V-MONOIDALITÀ, V-AGGIUNZIONI E FUNTORI MONOIDALI (*)

di MARIA CRISTINA PEDICCHIO e FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si caratterizza la monoidalità di un funtore* $K(r, -)$: $K_0 \to V_0$ *da una V-categoria V-monoidale K ad una categoria monoidale e simmetrica V e si assegna una struttura canonica V-monoidale a certi comonoidi* **K** *di* $V_{\#}$.

SUMMARY. - *We give a characterization about the «monoidality» of a functor* $K(r, -)$: $K_0 \to V_0$ *from a V-monoidal V-category K to a symmetric monoidal category V; moreover we also give a canonical V-monoidal structure on a comonoid* **K** *of* $V_{\#}$.

Introduzione.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria con prodotti finiti è ormai un risultato classico che ogni funtore rappresentabile $\mathcal{C}(r, -)$: $\mathcal{C} \to$ Set preserva tali prodotti (preservando tutti i limiti). D'altra parte è anche ben noto che una tale categoria può essere pensata come una Set-categoria, Set-monoidale, relativa alla categoria monoidale, simmetrica (e chiusa) Set.

I risultati ricordati porgono allora, in particolare, che ogni funtore $\mathcal{C}(r, -)$: $\mathcal{C} \to$ Set ammette una struttura di funtore monoidale.

Per una categoria V *monoidale e simmetrica* (*non* necessariamente *chiusa* e che, per semplicità supporremo sempre riferita alla normalizzazione $V(Z, -)$: $V_0 \to$ Set) si introduce il concetto di V-categoria V-monoidale (cfr. ad esempio [2]); se K è ora una tale V-categoria,

(*) Pervenuto in Redazione il 18 luglio 1977.
Lavoro eseguito limitatamente al secondo autore, nell'ambito del G.N.S. A.G.A.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

sorge spontaneo il problema di chiedersi quali funtori $K(r, -): K_0 \to V_0$ sono monoidali. Nella prima parte di questa nota caratterizzeremo la monoidalità di $K(r, -): K_0 \to V_0$, dimostrando che questo funtore è monoidale se e solo se r è comonoide in K_0; come caso particolare risulterà, dunque, la struttura monoidale (canonica) del funtore normalizzazione relativa $K(\bar{Z}, -): K_0 \to V_0$.

Nella situazione precedentemente esposta relativa a Set, si presenta, tuttavia, un risultato più particolare. In effetti, in tale caso, la struttura monoidale di ogni funtore $\mathcal{C}(r, -)$ è ottenuta mediante isomorfismi (monoidalità forte del funtore). È ben noto che ciò dipende, principalmente, dall'esistenza di un funtore aggiunto destro al funtore diagonale $\delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Nella seconda parte della nota generalizzeremo tale situazione pervenendo al seguente teorema 4.4.:

Sia $\mathbf{K} = (K, \delta, e)$ un comonoide in $V_\#$ (cfr. [4] prop. 3.4. pag. 519). Esista un oggetto $\bar{Z}$ di K tale che la counità $e: K \to \mathcal{J}$ del comonoide subordini un isomorfismo $K(a, \bar{Z}) \xrightarrow{e} Z$ per ogni a di K. Esista, inoltre, un V-funtore $\bar{\otimes}: K \otimes K \to K$ che sia V-aggiunto destro al V-funtore δ (cfr. § 2 n. 1). Risulta allora che:

a) È possibile dotare canonicamente K di struttura V-monoidale;

b) Rispetto a tale struttura $K(r, -): K_0 \to V_0$ è fortemente monoidale per ogni r di K;

c) Ogni oggetto r di K_0 ha la struttura di comonoide in K_0.

Rimane ora il problema di vedere se, e in quale modo, è possibile invertire il risultato precedente. Ci proponiamo di affrontare il quesito in una successiva nota, indagando, in particolare, sulle relazioni esistenti fra comonoidi in una categoria V-monoidale K e la comonoidalità di K stessa in $V_\#$ (1).

0. TERMINOLOGIA. La terminologia e le notazioni impiegate in questa nota sono quelle di [4], [1] e [3], a parte qualche inessenziale cam-

(1) In corso di redazione di tale nota si osserva, inoltre, come le ipotesi del teorema 4.4 possono venire ulteriormente indebolite e se ne discute il significato strutturale (cfr. n. 1 di « V-monoidalità, V-aggiunzioni e funtori monoidali II » in corso di stampa).

Nel caso che V oltre che monoidale e simmetrica (come supposto) sia anche *chiusa*, il teorema 4.4 può essere provato anche utilizzando strutture premonoidali e tecniche connesse (cfr. [2]).

biamento che andiamo a specificare. Abbiamo inteso anzitutto adottare, in generale, lettere minuscole per denotare gli oggetti di una categoria. La categoria *monoidale e simmetrica* V a cui sempre ci riferiremo (ad esclusione che nel n. 1 del § 2) avrà struttura denotata con $(V_0, \otimes, Z, \rho, \lambda, \tilde{a}, c)$ invece che come in [4]; inoltre, la normalizzazione di tale categoria sarà sempre realizzata dal funtore $V(Z, -): V_0 \to \mathrm{Set}$. Il concetto di categoria ordinaria associata ad una data V-categoria A si intenderà, quindi, sempre riferito a tale normalizzazione. Come in [3] faremo la convenzione di considerare una V-categoria A allo stesso tempo sia come V-categoria che come categoria ordinaria, usando così soltantò un simbolo « A »; analoga convenzione verrà fatta per i V-funtori. Di [3] adotteremo anche la notazione « $A(-, -): A^0 \times A \to V$ » in luogo di « $\hom A$ » di [4]; l'azione di un funtore $A(a, -): A \to V$ su un morfismo $f: b \to b'$ di A verrà inoltre denotata con $A(1, f): A(a, b) \to A(a, b')$; analogamente nel caso duale. Per ciò che concerne la definizione di V-categoria V-*monoidale* K vedasi, per esempio, [2] p. 2. Osserviamo che, ovviamente, ogni V-categoria V-monoidale K è anche una categoria monoidale (ordinaria) rispetto al funtore $\bar{\otimes}_0: K \times K \to K$ (categorie ordinarie) che risulta da

$$\begin{tikzcd} K \otimes K \arrow[r, "\bar{\otimes}"] & K \\ K \times K \arrow[u, "\tilde{V}_\#"] \arrow[ur, "\bar{\otimes}_0"'] & \end{tikzcd}$$

ove $\tilde{V}_\#$ è il funtore (fra categorie ordinarie) definito in [4] p. 520. Nel seguito noi useremo, senza creare ambiguità, soltanto il simbolo $\bar{\otimes}$. Infine, per ciò che concerne la problematica fondazionale, si rimanda (per esempio) a [8].

§ 1. **Comonoidi e funtori monoidali.**

1. Sulla monoidalità del funtore $K(r, -): K \to V$. Sia V una categoria *monoidale e simmetrica.* Indichiamo con K una V-categoria V-monoidale e consideriamo il funtore $K(r, -): K \to V$ con $\mathbf{r} = (r, \delta, e)$ comonoide in K. Ci proponiamo di dimostrare che tale funtore assume canonicamente una struttura di funtore monoidale.

Definiamo anzitutto una trasformazione naturale $\Phi = \Phi_{p,q}$ per ogni p, q di K.

Definizione 1.1.: Sia Φ_{pq}:

$$\begin{tikzcd} K(r,p) \otimes K(r,q) \arrow[r, "\Phi_{p,q}"] \arrow[d, "\bar{\otimes}"'] & K(r, p\bar{\otimes} q) \\ K(r\bar{\otimes} r, p\bar{\otimes} q) \arrow[ur, "K(\delta,1)"'] & \end{tikzcd}$$

ove δ: $r \to r \bar{\otimes} r$ è la comoltiplicazione del comonoide.

Si verifica immediatamente la naturalità di Φ mediante la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} K(r,p) \otimes K(r,q) \arrow[r, "\bar{\otimes}"] \arrow[d, "K(1,f)\otimes K(1,g)"'] & K(r\bar{\otimes} r, p\bar{\otimes} q) \arrow[r, "K(\delta,1)"] \arrow[d, "K(1,f\bar{\otimes} g)"'] & K(r, p\bar{\otimes} q) \arrow[d, "K(1,f\bar{\otimes} g)"'] \\ K(r,p')\otimes K(r,q') \arrow[r, "\bar{\otimes}"] & K(r\bar{\otimes} r, p'\bar{\otimes} q') \arrow[r, "K(\delta,1)"] & K(r, p'\bar{\otimes} q') \end{tikzcd}$$

con f: $p \to p'$ e g: $q \to q'$ morfismi arbitrari di K.

