "A(1,\zeta)"'] & A(a,a\bar{\otimes}a) \arrow[ur, "\Phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

La sua commutatività è immediata per [4] pag. 505, 8.10 e per l'osservazione 1.3 *b*) del n. 1.

La commutatività di *VF* 2′ segue dal diagramma della pagina seguente. In tale diagramma le regioni I e VIII commutano banalmente, la II per la definizione di δ, la V e VII per la naturalità di *M*, la IX e III per la definizione dell'isomorfismo Φ, la VI per [4] pag. 508 e la IV per il seguente diagramma 2.1.1 commutativo per definizione di δ e di struttura monoidale indotta.

$$\begin{tikzcd}
A(b,c) \arrow[rr, "\bar{\otimes}\delta"] \arrow[dr, "A(1,\zeta)"] \arrow[dd, "1"'] & & A(b\bar{\otimes}b,c\bar{\otimes}c) \arrow[dd, "A(\zeta,1)"] \\
& A(b,c\bar{\otimes}c) \arrow[r, "\Phi^{-1}"] \arrow[dr, "1"'] & A(b,c)\otimes A(b,c) \arrow[u, "\bar{\otimes}"'] \\
A(b,c) \arrow[rr, "A(1,\zeta)"'] & & A(b,c\bar{\otimes}c)
\end{tikzcd} \qquad (2.1.1)$$

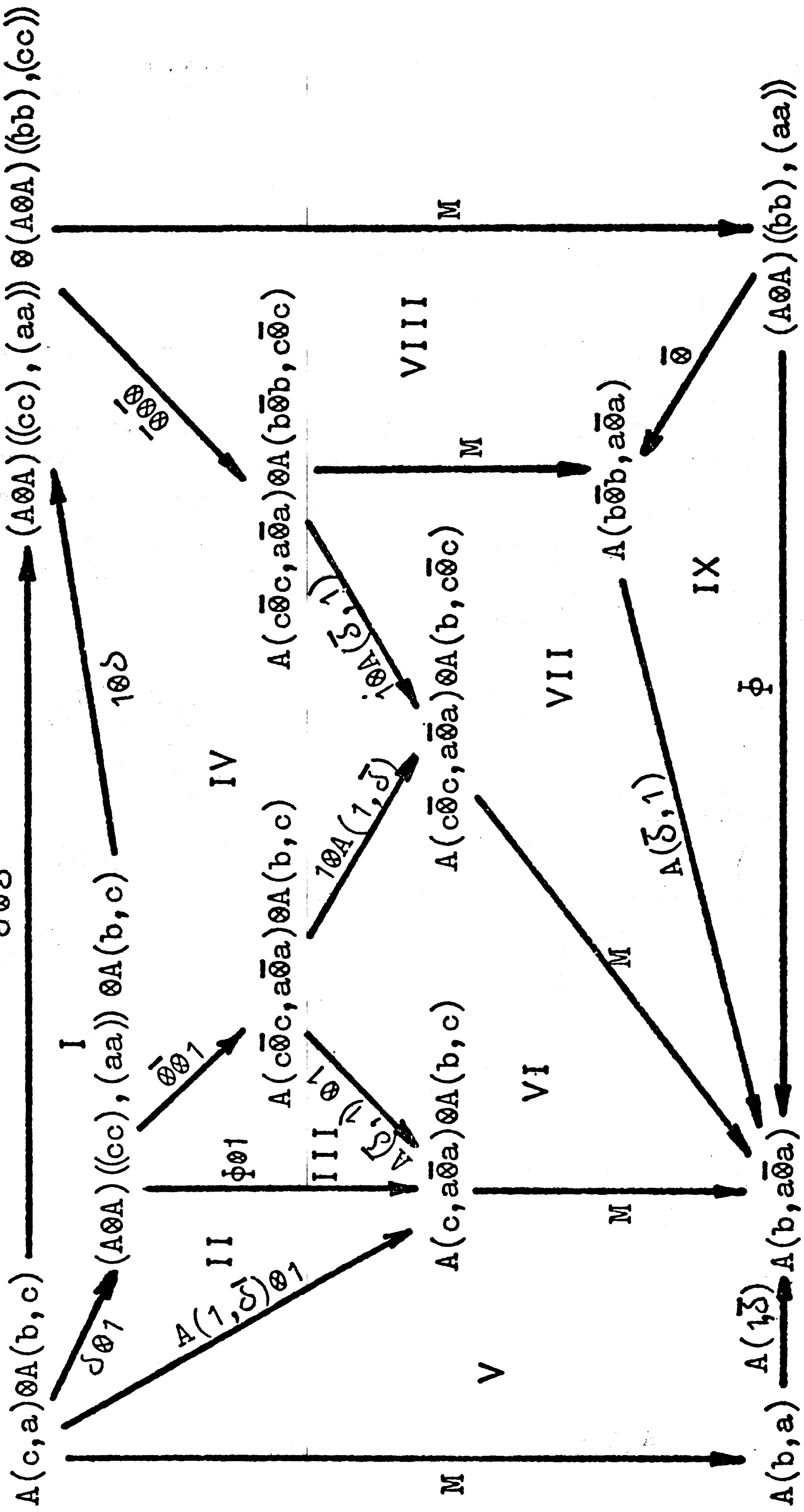
Proposizione 2.2.: *Sia e*: $A \to \mathcal{J}$ *definito da*:

