SU UN DETERMINANTE COLLEGATO AD UN SISTEMA DI POLINOMI ORTOGONALI (*)

di SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Detto* $\{P_n(x)\}_N$ *un sistema di polinomi ortogonali sull'intervallo* $[-1,1]$ *rispetto ad un peso* $w(x)$ *tale che* $w(-x) = w(x)$, *si considera il determinante* $D_s(x)$, *di ordine* $2s+1$, *avente per elementi della prima riga i polinomi* $P_2(x), P_4(x), \dots, P_{4s+2}(x)$ *e per elementi della riga k-esima* $(k = 2, 3, \dots, 2s+1)$ *le loro derivate di ordine* $k-1$.

Si dimostrano alcune proprietà caratteristiche di $D_s(x)$ *e, quando sia* $w(x) = 1$, *si stabilisce una proprietà asintotica dei suoi zeri reali.*

SUMMARY. - *Let* $\{P_n(x)\}_N$ *be a system of orthogonal polynomials on the interval* $[-1,1]$ *with regard to a weight-function* $w(x)$, *such that* $w(-x) = w(x)$ *and* $D_s(x)$ *the determinant, of the order* $2s+1$, *having for elements of the first line the polynomials* $P_2(x)$, $P_4(x), \dots, P_{4s+2}(x)$ *and for elements of the* k^{th} *line* $(k = 2, 3, \dots, 2s+1)$ *their derivatives of the order* $k-1$.

Some characteristic properties of $D_s(x)$ *are shown and when* $w(x) = 1$ *an asymptotic property of its real zeros is established.*

0.1 Detto

$$\{P_n(x)\}_N \left(\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = n!\right) \tag{1}$$

il sistema dei polinomi ortogonali sull'intervallo $[-1,1]$ rispetto ad un peso $w(x)$ tale che

$$w(-x) = w(x), \tag{2}$$

consideriamo il determinante

(*) Pervenuto in Redazione il 27 febbraio 1978.

(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale - 57100 Livorno.

$$(3)\qquad D_s(x)=\begin{vmatrix} P_2(x) & P_4(x) & \dots & P_{4s+2}(x) \\ P_2'(x) & P_4'(x) & \dots & P'_{4s+2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2^{(2s)}(x) & P_4^{(2s)}(x) & \dots & P^{(2s)}_{4s+2}(x) \end{vmatrix} \text{ (1)}$$

di ordine $2s+1$, essendo s un intero non negativo comunque fissato.

Nei riguardi di $D_s(x)$, che risulta essere un polinomio in x di ordine $(s+2)(2s+1)$ (2), dimostreremo, nella prima parte della presente nota, le seguenti proprietà:

1) $D_s(x)$ ammette la radice 0 con molteplicità $s(2s+1)$;

2) $D_s(x)$ ammette $2(2s+1)$ radici semplici, due a due opposte, delle quali due e solo due reali, interne all'intervallo $[-1,1]$;

3) per $D_s(x)$ vale la seguente rappresentazione integrale

$$D_s(x)=\prod_{k=0}^{2s}(2k)!!\,\frac{1}{\int_0^1 w(t)\,dt}\cdot x^{s(2s+1)}\int_0^1 w(t)\,(x^2-t^2)^{2s+1}\,dt \text{ (3)};$$

4) per $D_s(x)$ risulta:

$$\int_c^1 w(x)\,\frac{D_s(x)}{x^{s(2s+1)}}\,dx=0.$$

Nella seconda parte dimostreremo, infine, che:

5) $w(x)=1 \Rightarrow \lim_{s\to+\infty} x_s^2=\frac{1}{2}$,

essendo x_s il valore assoluto delle due radici reali del polinomio $D_s(x)$.

(1) $P_{2k}^{(h)}(x)=\frac{d^h P_{2k}(x)}{dx^h}$

(2) Si osservi che i termini principali del determinante (3) hanno, ordinatamente, gli ordini $2, 3, 4, \dots, 2s+2$.

(3) $0!!=1$.

1.1. Supponendo per il seguito s positivo ([4]), dimostriamo la 1). Che 0 sia radice di $D_s(x)$ è ovvio. In virtù della (2) è, infatti,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad ({}^5)$$

e, pertanto, le derivate di ordine dispari dei termini del determinante (3) si annullano tutte per $x=0$.