Il diagramma a destra commuta, infatti, perché $K(-,-)$: $K^0 \times \times K \to V$ è un bifuntore, quello a sinistra essendo $-\bar{\otimes}-$ un V-funtore.

Definizione 1.2.: Indichiamo con Φ_0: $Z \to K(r, \bar{Z})$ la counità e: $r \to \bar{Z}$ del comonoide **r**.

Proposizione 1.3.: Φ, Φ_0 verificano MF 1 (cfr. [1] p. 70).

DIM:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(K(r,a)\otimes K(r,b))\otimes K(r,c) \arrow[rr, "\tilde{a}"] \arrow[drrr, "-\bar{\otimes}(-\bar{\otimes}-)"] \arrow[ddr, "(-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}"] \arrow[dd, "\bar{\otimes}\otimes 1"'] & & \bullet \arrow[rr, "1\otimes\bar{\otimes}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{II}"] & & K(r,a)\otimes K(r\bar{\otimes}r, b\bar{\otimes}c) \arrow[dl, "\bar{\otimes}"'] \arrow[d, "1\otimes K(\delta,1)"] \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{I}"] & \arrow[r, phantom, "\mathrm{IV}"] & & \bullet \arrow[d, "K(\bar{a},1)"'] \arrow[dr, "K(1\otimes\delta,1)"] \arrow[r, phantom, "\mathrm{III}"] & \bullet \arrow[d, "\bar{\otimes}"] \\
\bullet \arrow[r, "\bar{\otimes}"] \arrow[dd, "K(\delta,1)\otimes 1"'] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{VI}"] & \bullet \arrow[rr, "K(1,\bar{a})"] \arrow[dd, "K(\delta\bar{\otimes}1,1)"] \arrow[ddrr, phantom, "\mathrm{VII}"] & & \bullet \arrow[d, "K(\delta\bar{\otimes}1,1)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & \bullet \arrow[dd, "K(\delta,1)"] \\
& & & \bullet \arrow[dr, "K(\delta,1)"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{VIII}"] & \\
K(r,a\bar{\otimes}b)\otimes K(r,c) \arrow[r, "\bar{\otimes}"'] & \bullet \arrow[rr, "K(\delta,1)"'] \arrow[urr, "K(1,\bar{a})"] & & \bullet \arrow[r, "K(1,\bar{a})"'] & K(r,a\bar{\otimes}(b\bar{\otimes}c))
\end{tikzcd}
$$

I diagrammi I, II, commutano per definizione (cfr. n. 0), VII e VIII sono banali; IV essendo $\bar{a}$ una trasformazione V-naturale; V per l'associatività del comonoide, III e VI poiché $-\bar{\otimes}-$ è un V-funtore.

Proposizione 1.4.: *Φ, Φ_0 verificano MF* 2.

DIM:

$$
\begin{tikzcd}
K(r,p)\otimes Z \arrow[rrrr, "1\otimes\Phi_0"] \arrow[drr, "(-\bar{\otimes}\bar{Z})\otimes(1\bar{\otimes}e)"] \arrow[dddr, "\rho"] \arrow[dddd, "\rho"'] & & & & K(r,p)\otimes K(r,\bar{Z}) \arrow[dll, "(-\bar{\otimes}\bar{Z})\otimes(r\bar{\otimes}-)"'] \arrow[dd, "\bar{\otimes}"] \\
& & \bullet \arrow[drr, "M"] \arrow[u, phantom, "\mathrm{II}"] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{IV}"] & & \\
& & \arrow[u, phantom, "\mathrm{III}"] & & \bullet \arrow[dd, "K(\delta,1)"] \\
& \bullet \arrow[rr, "-\bar{\otimes}\bar{Z}"] \arrow[dl, "1"] \arrow[l, phantom, "\mathrm{I}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{V}"] & & \bullet \arrow[ur, "K(1\bar{\otimes}e,1)"] \arrow[dr, "K(\bar{\rho}^{-1},1)"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{VI}"] & \\
K(r,p) \arrow[rrrr, "K(1,\bar{\rho}^{-1})"'] & & & & K(r,p\bar{\otimes}\bar{Z})
\end{tikzcd}
$$

I è banale; II commuta per definizione di $r\bar{\otimes}-$; IV commuta per la proposizione 4.1 di [4] p. 524, V poiché $\bar{\rho}$ è una V-trasformazione naturale, VI poiché **r** è un comonoide ed *e* ne è la counità. Il diagramma III risulta:

$$
\begin{tikzcd}
K(r,p)\otimes Z \arrow[rr, "(-\bar\otimes \bar{Z})\otimes(1\bar\otimes e)"] \arrow[dr, "(-\bar\otimes \bar{Z})\otimes 1"] \arrow[dd, "\rho"'] & & K(r\bar\otimes \bar{Z}, p\bar\otimes \bar{Z})\otimes K(r\bar\otimes r, r\bar\otimes \bar{Z}) \arrow[dd, "M"] \\
& \bullet \arrow[ur, "1\otimes(1\bar\otimes e)"'] \arrow[d, "\rho"] & \\
K(r,p) \arrow[r, "(-\bar\otimes \bar{Z})"'] & \bullet \arrow[r, "K(1\bar\otimes e,\, 1)"'] & K(r\bar\otimes r, p\bar\otimes \bar{Z})
\end{tikzcd}
$$

ove il triangolo superiore è banale, il trapezio a sinistra commuta essendo ρ una trasformazione naturale, ed il trapezio a destra per definizione.

Proposizione 1.5.: *Φ, Φ_0 verificano MF* 3.

DIM:

$$
\begin{tikzcd}
Z\otimes K(r,p) \arrow[rrrr, "\Phi_0\otimes 1"] \arrow[dr, "c"] \arrow[dddd, "\lambda"'] & & & & K(r,\bar{Z})\otimes K(r,p) \arrow[dl, "c"'] \arrow[dd, "\bar\otimes"] \\
& \bullet \arrow[rr, "1\otimes\Phi_0"] \arrow[dr, "(\bar{Z}\bar\otimes -)\otimes(e\bar\otimes 1)"'] \arrow[dd, "\rho"] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\mathrm{II}"] & & \bullet \arrow[dl, "(\bar{Z}\bar\otimes -)\otimes(-\bar\otimes r)"] & \\
\mathrm{I} & & \bullet \arrow[rr, "M"] \arrow[u, phantom, "\mathrm{III}"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{V}"] & \mathrm{IV} & \bullet \arrow[dd, "K(\delta,1)"] \\
& \bullet \arrow[rr, "(\bar{Z}\bar\otimes -)"] \arrow[dl, "1"] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\mathrm{VI}"'] & & \bullet \arrow[ur, "K(e\bar\otimes 1,1)"] \arrow[dr, "K(\bar\lambda^{-1},1)"'] \arrow[r, phantom, "\mathrm{VII}"] & \\
K(r,p) \arrow[rrrr, "K(1,\bar\lambda^{-1})"'] & & & & K(r,\bar{Z}\bar\otimes p)
\end{tikzcd}
$$

I commuta per coerenza; II commuta per la naturalità di c; IV per 4.1 di [4] p. 524, i rimanenti diagrammi sono analoghi (con qualche scambio inessenziale) a quelli della 1.4.

2. SULLA COMONOIDALITÀ DI r. Si supponga ora, ferme restando le ipotesi del numero precedente su V e su K, che, per qualche oggetto r di K il funtore $K(r, -)$: $K \to V$ sia monoidale con struttura (Φ, Φ_0). Ci proponiamo ora di invertire la proprietà precedentemente stabilita, dimostrando che r assume canonicamente una struttura di comonoide.