1) $a \xrightarrow{e} *$ *per ogni a di A.*

2)

$$\begin{tikzcd}
A(a,b) \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "A(1,\Phi_0)"'] & & \mathcal{J}(*,*)=Z \\
& A(a,\bar{Z}) \arrow[ur, "\Phi_0^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Allora e risulta essere un V-funtore.


A(c,a)⊗A(b,c)
(A⊗A)((cc),(aa))⊗A(b,c)
(A⊗A)((cc),(aa))⊗(A⊗A)((bb),(cc))
(A⊗A)((bb),(aa))
A(c⊗̄c,a⊗̄a)⊗A(b,c)
A(c⊗̄c,a⊗̄a)⊗A(b⊗̄b,c⊗̄c)
A(c,a⊗̄a)⊗A(b,c)
A(c⊗̄c,a⊗̄a)⊗A(b,c⊗̄c)
A(b⊗̄b,a⊗̄a)
A(b,a)
A(b,a⊗̄a)
δ⊗δ
δ⊗1
1⊗δ
⊗̄⊗1
⊗̄⊗⊗̄
φ⊗1
A(1,δ̄)⊗1
1⊗A(1,δ̄)
1⊗A(δ̄,1)
A(δ̄,1)⊗1
A(δ̄,1)
A(1,δ̄)
⊗̄
φ
M
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX

DIM.:

VF 1′ segue immediatamente dalla definizione di *e*.

VF 2′ risulta dal seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
A(b,c)\otimes A(a,b) \arrow[r, "A(1,\Phi_o)\otimes 1"] \arrow[ddd, "M"] & A(b,\bar{Z})\otimes A(a,b) \arrow[rr, "\Phi_o^{-1}\otimes 1"] \arrow[ddd, "M"] & & Z\otimes A(a,b) \arrow[rr, "1\otimes e"] \arrow[dl, "j\otimes 1"] & & Z\otimes Z \arrow[dl, "j\otimes j"] \arrow[ddd, "\lambda"] \\
& & A(\bar{Z},\bar{Z})\otimes A(a,b) \arrow[ul, "A(\Phi_o,1)\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes A(1,\Phi_o)"] & & A(\bar{Z},\bar{Z})\otimes A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[d, "M"] \arrow[dll, "1\otimes A(\Phi_o,1)"] & \\
& & A(\bar{Z},\bar{Z})\otimes A(a,\bar{Z}) \arrow[dl, "M"] & & A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[dlll, "A(\Phi_o,1)"] & \\
A(a,c) \arrow[r, "A(1,\Phi_o)"] & A(a,\bar{Z}) \arrow[rrr, "\Phi_o^{-1}"] & & & Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[ul, "j"]
\end{tikzcd}
$$

La cui commutatività discende subito dal diagramma

$$
\begin{tikzcd}
A(a,b) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1"'] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\Phi_0"] & A(\bar{Z},\bar{Z}) \arrow[d, "A(\Phi_0,1)"] \\
A(a,b) \arrow[rr, "A(1,\Phi_0)"'] & & A(a,\bar{Z})
\end{tikzcd}
\tag{2.2.1}
$$

Proposizione 2.3: *L'isomorfismo* Φ: $(A \otimes A)$ $(\delta\,(a),\ (b,\ c)) \to$ $\to A\ (a,\ b\ \bar{\otimes}\ c)$ *è naturale in a ed in* $(b,\ c)$.

DIM.: Consideriamo il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes A)((aa),(bc)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\bar{\otimes}"] \arrow[ddd, "(A\otimes A)(\delta(f),1)"'] & & A(a,b\bar{\otimes}c) \arrow[ddd, "A(f,1)"] \\
& A(a\bar{\otimes}a,b\bar{\otimes}c) \arrow[u, phantom, "\mathrm{I}"] \arrow[ur, "A(\bar{\delta},1)"] \arrow[d, "A(\bar{\otimes}(\delta(f)),1)"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\mathrm{II}"] & A(a'\bar{\otimes}a',b\bar{\otimes}c) \arrow[dr, "A(\bar{\delta},1)"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{III}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{IV}"] & {} \\
(A\otimes A)((a'a'),(bc)) \arrow[ur, "\bar{\otimes}"] \arrow[rr, "\Phi"'] & & A(a',b\bar{\otimes}c)
\end{tikzcd}
$$

ove f: $a' \to a$ è un arbitrario morfismo in A.