Poiché, come facilmente si osserva, la derivata di ordine minimo di $D_s(x)$ che annoveri tra i suoi addendi un determinante (non identicamente nullo):

$$A_s(x) = \begin{vmatrix} P_2(x) & P_4(x) & \dots & P_{4s+2}(x) \\ P_2''(x) & P_4''(x) & \dots & P''_{4s+2}(x) \\ P_2^{\mathrm{IV}}(x) & P_4^{\mathrm{IV}}(x) & \dots & P^{\mathrm{IV}}_{4s+2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2^{(4s)}(x) & P_4^{(4s)}(x) & \dots & P^{(4s)}_{4s+2}(x) \end{vmatrix},$$

che non contenga derivate di ordine dispari è quella di ordine

$$1+2+3+\dots+2s = s(2s+1)$$

e poiché, a meno di un fattore costante positivo, risulta

$$\left[\frac{d^{s(2s+1)} D_s(x)}{dx^{s(2s+1)}}\right]_{x=0} = A_s(0),$$

basterà, allora, verificare che è $A_s(0) \neq 0$.

Tre qualsivoglia termini consecutivi del sistema (1) soddisfano una relazione ricorrente del tipo

$$P_{n+1}(x) = x P_n(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}(x) \quad (P_0 = 1),$$

con α_{n+1} reale positivo, dalla quale, derivando ambo i membri r volte di seguito, segue

$$P^{(r)}_{n+1}(x) = x P_n^{(r)}(x) + r P_n^{(r-1)}(x) - \alpha_{n+1} P^{(r)}_{n-1}(x).$$

([4]) Per $s = 0, 1), 2), 3)$ e 4) esprimono note proprietà del polinomio $(D_0(x) =) P_2(x)$.

([5]) Per questa e per altre proprietà del sistema (1) cfr., ad esempio, [1].

Risulta, pertanto,

$$P_{n+1}(0) = -\alpha_{n+1} P_{n-1}(0)$$

e, $\forall r \in N$,

$$P^{(r)}{}_{n+1}(0) = r P_n^{(r-1)}(0) - \alpha_{n+1} P^{(r)}{}_{n-1}(0) \qquad (P_n^{(0)}(0) = P_n(0)).$$

Sostituendo, ordinatamente, ai termini dell'ultima, penultima, ..., seconda colonna di $A_s(0)$ le loro espressioni fornite dai secondi membri delle uguaglianze ultime scritte, in virtù della regola che fornisce lo sviluppo di un determinante ad elementi polinomiali, riesce

$$A_s(0) = \begin{vmatrix} P_2(0) & 0 & \dots & 0 \\ P_2''(0) & 2P_3'(0) & \dots & 2P'_{4s+1}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2^{(4s)}(0) & 4s\, P_3^{(4s-1)}(0) & & 4s\, P_{4s+1}^{(4s-1)}(0) \end{vmatrix} =$$

$$= (4s)!!\, P_2(0) \begin{vmatrix} P_3'(0) & \dots & P'_{4s+1}(0) \\ P_3'''(0) & \dots & P'''_{4s+1}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3^{(4s-1)}(0) & & P_{4s+1}^{(4s-1)}(0) \end{vmatrix}$$

e per il determinante

$$B_s(0) = \begin{vmatrix} P_3'(0) & \dots & P'_{4s+1}(0) \\ P_3'''(0) & \dots & P'''_{4s+1}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3^{(4s-1)}(0) & \dots & P_{4s+1}^{(4s-1)}(0) \end{vmatrix},$$

sempre tenendo conto delle medesime uguaglianze e della solita regola valida per i determinanti ad elementi polinomiali, risulta

$$B_s(0) = \begin{vmatrix} P_3'(0) & P_4(0) & \dots & P_{4s}(0) \\ P_3'''(0) & 3P_4''(0) & \dots & 3P_{4s}''(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3^{(4s-1)}(0) & (4s-1)P_4^{(4s-2)}(0) & \dots & (4s-1)P_{4s}^{(4s-2)}(0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} P_3'(0) & P_4(0) & \dots & P_{4s}(0) \\ 3P_2''(0) & 3P_4''(0) & \dots & 3P_{4s}''(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (4s-1)P_2^{(4s-2)}(0) & (4s-1)P_4^{(4s-2)}(0) & \dots & (4s-1)P_{4s}^{(4s-2)}(0) \end{vmatrix} =$$