Definizione 2.1.: Sia δ: $r \to r \bar{\otimes} r$ il morfismo di K definito dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
K(r,r) \otimes K(r,r) \arrow[rr, "\Phi"] & & K(r, r\bar{\otimes} r) \\
Z \otimes Z \arrow[u, "j\otimes j"] & & \\
Z \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[uurr, dotted, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

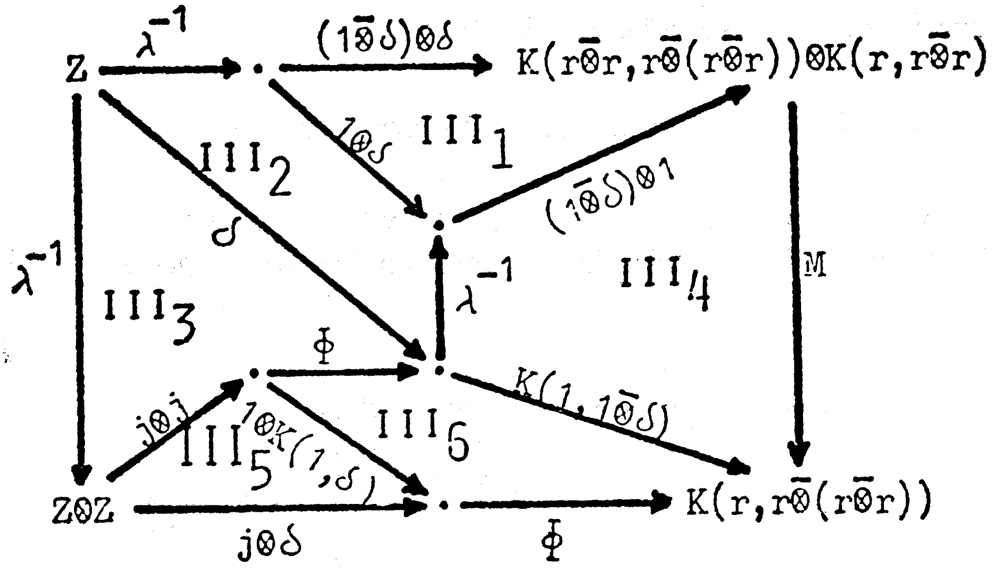
Definizione 2.2.: Sia e: $r \to \bar{Z}$ il morfismo di K definito ponendo $e = \Phi_0$: $Z \to K(r, \bar{Z})$.

Proposizione 2.3.: *δ è coassociativo.*

DIM:

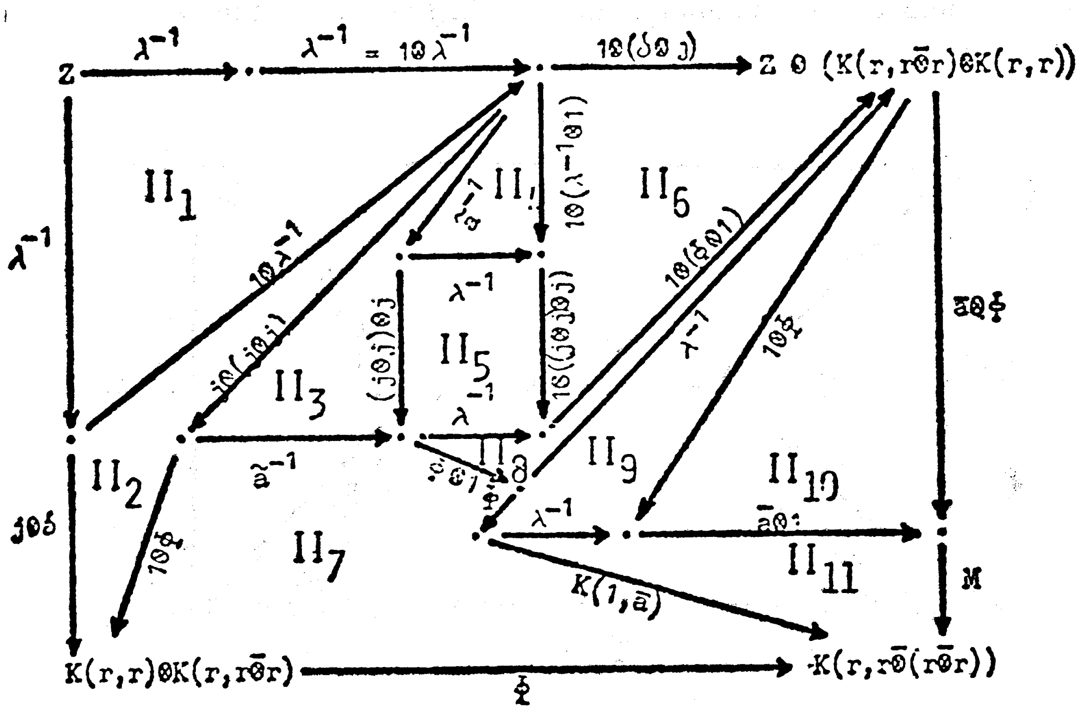
$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] & \cdot \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[drr, "1\otimes\lambda^{-1}"] & \cdot \arrow[rrr, "\bar{a}\otimes((\delta\bar{\otimes}1)\otimes\delta)"] & & & K((r\bar{\otimes}r)\bar{\otimes}r, r\bar{\otimes}(r\bar{\otimes}r))\otimes(K(r\bar{\otimes}r,(r\bar{\otimes}r)\bar{\otimes}r)\otimes K(r,r\bar{\otimes}r)) \arrow[d, "1\otimes M"] \arrow[dll, phantom, "\mathrm{I}"] \\
\cdot \arrow[d, "(1\bar{\otimes}\delta)\otimes\delta"'] \arrow[drrr, "j\otimes\delta"] & & & \cdot \arrow[r, "1\otimes(\delta\otimes j)"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{II}"] & \cdot \arrow[r, "\bar{a}\otimes\Phi"] & \cdot \arrow[dd, "M"] \\
& & & \cdot \arrow[drr, "\Phi"] & & \\
K(r\bar{\otimes}r, r\bar{\otimes}(r\bar{\otimes}r))\otimes K(r,r\bar{\otimes}r) \arrow[rrrrr, "M"'] \arrow[urr, phantom, "\mathrm{III}"] & & & & & K(r, r\bar{\otimes}(r\bar{\otimes}r))
\end{tikzcd}
\qquad (2.3.1)
$$

A sua volta, il diagramma III risulta:



III_1 è banale; III_3 e III_4 commutano per definizione; III_2 e III_6 commutano per la naturalità di λ e Φ rispettivamente, III_5 per il diagramma 8.10 di [4] p. 505 (si ricordi, che, con la normalizzazione da noi scelta, si ha $i=1$).

Il diagramma I di 2.3.1 è analogo al precedente e quindi la sua commutatività si prova con le medesime tecniche. Rimane ancora da verificare la commutatività di II. Essa risulta da:



II_1, II_4, II_{10} sono banali; II_2, II_6 e II_{11} commutano per definizione; II_3, II_5, II_8, II_9 commutano essendo $\tilde{a}$ e λ isomorfismi naturali; II_7 per la supposta monoidalità del funtore.

Proposizione 2.4: *e è una counità destra e sinistra.*

DIM: Verifichiamo solo la commutatività del seguente diagramma 2.4.1 ($e =$ counità sinistra); l'altro segue analogamente per simmetria.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\lambda^{-1}"] \arrow[dd, "\bar{\lambda}^{-1}"'] & & Z \otimes Z \arrow[dl, "\Phi_0 \otimes j"'] \arrow[dd, "(e \bar{\otimes} 1) \otimes \delta"] \\
& K(r,\bar{Z}) \otimes K(r,r) \arrow[dl, "\Phi"'] & \\
K(r, \bar{Z} \bar{\otimes} r) & & K(r \bar{\otimes} r, \bar{Z} \bar{\otimes} r) \otimes K(r, r \bar{\otimes} r) \arrow[ll, "M"]
\end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

Dimostriamo ora la commutatività del diagramma a sinistra:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrr, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\bar{\lambda}^{-1}"'] & & & Z \otimes Z \arrow[dl, "1 \otimes j"'] \arrow[dd, "\Phi_0 \otimes j"] \\
& K(r,r) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[dl, "K(1,\bar{\lambda}^{-1})"] & Z \otimes K(r,r) \arrow[dr, "\Phi_0 \otimes 1"] & \\
K(r, \bar{Z} \bar{\otimes} r) & & & K(r,\bar{Z}) \otimes K(r,r) \arrow[lll, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

Il trapezio in alto commuta per la naturalità di λ; quello in basso per la supposta monoidalità del funtore; i triangoli commutano banalmente.

Rimane ancora da verificare la commutatività del diagramma a destra di 2.4.1.