I e IV commutano per definizione di Φ, II per la V-funtorialità di $\bar{\otimes}$; III osservando che, dal diagramma 2.1.1., $\bar{\delta}$ è una V-trasformazione naturale $\bar{\delta}$: $1 \to \bar{\otimes}\,\delta$ e quindi pure naturale per i funtori associati. Da ciò segue la naturalità di Φ rispetto ad a. Per quanto concerne la naturalità rispetto (b, c) essa segue in maniera analoga dal diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes A)(\delta(a),(bc)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\bar{\otimes}"] \arrow[ddd, "(A\otimes A)(1{,}f)"] & & A(a,b\bar{\otimes}c) \arrow[ddd, "A(1{,}\bar{\otimes}(f))"] \\
& A(a\bar{\otimes}a,b\bar{\otimes}c) \arrow[ur, "A(\bar{\delta}{,}1)"] \arrow[d, "A(1{,}\bar{\otimes}(f))"] & \\
& A(a\bar{\otimes}a,b'\bar{\otimes}c') \arrow[dr, "A(\bar{\delta}{,}1)"] & \\
(A\otimes A)(\delta(a),(b'c')) \arrow[rr, "\Phi"'] \arrow[ur, "\bar{\otimes}"] & & A(a,b'\bar{\otimes}c')
\end{tikzcd}
$$

Si consideri ora Φ_0 come isomorfismo: Φ_0: $\mathcal{J}\,(e\,(a), *)\to A\,(a, J^{\bar{Z}}(*))$ ove $J^{\bar{Z}}$: $\mathcal{J}\to A$ è l'unico V-funtore tale che $J^{\bar{Z}}(*)=\bar{Z}$ (cfr. [4]).

Proposizione 2.4: Φ_0: $\mathcal{J}\,(e\,(a), *)\to A\,(a, J^{\bar{Z}}(*))$ *è naturale in a ed in* $*$.

DIM.: Immediata, ragionando come in 2.3 e ricordando il diagramma 2.2.1.

Siamo ora in grado di provare il seguente:

Teorema 2.5: *Sia* $(A, \bar{\otimes}, \bar{Z}, \bar{a}, \bar{\rho}, \bar{\lambda})$ *una V-categoria V-monoidale con V monoidale e simmetrica; supponiamo inoltre che ogni r di A sia un comonoide* $(r, \bar{\delta}, \bar{e})$ *in A, tale che la struttura monoidale* (Φ, Φ_0) *indotta su A (r, —) sia forte. È possibile allora assegnare su A una struttura* (δ, e) *di comonoide in* $V_{\#}$, *tale che* δ *risulti V-aggiunto sinistro a* $\bar{\otimes}$, *ed e V-aggiunto sinistro a* $J^{\bar{Z}}$ (4).

DIM.: Siano δ: $A\to A\otimes A$, ed e: $A\to\mathcal{J}$ i V-funtori definiti nelle proposizioni 2.1, 2.2 rispettivamente; e risulta essere counità destra e sinistra:

(4) Nel senso di [5] Teor. 6 pag. 24; cfr. anche [7] § 2 n. 1.

$$\begin{tikzcd}
A(a,b) \arrow[d, "A(1,\delta)"'] \arrow[dr, "A(1,\bar{\rho}^{-1})"] \arrow[ddrr, "\rho^{-1}"] & & \\
A(a,b\bar{\otimes}b) \arrow[r, "A(1,1\bar{\otimes}\Phi_0)"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"'] & A(a,b\bar{\otimes}\bar{Z}) \arrow[d, "\Phi^{-1}"] & \\
A(a,b)\otimes A(a,b) \arrow[r, "1\otimes A(1,\Phi_0)"] & A(a,b)\otimes A(a,\bar{Z}) \arrow[r, "1\otimes\Phi_0^{-1}"] & A(a,b)\otimes Z
\end{tikzcd}$$

Infatti, il diagramma soprascritto commuta per la naturalità di Φ, per la monoidalità di $A\,(a,\,-)$ e poiché b è comonoide in A.

Con analoghe verifiche si prova il diagramma simmetrico e la coassociatività di δ.

Si deve ora dimostrare che Φ: $\delta \dashv \bar{\otimes}$ e Φ_0: $e \dashv J^{Z}$ risultano essere due V-aggiunzioni. Per le proposizioni 2.3 e 2.4 Φ e Φ_0 sono già V-aggiunzioni tra i funtori (ordinari) associati; resta quindi da verificare che le strutture di V-funtori indotte canonicamente da Φ su δ e $\bar{\otimes}$ e da Φ_0 su c e $J^{\bar{Z}}$, coincidono con quelle che essi già possedevano. (Cfr. [5] Teor. 5, pag. 24).