$$= (4s-1)!! \begin{vmatrix} P_3'(0) & P_4(0) & \dots & P_{4s}(0) \\ P_2''(0) & P_4''(0) & \dots & P_{4s}''(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2^{(4s-2)}(0) & P_4^{(4s-2)}(0) & \dots & P_{4s}^{(4s-2)} \end{vmatrix} =$$

$$= (4s-1)!! \begin{vmatrix} P_3'(0) & 0 & \dots & 0 \\ P_2''(0) & 2P_3'(0) & \dots & 2P'_{4s-1}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2^{(4s-2)}(0) & (4s-2)P_3^{(4s-3)}(0) & \dots & (4s-2)P_{4s-1}^{(4s-3)}(0) \end{vmatrix} =$$

$$= (4s-1)!!\,(4s-2)!!\,P_3'(0) \cdot \begin{vmatrix} P_3'(0) & \dots & P'_{4s-1}(0) \\ P_3'''(0) & \dots & P'''_{4s-1}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3^{(4s-3)}(0) & \dots & P_{4s-1}^{(4s-3)}(0) \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= (4s-1)!!\,(4s-2)!!\,P_3'(0)\,(4s-3)!!(4s-4)!!\,P_3'(0) \cdot \begin{vmatrix} P_3'(0) & \dots & P'_{4s-3}(0) \\ P_3'''(0) & \dots & P'''_{4s-3}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3^{(4s-5)}(0) & \dots & P_{4s-3}^{(4s-5)}(0) \end{vmatrix},$$

cioè

$$B_s(0)=(4s-1)!!\,(4s-2)!!\,(4s-3)!!\,(4s-4)!!\,[P_3'(0)]^2\cdot B_{s-1}(0).$$

Essendo, come subito si controlla,

$$B_1(0)=6\,[(\alpha_2+\alpha_3)^2+\alpha_3\,\alpha_4]>0$$

e $P_3'(0)\neq 0$, ne segue $B_s(0)>0$, $\forall s$ e quindi, per essere $P_2(0)=-\alpha_2<0$, $A_s(0)\neq 0$, $\forall s$ [6].

1.2. Dimostriamo la 2).

Esistono $2s+1$ costanti

$$a_r^2\ (r=1,2,\dots,2s+1),$$

con $a_r\neq 0$, $\forall r$, tutte tra loro distinte, per ciascuna delle quali, posto

$$Q_r(x)=x^2-a_r^2$$

risulta

$$\int_0^1 w(x)\,Q_r^{2s+1}(x)\,dx=0\ \text{[7]}.$$

Dei polinomi $Q_r(x)$ uno ed uno solo è, poi, a coefficienti reali e le sue radici sono (opposte e) interne all'intervallo $[-1,1]$ [8].

(6) È, anzi, $A_s(0)<0$, $\forall s$ e, pertanto, $x=0$ è, inoltre, per $D_s(x)$, un punto di flesso o un punto di massimo relativo secondoché l'intero s è pari o dispari.

(7) Si osservi che

$$a_r=0\Rightarrow\int_0^1 w(x)\,Q_r^{2s+1}(x)\,dx>0,$$

che l'equazione

$$f(a)=\int_0^1 w(x)\,(x^2-a^2)^{2s+1}\,dx=0$$

è, in a^2, di grado $2s+1$ e che, essendo $f'(a)\neq 0$ per $a\neq 0$, le sue radici sono tutte semplici.