Essa si raggiunge subito considerando il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Z\otimes Z \arrow[rr, "1\otimes\lambda^{-1}=\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "1\otimes j"] \arrow[ddd, "\Phi_0\otimes j"'] & & \bullet \arrow[rr, "1\otimes(j\otimes j)"] & & Z\otimes(K(r,r)\otimes K(r,r)) \arrow[ddl, "1\otimes\Phi"'] \arrow[dd, "(\Phi_0\bar{\otimes}1)\otimes\Phi"] \\
& \bullet \arrow[urrr, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\Phi"] \arrow[ddl, "K(1,\Phi_0)\otimes 1"'] & & & \\
& & \bullet \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[drr, "K(1,\Phi_0\bar{\otimes}1)"'] & \bullet \arrow[r, "(\Phi_0\bar{\otimes}1)\otimes 1"'] & \bullet \arrow[d, "M"] \\
K(r,\bar{Z})\otimes K(r,r) \arrow[rrrr, "\Phi"'] & & & & K(r,\bar{Z}\bar{\otimes}r)
\end{tikzcd}$$

La commutatività di tale diagramma è immediata ricordando la naturalità di Φ.

Possiamo pertanto concludere col seguente

Teorema: *Siano V una categoria monoidale e simmetrica, K una V-categoria V-monoidale; condizione necessaria e sufficiente affinché $K(r, -)\colon K \to V$ sia un funtore monoidale, è che r abbia struttura di comonoide in K.*

DIM: Segue immediatamente dai numeri 1 e 2.

§ 2. V-monoidalità e V-aggiunzioni.

Ci proponiamo in questo secondo paragrafo, di giungere al teorema citato in Introduzione.

1. OSSERVAZIONI PRELIMINARI. Faremo in questo numero alcune osservazioni sulla V-aggiunzione fra V-categorie relative ad una medesima categoria *monoidale* V con lo scopo di assegnare alcune proposizioni in una forma utile per il seguito (cfr. anche [1], [5], [6]).

Siano V una categoria *monoidale*, A una V-categoria qualsiasi e, per ogni $x \in A$, α_x: $A(x, y) \to A(x, z)$ un morfismo in V. Si indichi inoltre con f: $y \to z$ il seguente morfismo di A:

$$
\begin{tikzcd}
A(y,y) \arrow[r, "\alpha_y"] & A(y,z) \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Proposizione 1.1.: *a) Condizione necessaria e sufficiente affinché* $A(1, f) = \alpha_x$ *per ogni* $x \in A$, *è che il diagramma*

$$
\begin{tikzcd}
A(y,y) \otimes A(x,y) \arrow[r, "\alpha_y \otimes 1"] \arrow[d, "M"] & A(y,z) \otimes A(x,y) \arrow[d, "M"'] \\
A(x,y) \arrow[r, "\alpha_x"'] & A(x,z)
\end{tikzcd}
$$

risulti commutativo, per ogni $x \in A$;

b) Se $A(1, f) = \alpha_x$ *per ogni* $x \in A$, f *è un isomorfismo se e solo se lo è* α_x *(per ogni* $x \in A$*).*

DIM: *a*) Se $A(1, f) = \alpha_x$ per ogni x, il diagramma in questione commuta per la naturalità di M. Viceversa, il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
A(x,y) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] & Z \otimes A(x,y) \arrow[r, "j \otimes 1"] \arrow[d, "f \otimes 1"] & A(y,y) \otimes A(x,y) \arrow[dl, "\alpha_y \otimes 1"] \arrow[dd, "M"] \\
& \cdot \arrow[d, "M"] & \\
& A(x,z) & A(x,y) \arrow[l, "\alpha_x"]
\end{tikzcd}
$$

è allora commutativo; ma $M(f \otimes 1)\lambda^{-1} = A(1, f)$ ed $M(J \otimes 1)\lambda^{-1} = A(1, 1) = 1$; onde $A(1, f) = \alpha_x$.

b) Se α_x è un isomorfismo per ogni x, basta applicare il funtore $V(Z, -)\colon V \to \mathrm{Set}$ ed usare una ben nota proprietà Set-relativa. Il viceversa è banale.

Siano ora A e B due V-categorie, $F\colon B \to A$, $G\colon A \to B$ due V-funtori arbitrari e $\theta\colon F \dashv G$ una V-aggiunzione (nel senso di [5] Th. 6 p. 24; cfr. anche [6] p. 84).

Proposizione 1.2. *Il seguente diagramma*

$$
\begin{tikzcd}
B(l,Ga) \otimes B(x,l) \arrow[rr, "\theta^{-1} \otimes 1"] \arrow[dd, "M"'] & & A(Fl,a) \otimes B(x,l) \arrow[d, "1 \otimes F"] \\
 & & \bullet \arrow[d, "M"] \\
B(x,Ga) \arrow[rr, "\theta^{-1}"'] & & A(Fx,a)
\end{tikzcd}
$$

è commutativo per ogni $l, x \in B$, $a \in A$.

DIM: Il diagramma in questione risulta

$$
\begin{tikzcd}
B(l,Ga) \otimes B(x,l) \arrow[rr, "\theta^{-1} \otimes 1"] \arrow[dr, "F \otimes F"] \arrow[dddd, "M"'] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{I}"] & & A(Fl,a) \otimes B(x,l) \arrow[d, "1 \otimes F"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{II}"] \\
 & \bullet \arrow[r, "A(1,\varepsilon) \otimes 1"] \arrow[dd, "M"] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{III}"] & \bullet \arrow[ddd, "M"] \\
 & & \\
 & \bullet \arrow[dr, "A(1,\varepsilon)"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{IV}"] & \\
B(x,Ga) \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\theta^{-1}"'] & \, & A(Fx,a)
\end{tikzcd}
$$

essendo $\varepsilon\colon FG \to 1_A$ la V-trasformazione naturale counità dell'aggiunzione. I diagrammi II e IV commutano perché θ è una V-aggiunzione, I commuta per definizione di V-funtore, e III per la naturalità di M.

Proposizione 1.3.: [2]. *Siano $G\colon A \to B$ e $G'\colon A \to B$ due V-funtori V-aggiunti destri al medesimo V-funtore $F\colon B \to A$. Si ha allora che:*

a) Se τ è l'isomorfismo (naturale) canonico fra i due funtori associati, il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A(Fb,a) \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & B(b,Ga) \arrow[d, "B(1,\tau)"] \\
& B(b,G'a)
\end{tikzcd}$$

è commutativo in V, per ogni $a \in A$ e $b \in B$;

b) τ è anche V-naturale.

DIM: *a*) Detto infatti $\alpha\colon B(b, Ga) \to B(b, G'a)$ l'isomorfismo di V definito da

$$\begin{tikzcd}
& A(Fb,a) \arrow[dr, "\theta'"] & \\
B(b,Ga) \arrow[ur, "\theta^{-1}"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & B(b,G'a)
\end{tikzcd}$$

è allora noto che $\tau\colon Ga \to G'a$ risulta essere il seguente:

$$\begin{tikzcd}
B(Ga,Ga) \arrow[r, "\alpha"] & B(Ga,G'a) \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

Ma il diagramma:

[2] Per tale proposizione confronta anche [6] p. 87 prop. 2.3.

$$\begin{tikzcd}
B(Ga,Ga)\otimes B(b,Ga) \arrow[rrr, "\alpha\otimes 1"] \arrow[dr, "\theta^{-1}\otimes 1"] \arrow[dddd, "M"'] & & & B(Ga,G'a)\otimes B(b,Ga) \arrow[dddd, "M"] \\
& \cdot \arrow[urr, "\theta'\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes F"] & & \\
& & \cdot \arrow[dl, "M"] & \\
& \cdot \arrow[drr, "\theta'"] & & \\
B(b,Ga) \arrow[ur, "\theta^{-1}"] \arrow[rrr, "\alpha"] & & & B(b,G'a)
\end{tikzcd}$$

commuta per definizione di α e per 1.2. La proposizione 1.1 porge allora subito la prima asserzione.

b) Il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A(Fb,a) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "A(1,1)"] & B(b,Ga) \arrow[d, "B(1,\tau)"] \\
A(Fb,a) \arrow[r, "\theta'"] & B(b,G'a)
\end{tikzcd}$$

è commutativo (per *a*)). Essendo 1 e τ trasformazioni naturali aggiunte si può immediatamente concludere con la V-naturalità di τ (cfr. [5] p. 25 Th. 7).