Relativamente a $\bar{\otimes}$ dovrà commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)((ab),(cd)) \arrow[rr, "\bar{\otimes}"] \arrow[dr, "(A\otimes A)(\varepsilon,1)"'] & & A(a\bar{\otimes}b,c\bar{\otimes}d) \\
& (A\otimes A)((a\bar{\otimes}b,a\bar{\otimes}b),(cd)) \arrow[ur, "\bar{\Phi}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

ove ε è la counità dell'aggiunzione Φ, definita da (cfr. [1] pag. 72):

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & A(a\bar{\otimes}b, a\bar{\otimes}b) \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
& (A\otimes A)(\bar{\delta}(a\bar{\otimes}b), (ab))
\end{tikzcd}$$

Qualora si ricordi che $\bar{\delta}$: $a \to a \bar{\otimes} a$ risulta essere l'unità dell'aggiunzione Φ (Cfr. Osservazione 1.3 *b*)) da ben note proprietà di un'aggiunzione ordinaria segue la commutatività di 2.5.1:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)((ab),(cd)) \arrow[r, "\bar{\otimes}"] \arrow[d, "(A\otimes A)(\varepsilon, 1)"] & A(a\bar{\otimes}b, c\bar{\otimes}d) \arrow[r, equal] \arrow[dr, "A(\bar{\otimes}(\varepsilon), 1)"] & & A(a\bar{\otimes}b, c\bar{\otimes}d) \\
(A\otimes A)((a\bar{\otimes}b, a\bar{\otimes}b),(cd)) \arrow[rr, "\bar{\otimes}"] & & A((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}(a\bar{\otimes}b), c\bar{\otimes}d) \arrow[ur, "A(\bar{\delta}, 1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Il caso di δ si riconduce banalmente alla sua stessa definizione. Infine per e ed $J^{\bar{Z}}$ possiamo ripetere considerazioni analoghe alle precedenti.

Ricordando ora il Teorema 4.4* ed il 2.5 si può concludere con il seguente:

Teorema 2.6: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una V-categoria A sia comonoide* (A, δ, e) *in* $V_\#$ *ed esistano V-aggiunti destri a* δ *ed e, è che A sia V-monoidale con ogni r di A comonoide in A e struttura monoidale indotta su* $A(r, -)$ *forte.*

Qualora V risulti oltre che monoidale e simmetrica anche *chiusa* il Teorema 2.6 si modifica nel modo seguente:

Teorema 2.7: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una V-categoria A sia comonoide* (A, δ, e) *in* $V_\#$ *ed esistano V-aggiunti destri a* δ *ed e, è che A sia V-monoidale ed ogni* $A(r, -)$ *sia fortemente V-monoidale.*

DIM.: La sufficienza si prova immediatamente ricordando la definizione 1.4, la proposizione 1.5, ed il teorema 2.5.

Per la necessità si ricordi il teorema 4.4* e la proposizione 3.1 di [6].

3. UN'APPLICAZIONE. Sia ora V *una categoria chiusa* (*cioè simmetrica, monoidale e chiusa*) *e bicompleta.*

Se A è una V-categoria piccola, comonoide nella categoria $V_{\#}$ è ben noto che la struttura di comonoide induce su A una struttura premonoidale P (cfr. [2] pagg. 32 e 33) Tale struttura premonoidale definisce allora una struttura V-monoidale e V-bichiusa sulla V-categoria $[A, V]$ dei V-funtori e delle trasformazioni V-naturali.

Osserviamo ora preliminarmente che:

Proposizione 3.1: *Il V-funtore valutazione* E^c: $[A, V] \rightarrow V$ *è fortemente V-monoidale per ogni c di A.*

DIM. [5]: Sia $\tilde{\psi}$: $E^c(S) \otimes E^c(T) \rightarrow E^c(S * T)$ il seguente morfismo (cfr. anche [2] pag. 35):

$$
\begin{tikzcd}
Sc \otimes Tc \arrow[r, "y^{-1} \otimes y^{-1}"] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"'] & (A(a,c) \underline{\otimes} Sa) \otimes (A(b,c) \underline{\otimes} Tb) \arrow[d, "\wr"] \\
 & Sa \underline{\otimes} (Tb \underline{\otimes} (A(a,c) \otimes A(b,c)) =
\end{tikzcd}
$$