Per ogni fissato r esistono, inoltre, $2s+1$ costanti

$$c_2^{(r)}, c_4^{(r)}, \dots, c_{4s}^{(r)}, c^{(r)}_{4s+2}=1,$$

univocamente determinate, per le quali risulta

$$Q_r^{2s+1}(x)=\sum_{k=1}^{2s+1} c_{2k}^{(r)} P_{2k}(x) \quad (^9).$$

Osservato ciò basterà, allora, verificare che

$$D_s(\pm a_r)=0, \quad \forall r.$$

Ma ciò è conseguenza immediata del fatto che, per $x=\pm a_r$, il sistema

$$\sum_{k=1}^{2s+1} c_{2k} \frac{d^h P_{2k}(x)}{dx^h}=0 \quad (h=0, 1, \dots, 2s),$$

lineare omogeneo di $2s+1$ equazioni nelle $2s+1$ indeterminate c_{2k}, il cui determinante coincide con il determinante (3), possiede la soluzione propria

$$c_{2k}=c_{2k}^{(r)} \quad (k=1, 2, \dots, 2s+1).$$

1.3. Dimostriamo la 3).

In virtù di quanto dimostrato nei n^i 1.1 e 1.2, detto α_s il coefficiente di $x^{(s+2)(2s+1)}$ in $D_s(x)$, riesce

$$D_s(x)=\alpha_s x^{s(2s+1)} \cdot Q_1(x) \cdot Q_2(x) \dots Q_{2s+1}(x).$$

(8) È il polinomio di ordine 2, s-autoassociato su $[-1, 1]$ rispetto al peso $w(x)$ (cfr. [2] e [3]).

(9) Poiché $\{P_n(x)\}_N$ è un sistema, riesce, infatti,

$$Q_r^{2s+1}(x) = \sum_{n=0}^{2(2s+1)} c_n^{(r)} P_n(x)$$

con

$$c_n^{(r)} = \frac{(Q_r^{2s+1}, P_n)}{(P_n, P_n)}$$

($(.,.)$ indica il prodotto scalare in $L_{2,w}[-1, 1]$) ed è, ovviamente, $(Q_r^{2s+1}, P_n) = 0$, per $n = 0$ e per n dispari.

Basterà, allora, osservare che risulta

$$\alpha_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 4 & \dots & 2s & \dots & 4s+2 \\ 2.1 & 4.3 & \dots & 2s\,(2s-1) & \dots & (4s+2)\,(4s+1) \\ 0 & 4.3.2 & \dots & 2s\,(2s-1)\,(2s-2) & \dots & (4s+2)\,(4s+1)\,(4s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (2s)! & \dots & (4s+2)\,(4s+1)\dots(2s+3) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{2s} (2k)!! \quad (^{10})$$

e che le due equazioni

$$Q_1(x)\cdot Q_2(x)\dots Q_{2s+1}(x)=0, \quad \frac{1}{\int_0^1 w(t)\,dt}\int_0^1 w(t)\,(x^2-t^2)^{2s+1}\,dt=0,$$

entrambe di ordine $2(2s+1)$ e col coefficiente di $x^{2(2s+1)}$ uguale ad 1, sono equivalenti.

1.4. Dimostriamo la 4).

Posto

$$\int_0^1 w(t)\,t^r\,dt=\lambda_r \qquad (r=0,1,2,\dots),$$

riesce

$$\int_0^1 w(t)\,(x^2-t^2)^{2s+1}\,dt=\sum_{r=0}^{2s+1}\binom{2s+1}{r}(-1)^r\,\lambda_{2r}\,x^{2(2s+1-r)}.$$

(10) Sostituendo ad ogni colonna, che non sia la prima, la differenza tra la colonna medesima e la colonna che immediatamente la precede e così successivamente operando, α_s si muta, infatti, in un determinante di tipo triangolare inferiore ad elementi principali

$$0\,!!, 2\,!!, 4\,!!, \dots, (4s)\,!!\,.$$

Risulta, allora,

$$\int_0^1 w(x)\frac{D_s(x)}{x^{s(2s+1)}}dx = \prod_{k=0}^{2s}(2k)!!\,\frac{1}{\int_0^1 w(t)\,dt}\cdot$$

$$\cdot\sum_{r=0}^{2s+1}\binom{2s+1}{r}(-1)^r\lambda_{2r}\int_0^1 w(x)\,x^{2(2s+1-r)}\,dx=$$

$$=\prod_{k=0}^{2s}(2k)!!\,\frac{1}{\int_0^1 w(t)\,dt}\cdot\sum_{r=0}^{2s+1}\binom{2s+1}{r}(-1)^r\lambda_{2r}\,\lambda_{2(2s+1-r)}=$$