2. Definizioni e prime proprietà. In questo e nei successivi numeri supporremo sempre di operare con riferimento ad una categoria *V monoidale e simmetrica.*

Sia $\mathbf{K}=(K,\delta,e)$ un comonoide nella categoria monoidale $V_{\#}$; esista nella V-categoria K un oggetto $\bar{Z}$ tale che la counità $e\colon K\to\mathcal{I}$ subordini un isomorfismo $e\colon K(a,\bar{Z})\to Z$ in V per ogni $a\in K$; il V-funtore δ ammetta un V-funtore $\bar{\otimes}\colon K\otimes K\to K$ V-aggiunto destro (nel senso del n. 1). Ciò posto assegnamo le seguenti definizioni.

Definizione 2.1. Si denoti, per ogni a, b, c di K, con $\bar{a}$ il morfismo

$$\bar{a}\colon (a\,\bar{\otimes}\,b)\,\bar{\otimes}\,c\to a\,\bar{\otimes}\,(b\,\bar{\otimes}\,c)$$

di K definito da:

$$\begin{tikzcd}
K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c) \arrow[r, "\alpha"] & K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,a\bar{\otimes}(b\bar{\otimes}c)) \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\bar{a}"'] &
\end{tikzcd}$$

ove, per ogni h, a, b, c di K, α sia l'isomorfismo di V che risulta da:

$$\begin{tikzcd}
(K(h,a)\otimes K(h,b))\otimes K(h,c) \arrow[r, "\tilde{a}"] & K(h,a)\otimes(K(h,b)\otimes K(h,c)) \arrow[d, "1\otimes\theta"] \\
K(h,a\bar{\otimes}b)\otimes K(h,c) \arrow[u, "\theta^{-1}\otimes 1"] & K(h,a)\otimes K(h,b\bar{\otimes}c) \arrow[d, "\theta"] \\
K(h,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c) \arrow[u, "\theta^{-1}"] \arrow[r, "\alpha"] & K(h,a\bar{\otimes}(b\bar{\otimes}c))
\end{tikzcd}$$

(θ è la V-aggiunzione data).

Definizione 2.2. Indichiamo, per ogni a di K, con $\bar{\lambda}'\colon a \to \bar{Z}\bar{\otimes} a$ il morfismo di K definito da:

$$\begin{tikzcd}
K(a,a) \arrow[r, "\beta"] & K(a,\bar{Z}\bar{\otimes}a) \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\bar{\lambda}'"'] &
\end{tikzcd}$$

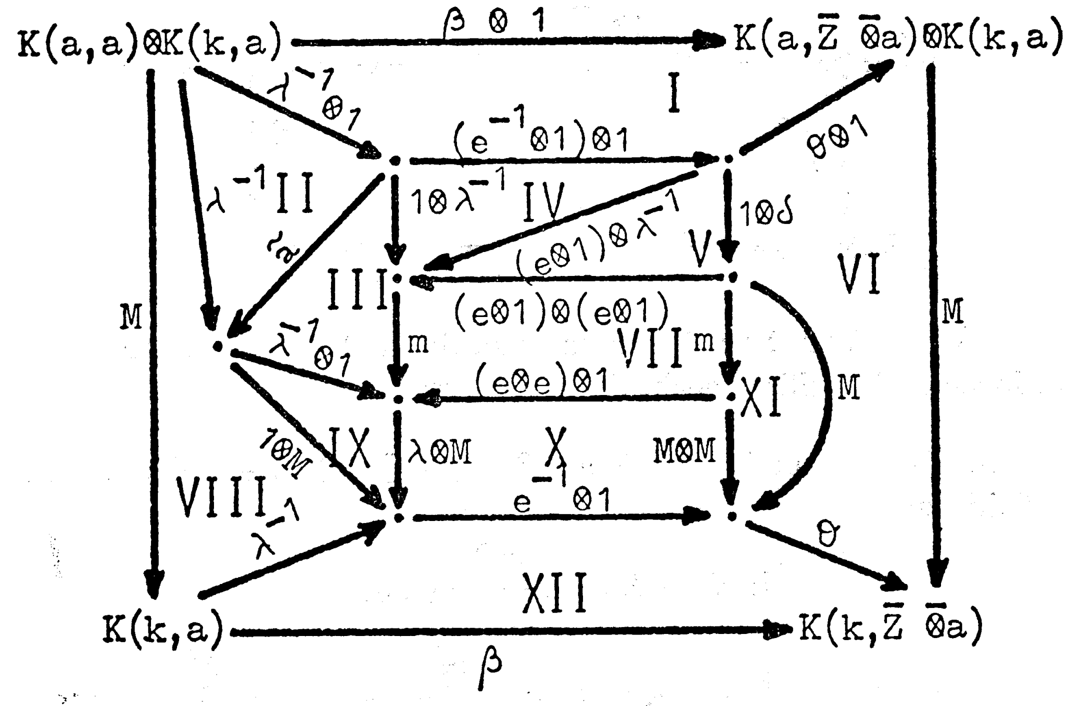
ove, per ogni a, k di K, $\beta\colon K(k,a) \to K(k,\bar{Z}\bar{\otimes} a)$ sia l'isomorfismo di V che risulta da

$$\begin{tikzcd}
Z \otimes K(k,a) \arrow[r, "e^{-1}\otimes 1"] & K(k,\bar{Z}) \otimes K(k,a) \arrow[d, "\vartheta"] \\
K(k,a) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[r, "\beta"'] & K(k,\bar{Z}\,\bar{\otimes} a)
\end{tikzcd}$$

($e=$ counità di **K**).

Proposizione 2.3.: *Per ogni k, a di K, risulta $\beta=K(1,\bar{\lambda}')$. Inoltre, $\bar{\lambda}'$ è un isomorfismo.*

DIM: A norma di 1.1 è sufficiente verificare la commutatività del diagramma seguente:



I diagrammi II, III commutano per coerenza, I e XII per definizione di β, V perché **K** è comonoide in V, VI per 1.2., X poiché e: $K \to \mathcal{I}$ è V-funtore, XI per definizione di prodotto in $K \otimes K$. I rimanenti sono banali.

La seconda asserzione della proposizione segue subito da 1.1 *b*).

Osservazione 2.4.: Detto $\bar{\lambda}$: $\bar{Z} \,\bar{\otimes}\, a \to a$ l'isomorfismo inverso di

$\bar{\lambda}'$, è immediato che risulta $K(1,\bar{\lambda})=\beta^{-1}$ per ogni $k\in K$ e per ogni $a\in K$, e che $\beta^{-1} J_{\bar{Z}\bar{\otimes}a}=\bar{\lambda}$, per ogni $a\in K$.

Definizione 2.5: Sia $\bar{\rho}'$: $a \to a \bar{\otimes} \bar{Z}$ il morfismo di K definito, per ogni $a\in K$, dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
K(a,a) \arrow[r, "\gamma"] & K(a,a\bar{\otimes}\bar{Z}) \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\bar{\rho}'"'] &
\end{tikzcd}$$

ove γ è l'isomorfismo di V risultante da:

$$\begin{tikzcd}
K(k,a)\otimes Z \arrow[r, "1\otimes e^{-1}"] & K(k,a)\otimes K(k,\bar{Z}) \arrow[d, "\theta"] \\
K(k,a) \arrow[u, "\rho^{-1}"] \arrow[r, "\gamma"] & K(k,a\bar{\otimes}\bar{Z})
\end{tikzcd}$$

Osservazione 2.6.: Proprietà analoghe a 2.3 e 2.4 valgono, come facilmente si verifica, anche in questo caso.

3. V-NATURALITÀ DI $\bar{a}$. Siano $\bar{\delta}$ e $(-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-$ i due V-funtori definiti da:

$$\bar{\delta}: K \xrightarrow{\delta} K\otimes K \xrightarrow{\delta\otimes 1} (K\otimes K)\otimes K;$$

$$(-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-: (K\otimes K)\otimes K \xrightarrow{\bar{\otimes}\otimes 1} K\otimes K \xrightarrow{\bar{\otimes}} K.$$

Dimostriamo, in primo luogo, che:

Proposizione 3.1: *L'isomorfismo* $(K(h,a)\otimes K(h,b))\otimes K(h,c) \xrightarrow{\theta\otimes 1}$ $\to K(h,a\bar{\otimes}b)\otimes K(h,c) \xrightarrow{\theta} K(h,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c)$ *definisce una V-aggiunzione* $\bar{\theta}$: $\bar{\delta} \dashv (-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-$ *(ove* $\bar{\delta}$ *e* $(-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-$ *si pensino come funtori ordinari; cfr.* [5] p. 23 n. 4 o [1] p. 72-1.7).