$$= Sa \underline{\otimes} (Tb \underline{\otimes} P(a,b,c))$$

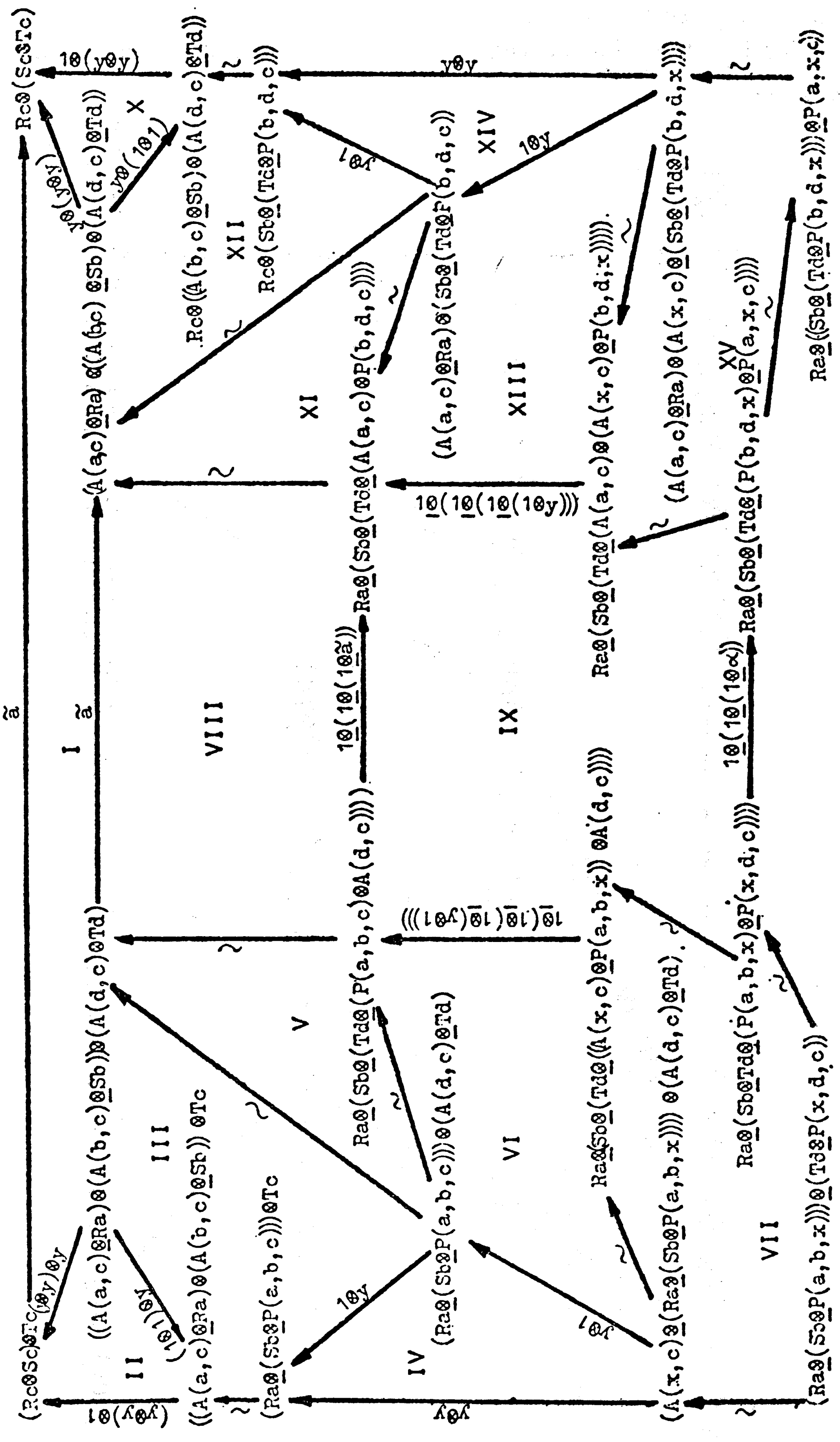
Usando i lemmi 2.5 e 2.6 di [2] pag. 9-12 e ricordando che A è piccola, si verifica agevolmente che $\tilde{\psi}$ è un isomorfismo V-naturale in S e T.

Si ponga inoltre, ψ_0: $Z \rightarrow E^c(J)$ uguale a 1_Z: $Z \rightarrow Z$.

Si tratta ora di verificare la validità di MF_1, MF_2, MF_3 di [4] pag. 473.

MF_3 risulta dalla considerazione del seguente diagramma

(5) Useremo le notazioni di [2] e [3]. Per le strutture monoidali useremo $\tilde{a}$ invece di a, Z invece di I in V ($\bar{a}$, $\bar{Z}$ in K).



ove commutano:
la regione I per la naturalità di a, le regioni II, IV. X, XIV, banalmente, le III e XII per la Ens-naturalità degli isomorfismi indotti, le VII, V, XI, XV per la coerenza degli isomorfismi indotti, la VIII per la coerenza in-

dotta, la IX per definizione di α.