$$=\prod_{k=0}^{2s}(2k)!!\,\frac{1}{\int_0^1 w(t)\,dt}\cdot\sum_{r=0}^{s}\binom{2s+1}{r}(-1)^r(\lambda_{2r}\,\lambda_{2(2s+1-r)}-$$

$$-\lambda_{2(2s+1-r)}\,\lambda_{2r})=0.$$

2.1. Alla dimostrazione della 5) (n^0 2.4), argomento di questa seconda parte della nota, conviene premettere le considerazioni seguenti.

Posto

$$I_p(u)=\int_0^1 (u-t^2)^p\,dt,\quad p\in\mathbf{N}, \tag{4}$$

integrando per parti, riesce

$$I_p(u)=(-1)^p(1-u)^p+2p\int_0^1 (u-t^2)^{p-1}\,t^2\,dt=$$

$$=(-1)^p(1-u)^p+2p\int_0^1 (u-t^2)^{p-1}\,[u-(u-t^2)]\,dt=$$

$$=(-1)^p(1-u)^p+2pu\,I_{p-1}(u)-2p\,I_p(u)$$

e quindi

$$(5) \qquad I_p(u) = \frac{2pu\, I_{p-1}(u) + (-1)^p (1-u)^p}{2p+1} \quad (I_0 = 1).$$

Da questa, per $p > 1$, sostituendo a $I_{p-1}(u)$ la sua espressione fornita dalla (5) medesima quando in essa si sostituisca p con $p-1$, segue:

$$(6) \qquad I_p(u) =$$

$$= \frac{4p(p-1)\, u^2 I_{p-2}(u) + (-1)^{p-1} [(4p-1)\, u - (2p-1)]\, (1-u)^{p-1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

In virtù della (5), risulta

$$I_p(u) < 0 \Leftrightarrow 2pu\, I_{p-1}(u) + (-1)^p (1-u)^p < 0$$

ed esprimendo successivamente, sempre attraverso la (5), $I_{p-1}(u)$ mediante $I_{p-2}(u)$, $I_{p-2}(u)$ mediante $I_{p-3}(u), \ldots, I_1(u)$ mediante I_0, la soprascritta equivalenza si traduce nella:

$$I_p(u) < 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (1-u)^k u^{p-k} < 0 \quad (^{11}),$$

dalla quale, per $u \in]0, \frac{1}{2}]$ [12], posto

$$(7) \qquad \frac{1-u}{u} = y$$

e

$$(8) \qquad \mathcal{S}_p(y) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} y^k,$$

segue

$$(9) \qquad I_p(u) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{S}_p(y) > 0.$$

2.2. Il polinomio

$$I_{2s+1}(u)$$

[11] $(-1)!! = 1$.

[12] Ciò che ci interesserà considerare per il seguito.

è ovunque crescente e possiede una ed una sola radice reale

$$u_s = x_s^2$$

che risulta interna all'intervallo $[0, 1]$ [13].

Posto

$$l_s = \frac{4s+1}{8s+3}, \tag{10}$$

si osserva subito che riesce

$$l_s < l_{s+1}, \quad \forall s \tag{11}$$

e che:

$$\lim_{s \to +\infty} l_s = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

In virtù della (6) si ha poi

$$I_{2s+1}(u_{s-1}) = \frac{(u_{s-1} - l_s)(1 - u_{s-1})^{2s}}{(4s+3)\, l_s}, \tag{13}$$

$$I_{2s+1}(l_s) = \frac{8s(2s+1)\, l_s^2\, I_{2s-1}(l_s)}{(4s+1)(4s+3)}. \tag{14}$$

2.3. La funzione

$$L_s(y) = \frac{\sum_{k=0}^{s} \frac{(4k-1)!!}{(4k)!!} y^{2k}}{\sum_{k=0}^{s} \frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!} y^{2k}} \tag{15}$$

è decrescente sull'intervallo $[1, +\infty[$.