DIM: La naturalità dell'isomorfismo $\bar{\theta}$ in $((a, b), c)$ si ottiene infatti dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\delta}(h),(ab)c) \arrow[r, "\bar{\theta}"] \arrow[d, "((K\otimes K)\otimes K)(1,f)"'] & K(h,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c) \arrow[d, "K(1,((-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-)f)"] \\
((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\delta}(h),(a'b')c') \arrow[r, "\bar{\theta}"] & K(h,(a'\bar{\otimes}b')\bar{\otimes}c')
\end{tikzcd}$$

ove f: $((a, b), c) \to ((a', b'), c')$ è un arbitrario morfismo di $(K \otimes K) \otimes K$.

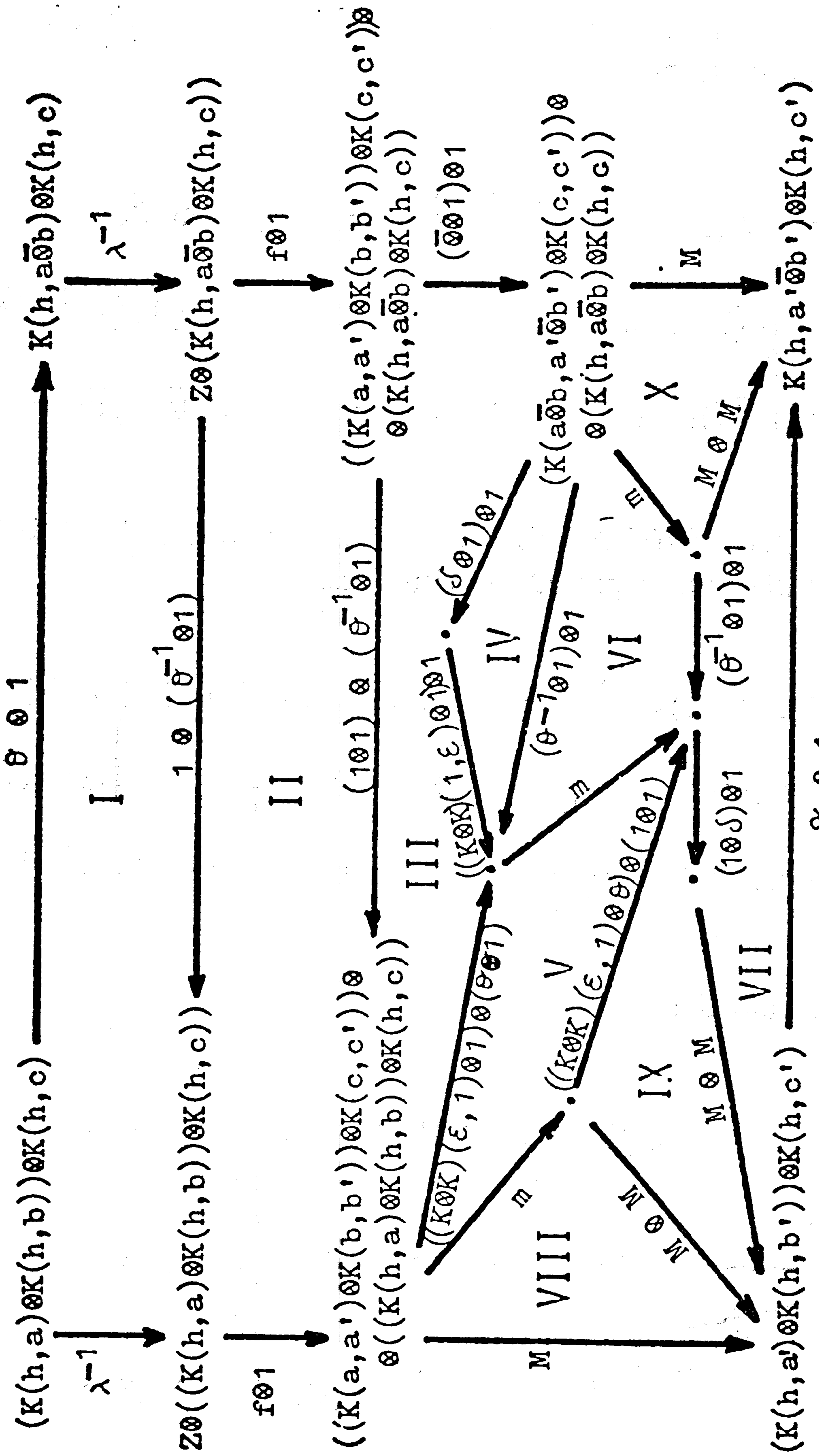
Ma il diagramma precedente risulta essere:

$$\begin{tikzcd}
((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\delta}(h),(ab)c) \arrow[r, "\theta\otimes 1"] \arrow[d, "((K\otimes K)\otimes K)(1,f)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & (K\otimes K)(\delta(h),(a\bar{\otimes}b)c) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "(K\otimes K)(1,\tau)"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & K(h,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c) \arrow[d, "K(1,((-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-)f)"] \\
((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\delta}(h),(a'b')c') \arrow[r, "\theta\otimes 1"'] & (K\otimes K)(\delta(h),(a'\bar{\otimes}b')c') \arrow[r, "\theta"'] & K(h,(a'\bar{\otimes}b')\bar{\otimes}c')
\end{tikzcd}$$

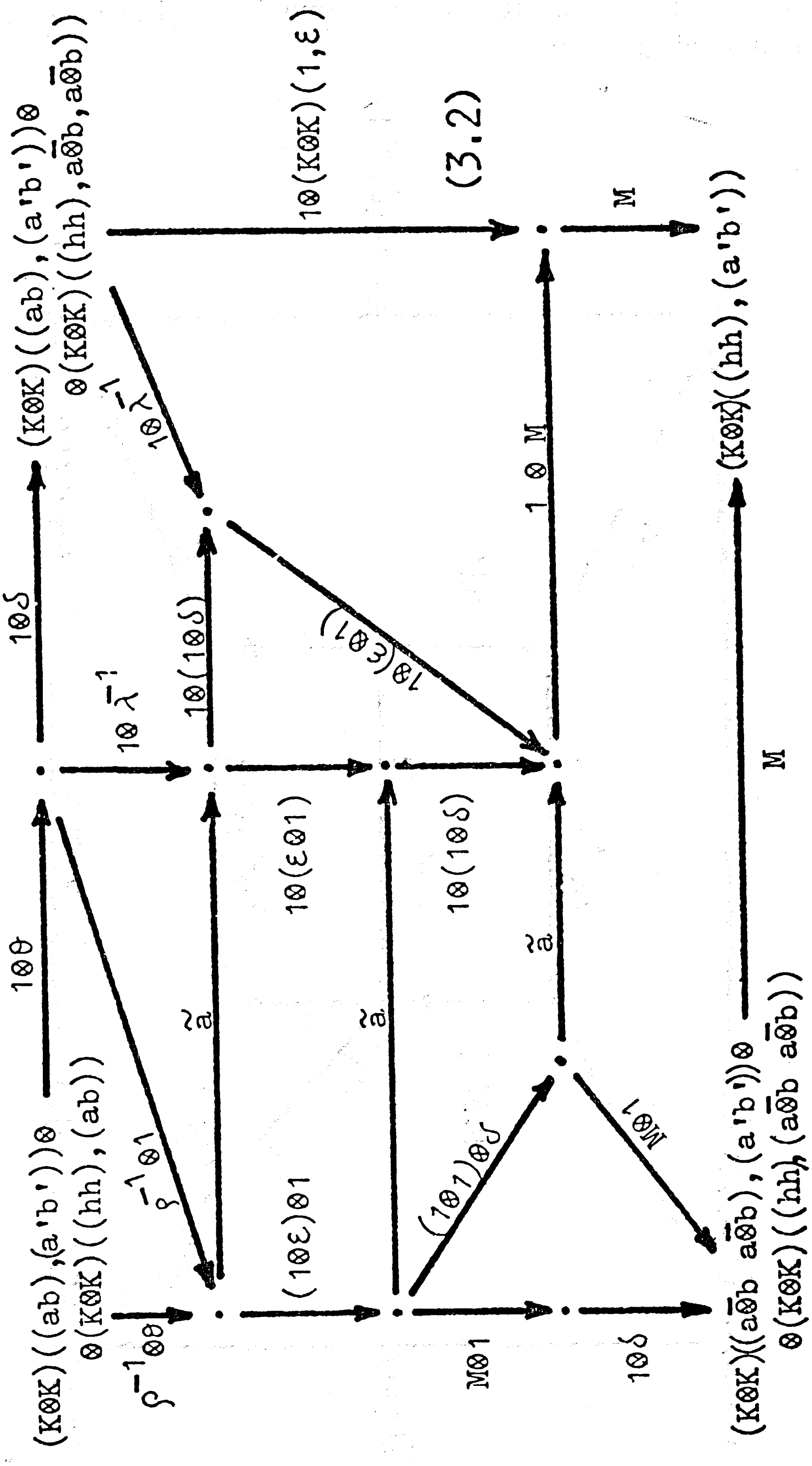
con τ definito da:

$$\begin{tikzcd}
 & (K(a,a')\otimes K(b,b'))\otimes K(c,c') = ((K\otimes K)\otimes K)((ab)c,(a'b')c') \arrow[d, "\bar{\otimes}\otimes 1"] \\
Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\bar{\otimes}\iota = ((-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-)f"'] & K(a\bar{\otimes}b,a'\bar{\otimes}b')\otimes K(c,c') \arrow[d, "\bar{\otimes}"] \\
 & K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,(a'\bar{\otimes}b')\bar{\otimes}c')
\end{tikzcd}$$