Per la VI (e simmetricamente per la XIII) si consideri il seguente sviluppo:

$$\begin{tikzcd}
(Ra\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}P(a,b,c)))\otimes(A(d,c)\underline{\otimes}Td) \arrow[rrr, "\sim"] & & & Ra\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}(Td\underline{\otimes}(P(a,b,c)\otimes A(d,c)))) \\
& & (Ra\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}(A(x,c)\underline{\otimes}P(a,b,x))))\otimes(A(d,c)\underline{\otimes}Td) \arrow[ull, "(1\underline{\otimes}(1\underline{\otimes}y))\otimes(1\underline{\otimes}1)"'] \arrow[ddr, "\sim"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{III}"] & {} \\
{} & (Ra\underline{\otimes}(A(x,c)\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}P(a,b,x))))\otimes(A(d,c)\underline{\otimes}Td) \arrow[uul, "(1\underline{\otimes}y)\otimes 1"] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[l, phantom, "\mathrm{II}"] \arrow[uur, phantom, "\mathrm{I}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & {} & \\
(A(x,c)\underline{\otimes}(Ra\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}P(a,b,x))))\otimes(A(d,c)\underline{\otimes}Td) \arrow[uuu, "y\otimes 1"] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rrr, "\sim"] & & {} & Ra\underline{\otimes}(Sb\underline{\otimes}(Td\underline{\otimes}((A(x,c)\underline{\otimes}P(a,b,x))\otimes A(d,c)))) \arrow[uuu, "1\underline{\otimes}(1\underline{\otimes}(1\underline{\otimes}(y\otimes 1)))"']
\end{tikzcd}$$

ove le regioni III e IV commutano per la naturalità e la coerenza degli isomorfismi indotti, e le regioni I e II per una proprietà analoga alla 2.9 di [2] pag. 16.

Analogamente, per MF_2 avremo:

$$
\begin{tikzcd}
Sc\otimes Jc \arrow[ddddd, "r"'] & & (A(a,c)\underline{\otimes}Sa)\otimes(A(b,c)\underline{\otimes}Jb) \arrow[ll, "y\otimes y"'] \arrow[ddl, "1\otimes y"'] \arrow[ddddr, "\wr"] & \\
& & & (Sa\underline{\otimes}A(a,c))\otimes(Jb\underline{\otimes}A(b,c)) \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \\
& (A(a,c)\underline{\otimes}Sa)\otimes Jc \arrow[uul, "y\otimes 1"] \arrow[ddd, "r"] \arrow[dddrr, dash, "\sim"] & & Sa\underline{\otimes}(Jb\underline{\otimes}(A(a,c)\otimes A(b,c))) \arrow[d, "\wr"] \\
& & & (Jb\underline{\otimes}(A(a,c)\otimes A(b,c)))\underline{\otimes}Sa \arrow[d, "\wr"] \\
& & & (A(a,c)\otimes(A(b,c)\underline{\otimes}Jb))\underline{\otimes}Sa \arrow[d, "(1\otimes y)\underline{\otimes}1"] \\
Sc & A(a,c)\underline{\otimes}Sa \arrow[l, "y"'] & & (A(a,c)\otimes Jc)\underline{\otimes}Sa \arrow[ll, "r\underline{\otimes}1"']
\end{tikzcd}
$$

MF_1 si prova con le medesime considerazioni. Sorge spontaneo a questo punto chiedersi se la condizione 3.1 è anche sufficiente per assicurare che una struttura premonoidale P su A sia indotta da una struttura di comonoide.

In tale direzione, poggiando sui risultati ottenuti, proveremo la seguente :

Proposizione 3.2: *Siano A una V-categoria V-monoidale e P' la struttura premonoidale ad essa associata. Si supponga inoltre che gli E^c: $[A, V] \to V$ siano fortemente V-monoidali per ogni c di A. È possibile allora assegnare una struttura di comonoide (A, δ, e) su A, in modo che la struttura premonoidale da questa indotta coincida (a meno di « isomorfismi » [6]) con P'.*

[6] Cfr. [2], introduzione.

DIM.: Osserviamo in primo luogo, che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A^{opp.} \arrow[rr, "A^{opp.}(r,-)"] \arrow[dr, "Y"'] & & V \\ & {[A,V]} \arrow[ur, "E^r"'] & \end{tikzcd}$$

è commutativo, ove Y è l'immersione di Yoneda (cfr. [3] pag. 186).

Infatti, a norma della 5.1 di [3] pag. 185 è possibile considerare E^r come $[A, V]\ (A\ (r, -), -)$. Essendo ora A^{opp} una sottocategoria piena di $[A, V]$ con immersione Y, risulta $[A, V]\ (A\ (r, -), -)\ Y = A^{opp}\ (r, -)$ avendosi $Y\ (r) = A\ (r, -)$.

Considerando ora la struttura V-monoidale su $[A, V]$ determinata da P' e quella ovvia su A^{opp}, si può provare che Y è fortemente V-monoidale; dalla supposta V-monoidalità forte di E^r segue, allora, che $A^{opp}\ (r, -)$ è pure fortemente V-monoidale per ogni r di A.