Posto

$$\psi_s(y) = \sum_{k=1}^{s} \frac{(4k-1)!!}{(4k)!!} 2k\, y^{2k-1} \cdot \sum_{k=0}^{s} \frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!} y^{2k} -$$

(13) È, infatti, $I'_{2s+1}(u) > 0$, $\forall u$ e risulta $I_{2s+1}(0) < 0$, $I_{2s+1}(1) > 0$.

$$-\sum_{k=1}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}2k\,y^{2k-1}\cdot\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k-1)!!}{(4k)!!}y^{2k},$$

riesce, infatti,

$$L_s'(y)=\frac{\psi_s(y)}{\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}y^{2k}\right]^2}=$$

$$=\frac{\psi_{s-1}(y)-\frac{2}{2s+1}\frac{(4s-1)!!}{(4s)!!}y^{2s-1}\cdot\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(4k-1)!!}{(4k)!!}\frac{(s-k)^2}{2k+1}y^{2k}}{\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}y^{2k}\right]^2}$$

e, pertanto, essendo, come facilmente si controlla, $\psi_1(y)<0$ sull'intervallo $[1,+\infty[$, quanto asserito segue subito per induzione.

Osserviamo anche che risulta

$$L_s(1)>1,\quad \forall s \tag{16}$$

e

$$\lim_{s\to+\infty}L_s(1)=1. \tag{17}$$

È, infatti,

$$L_s(1)-1=\frac{\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k-1)!!}{(4k+2)!!}}{\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}}>0,\qquad\forall s$$

e delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k-1)!!}{(4k+2)!!},\qquad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!},$$

la prima converge, la seconda diverge.

2.4. Essendo

$$I_1(l_1)=\int_0^1\left(\frac{5}{11}-t^2\right)dt>0$$

e il polinomio $I_{2s+1}(u)$ ovunque crescente, dalla (14), in virtù della (11), segue, per induzione,

$$I_{2s+1}(l_s)>0, \quad \forall s.$$

Pertanto, sempre per la crescenza di $I_{2s+1}(u)$, risulta

$$u_s<l_s, \quad \forall s,$$

cosicché, per la (11) e la (12), è

$$u_s<\frac{1}{2}, \quad \forall s \text{ [14]}. \tag{18}$$

Poiché

$$\mathcal{S}_{2s+1}(y)=\sum_{k=0}^{2s+1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}y^k=y\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}y^{2k}-\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k-1)!!}{(4k)!!}y^{2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{s}\frac{(4k+1)!!}{(4k+2)!!}y^{2k}\,[y-L_s(y)]$$

e $L_s(y)$ è in $[1,+\infty[$ decrescente,

$$y>L_s(1)\Rightarrow \mathcal{S}_{2s+1}(y)>0, \quad \forall s$$

e, dunque, in virtù della (9), vale l'implicazione

$$y>L_s(1)\Rightarrow I_{2s+1}(u)<0, \quad \forall s.$$

Dalla (16) e dalla (17) segue che:

$$\forall\sigma>0\ \exists s^*\in\mathbf{N}:\ s>s^*\Rightarrow L_s(1)<1+\sigma;$$

poiché, per la (7), $y=1+\sigma\Rightarrow u=\dfrac{1}{2+\sigma}$ risulta, allora, $I_{2s+1}\left(\dfrac{1}{2+\sigma}\right)<0$, $\forall s>s^*$, quindi

$$u_s>\frac{1}{2+\sigma}, \quad \forall s>s^*. \tag{19}$$

[14] La successione $\{u_s\}_N$ è, inoltre, crescente. Infatti, dalla (13), per quanto prima osservato, segue $I_{2s+1}(u_{s-1})<0$, $\forall s$.

Dalla (18) e dalla (19), per l'arbitrarietà di σ, discende, infine, che

$$\lim_{s\to+\infty} u_s = \lim_{s\to+\infty} x_s^2 = \frac{1}{2} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials,* Am. Math. Soc. Colloquium Publications, XXIII (1939).

[2] A. Ossicini, *Costruzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano,* Ann. di Mat. pura e applic. LXXII (1966), pp. 213-237.

[3] S. Guerra, *Polinomi generati da successioni peso e teoremi di rappresentazione di una funzione in serie di tali polinomi,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, VIII, II, (1976), pp. 172-194.