Poiché II è commutativo essendo θ la V-aggiunzione θ: $\delta \dashv \bar{\otimes}$, è sufficiente provare la commutatività di I. Essa risulta da



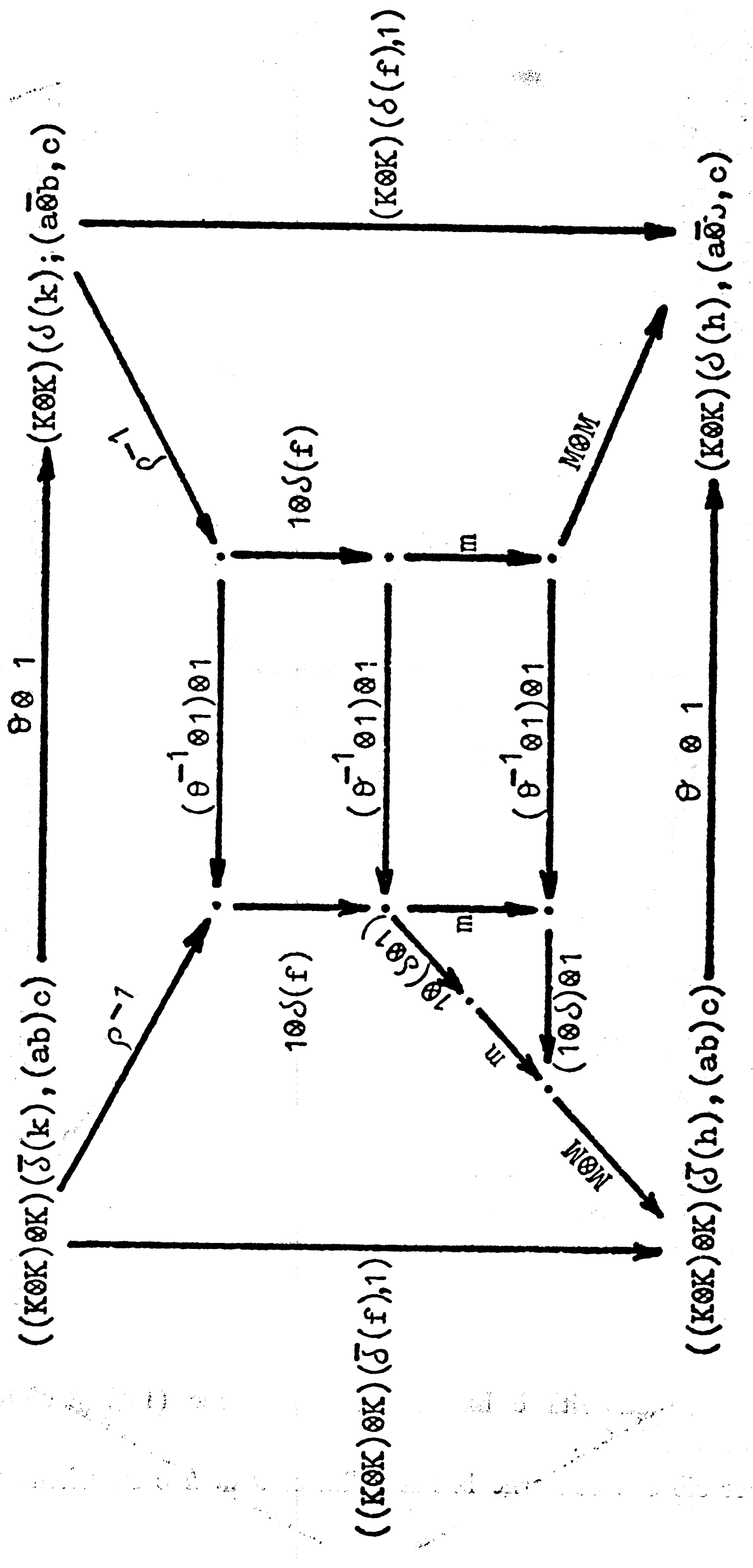
ove III commuta perché ε: $\delta \,\bar{\otimes} \rightarrow 1_{K \otimes K}$ è una V-trasformazione naturale (cfr. n. 1), IV perché θ è una V-aggiunzione, VII per 1.2, VIIIe X per definizione di prodotto in $(K \otimes K) \otimes K$ e $K \otimes K$ rispettivamente, I, II, V, VI banalmente; la commutatività di IX risulta dal seguente diagramma 3.2:



(3.2)

la cui commutatività è banale osservando che $(1 \otimes (K \otimes K)(1, \varepsilon)) \cdot$ $\cdot (1 \otimes \delta) = 1 \otimes \theta^{-1}$.

Per ciò che concerne la naturalità di $\bar{\theta}$ in h è sufficiente verificare che, se $f\colon h \to k$, è un arbitrario morfismo in K, risulta commutativo il seguente diagramma:



Tenendo conto di 1.2 e della definizione di $\overline{\delta}$, tale verifica è immediata.

Rimane dunque stabilito che $\overline{\theta}$: $\overline{\delta} \dashv (-\overline{\otimes}-)\overline{\otimes}-$ è una V-aggiunzione, considerando i V-funtori $\overline{\delta}$ e $(-\overline{\otimes}-)\overline{\otimes}-$ come funtori ordinari.

Proposizione 3.3: *La struttura di V-funtore che* $\overline{\theta}$: $\overline{\delta} \dashv (-\overline{\otimes}-)\overline{\otimes}-$ *definisce su* $\overline{\delta}$ *e* $(-\overline{\otimes}-)\overline{\otimes}-$ *rispettivamente, coincide con quella che i due funtori hanno per definizione.*

DIM: Si tratta in effetti di dimostrare che commutano i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
((K\otimes K)\otimes K)((ab)c;(a'b')c') \arrow[rr, "((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\varepsilon},1)"] \arrow[dr, "(-\bar{\otimes}-)\bar{\otimes}-"'] & & ((K\otimes K)\otimes K)(((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c)(a\otimes b)\bar{\otimes}c;(a'b')c') \arrow[dl, "\bar{\theta}"] \\
& K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,(a'\bar{\otimes}b')\bar{\otimes}c') &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
K(a,b) \arrow[rr, "k(1,\bar{\eta})"] \arrow[dr, "\bar{\delta}"'] & & K(a,(b\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}b) \arrow[dl, "\bar{\theta}^{-1}"] \\
& ((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\delta}(a),\delta(b)) &
\end{tikzcd}$$

ove $\bar{\varepsilon}$ risulta da:

$$\begin{tikzcd}
 & (K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,a)\otimes K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,b))\otimes K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,c) \\
Z \arrow[ur, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "j"'] & K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,a\bar{\otimes}b)\otimes K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,c) \arrow[u, "\theta^{-1}\otimes 1"'] \\
 & (K((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c,(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c) \arrow[u, "\theta^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

(ε: $\delta\bar{\otimes} \to 1_{K\otimes K}$ counità di θ)

mentre $\bar{\eta}$ da:

$$\begin{tikzcd}
 & & (K(a,a)\otimes K(a,a))\otimes K(a,a) \arrow[d, "\theta\otimes 1"] \\
Z \arrow[urr, "j"] \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[drr, "\bar{\eta}"'] & Z\otimes Z \arrow[ur, "j\otimes j"] \arrow[r, "\eta\otimes j"] & K(a,a\bar{\otimes}a)\otimes K(a,a) \arrow[d, "\theta"] \\
 & & K(a,(a\bar{\otimes}a)\bar{\otimes}a)
\end{tikzcd}$$