A norma del teorema 2.7 è possibile assegnare su A^{opp} una struttura $\mathbf{A}^{opp} = (A^{opp}, \delta^{opp}, e^{opp})$ di comonoide in $V_{\#}$, tale che δ^{opp} sia V-aggiunto sinistro ad $\otimes^{opp}$ ed e^{opp} V-aggiunto sinistro a J^z (essendo Φ e Φ_0 le rispettive aggiunzioni).

Pertanto A stessa risulta dotata di struttura $\mathbf{A} = (A, \delta, e)$ di comonoide con $\overline{\otimes} \dashv \delta$ ed $J^z \dashv e$.

Si tratta ora di verificare che le strutture premonoidali $P'\ (A, P', J', \lambda', \rho', \alpha')$ e $P\ (A, P, J, \lambda, \rho, \alpha)$ determinate rispettivamente dalla struttura V-monoidale e da quella di comonoide « coincidono ».

I due V-funtori $P\ (a, b, c)$: $A^{opp} \otimes A^{opp} \otimes A \to V$ e $P'\ (a, b, c)$: $A^{opp} \otimes A^{opp} \otimes A \to V$ delle sopraddette strutture risultano essere V-naturalmente equivalenti in virtù di Φ. Analogamente J: $A \to V$ e J': $A \to V$ sono V-naturalmente equivalenti mediante la Φ_0. Infine occorre ancora verificare che i seguenti diagrammi commutano.

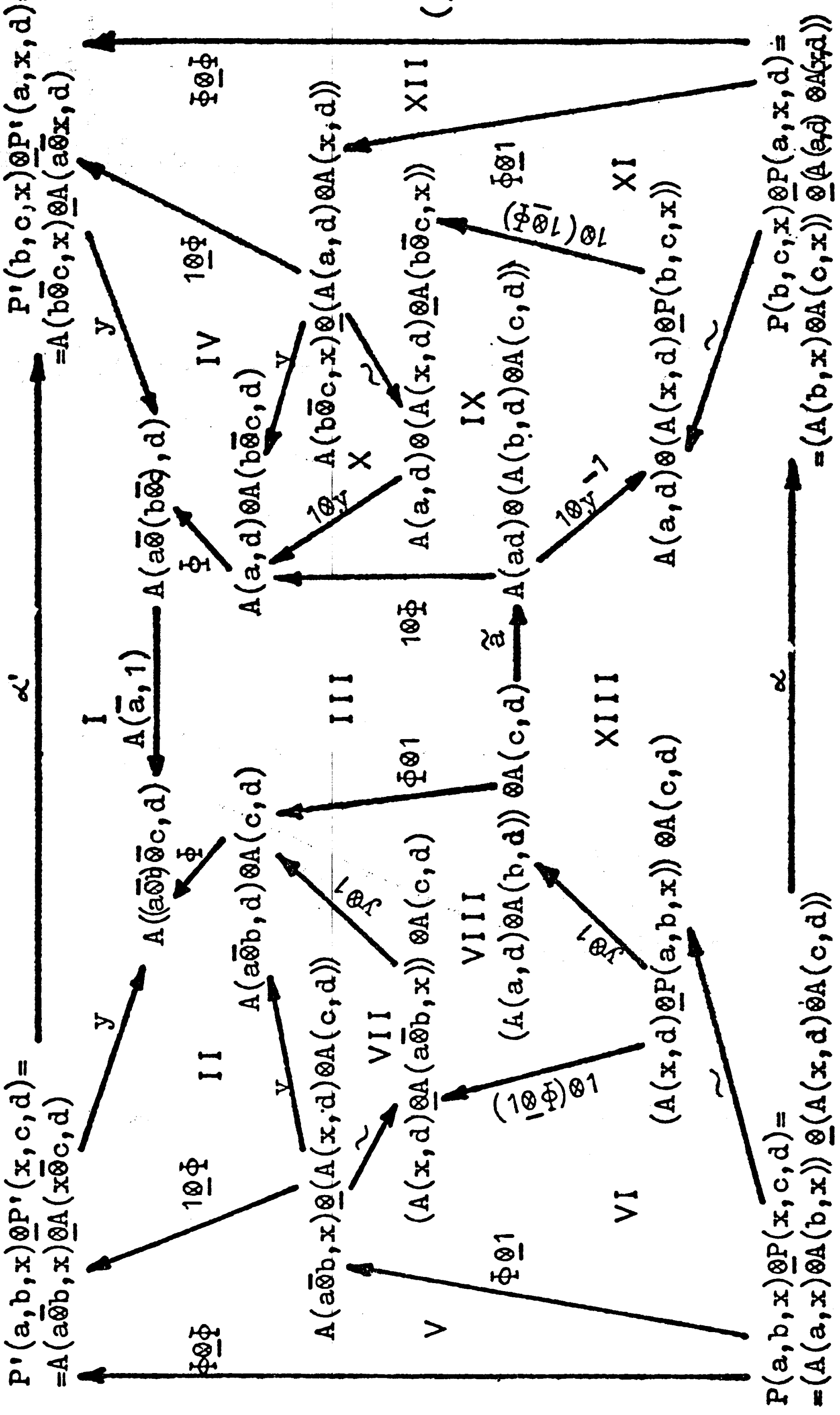
$$
\begin{tikzcd}
P(a,b,x)\underline{\otimes}P(x,c,d) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Phi\underline{\otimes}\Phi"'] & P(b,c,x)\underline{\otimes}P(a,x,d) \arrow[d, "\Phi\underline{\otimes}\Phi"] \\
P'(a,b,x)\underline{\otimes}P'(x,c,d) \arrow[r, "\alpha'"] & P'(b,c,x)\underline{\otimes}P'(a,x,d)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Jx\underline{\otimes}P(x,a,b) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\Phi_o\underline{\otimes}\Phi"] & A(a,b) \\
J'x\underline{\otimes}P'(x,a,b) \arrow[ur, "\lambda'"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Jx\underline{\otimes}P(a,x,b) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Phi_o\underline{\otimes}\Phi"] & A(a,b) \\
J'x\underline{\otimes}P'(a,x,b) \arrow[ur, "\rho'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ci limitiamo ai primi due, essendo il terzo analogo al secondo.

(1)



La regione I commuta per definizione di α', le II, IV, VIII e IX per la naturalità di y, la III per la monoidalità di $A(-,d)$, le V e XII banalmente, le VI e XI per la naturalità degli isomorfismi indotti.

Per le regioni VII e X si adoperano tecniche analoghe alle 2.8 e 2.9 di [2] pag. 14-16.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} J'x \underline{\otimes} P'(x,a,b) = \\ = A(\bar{Z},x) \underline{\otimes} A(x \bar{\otimes} a,b) \end{array} \arrow[rr, "y"] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{II}"] & A(\bar{Z} \bar{\otimes} a,b) \arrow[rr, "A(\bar{I}^{-1},1)"] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{III}"] & A(a,b) \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{I}"] & A(\bar{Z},x) \underline{\otimes} (A(x,b) \otimes A(a,b)) \arrow[ul, "1 \underline{\otimes} \Phi"'] \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\sim"] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{V}"] & A(\bar{Z},b) \otimes A(a,b) \arrow[ul, "\Phi"'] & \\
& \arrow[d, phantom, "\mathrm{IV}"] & (A(x,b) \underline{\otimes} A(\bar{Z},x)) \otimes A(a,b) \arrow[ur, "y \otimes 1"'] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{VI}"] & \\
\begin{array}{l} Jx \underline{\otimes} P(x,a,b) = \\ = Z \underline{\otimes} (A(x,b) \otimes A(a,b)) \end{array} \arrow[uuu, "\Phi_0 \underline{\otimes} \Phi"] \arrow[uur, "\Phi_0 \underline{\otimes} 1"'] \arrow[rr, "\sim"'] & & (A(x,b) \underline{\otimes} Jx) \otimes A(a,b) \arrow[u, "(1 \underline{\otimes} \Phi_0) \otimes 1"'] \arrow[rr, "y \otimes 1"'] & & Z \otimes A(a,b) \arrow[uuu, "1"'] \arrow[uul, "\Phi_0' \otimes 1"]
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

La regione I commuta banalmente, II e VI essendo y un isomorfismo naturale, III per la monoidalità di $A(-,b)$, IV per la naturalità degli isomorfismi indotti, V per motivi analoghi a VII e X del diagramma 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUNGE M. C., *Relative functor categories and categories of algebras.* Journal of Algebra 11, 64-101 (1969).

[2] DAY B., *On closed categories of functors.* Reports of the Midwest category seminar IV (Springer Lecture Notes in Mathematics) Vol. 137, 1-38 (1970).

[3] DAY B. and KELLY M. G., *Enriched functor categories.* Reports of the Midwest category seminar III (Springer Lecture Notes in Mathematics) Vol. 106, 178-191 (1969).

[4] EILENBERG S. and KELLY M. G., *Closed categories.* Proceeding Conf. on Categorical Algebra (Springer) 421-562 (1966).

[5] KELLY M. G., *Tensor products in categories.* Journal of Algebra 2, 15-37 (1965).

[6] KELLY M. G., *Adjunction for enriched categories.* Reports of the Midwest category seminar III (Springer Lecture Notes in Mathematics) Vol. 106, 166-167 (1969).

[7] PEDICCHIO M. C. e ROSSI F., *V-monoidalità, V-aggiunzioni e funtori monoidali.* Presente volume.