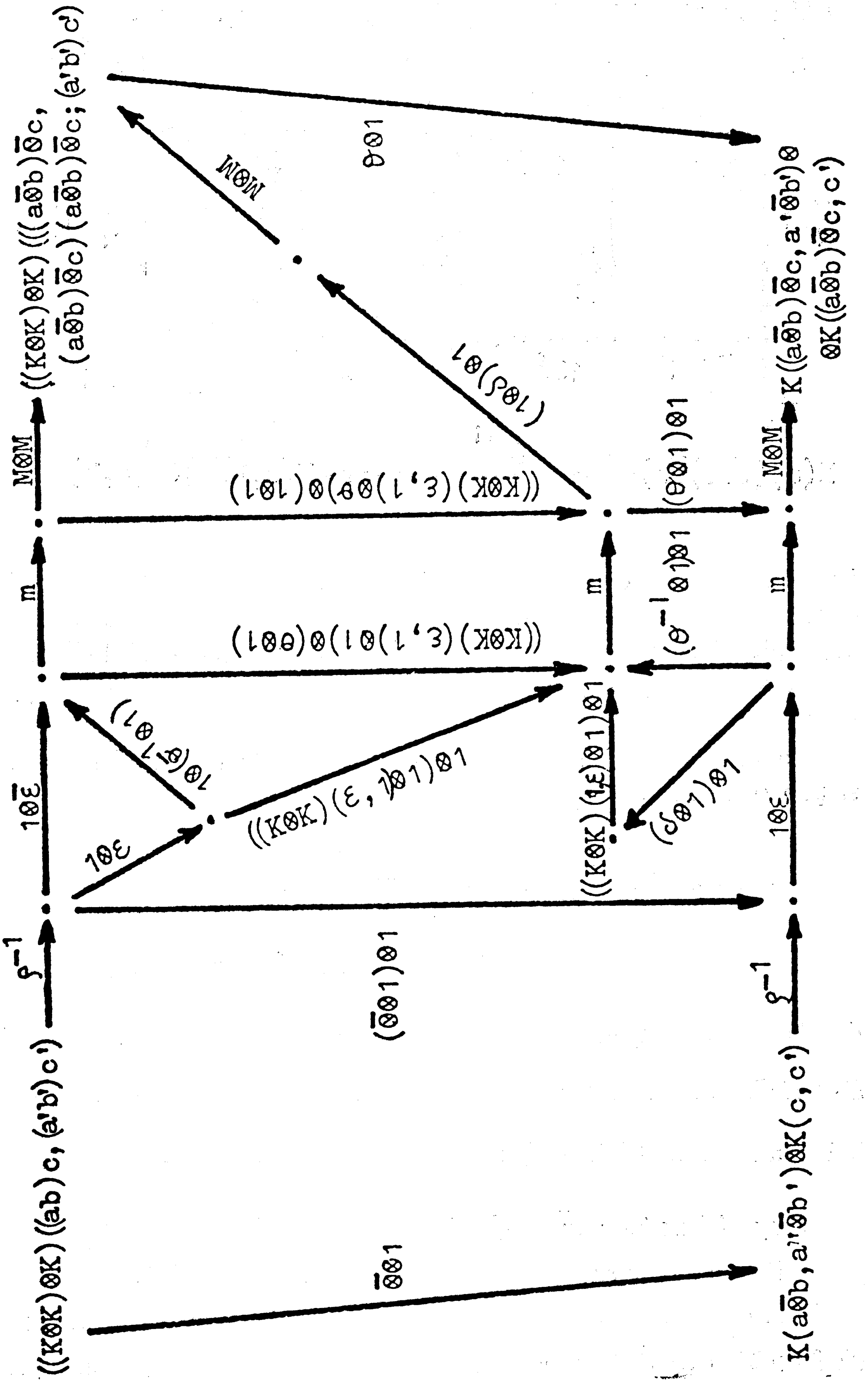
(η: $1_K \to \bar{\otimes}\,\delta$ unità di θ)

Ricordando ora che θ: $\delta \dashv \bar{\otimes}$ è una V-aggiunzione (cfr. n. 1), basta verificare la commutatività dei due diagrammi seguenti:

$$
\begin{tikzcd}
((K\otimes K)\otimes K)((ab)c, (a'b')c') \arrow[r, "((K\otimes K)\otimes K)(\bar{\varepsilon},1)"] \arrow[d, "\bar{\theta}\otimes 1"] & ((K\otimes K)\otimes K)(((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c, (a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c)(a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c, (a'b')c') \arrow[d, "\theta\otimes 1"] \\
(K\otimes K)((a\bar{\otimes}b, c), (a'\bar{\otimes}b', c')) \arrow[r, "(K\otimes K)(\varepsilon,1)"] & (K\otimes K)(((a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c, (a\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}c), (a'\bar{\otimes}b', c'))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
K(a,b) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "K(1,\bar{\eta})"] & (K\otimes K)((aa), (bb)) \arrow[d, "K(1,\eta)\otimes 1"] \\
K(a, (b\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}b) \arrow[r, "\theta^{-1}"] & K(a, b\bar{\otimes}b)\otimes K(a,b)
\end{tikzcd}
$$

Essi risultano rispettivamente:



$$
\begin{tikzcd}
K(a,b) \arrow[rrrr, "\delta"] \arrow[dd, "\lambda^{-1}"'] & & & & K(a,b)\otimes K(a,b) \arrow[dll, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dd, "\lambda^{-1}\otimes 1"] \\
& & \cdot \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes 1"] & & \\
\cdot \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes 1"'] \arrow[urr, "1\otimes\delta"] \arrow[d, "\bar{\eta}\otimes 1"'] & \cdot \arrow[r, "1\otimes\delta"] \arrow[d, "(\eta\otimes j)\otimes 1"] & \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[d, "(\eta\otimes j)\otimes(1\otimes 1)"] & \cdot \arrow[r, "1\otimes\lambda"] \arrow[d, "(\eta\otimes 1)\otimes(j\otimes 1)"] & \cdot \arrow[d, "(\eta\otimes 1)\otimes 1"] \\
\cdot \arrow[r, "\theta^{-1}\otimes 1"'] \arrow[d, "M"'] & \cdot \arrow[r, "1\otimes\delta"'] & \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[drr, "M"] & \cdot \arrow[r, "1\otimes M"] \arrow[dr, "M\otimes M"] & \cdot \arrow[d, "M\otimes 1"] \\
K(a,(b\bar{\otimes}b)\bar{\otimes}b) \arrow[rrrr, "\delta^{-1}"] & & & & K(a,b\bar{\otimes}b)\otimes K(a,b)
\end{tikzcd}
$$

La commutatività di tali diagrammi si verifica agevolmente sfruttando essenzialmente la 1.2, il diagramma 3.2, la V-naturalità della counità dell'aggiunzione θ, la definizione di V-categoria e quella di V-funtore.

Si è così dimostrato che $\bar{\theta}$ è una V-aggiunzione fra V-funtori (cfr. [5] th. 5 pag. 24).

In maniera perfettamente analoga a quanto fatto precedentemente si può osservare che

$$K(h,a)\otimes(K(h,b)\otimes K(h,c)) \xrightarrow{1\otimes\theta} K(h,a)\otimes$$

$$\otimes K(h, b\,\bar{\otimes}\,c) \xrightarrow{\theta} K(h, a\,\bar{\otimes}\,(b\,\bar{\otimes}\,c))$$

definisce una V-aggiunzione θ': $\delta' \dashv \bar{\otimes}'$, essendo δ' il V-funtore di $K \to K\otimes(K\otimes K)$ definito da $K \xrightarrow{\delta} K\otimes K \xrightarrow{1\otimes\delta} K\otimes(K\otimes K)$, e $\bar{\otimes}'$ il V-funtore definito da $K\otimes(K\otimes K) \xrightarrow{1\otimes\bar{\otimes}} K\otimes K \xrightarrow{\bar{\otimes}} K$.

Proposizione 3.4.: $\bar{a}$: $(-\bar{\otimes}-)\,\bar{\otimes}- \to -\,\bar{\otimes}\,(-\bar{\otimes}-)$ *è un isomorfismo V-naturale, essendo* $-\bar{\otimes}\,(-\bar{\otimes}-)$ *il V-funtore* $\bar{\otimes}'\,\tilde{\mathbf{a}}$.

DIM: Consideriamo il prodotto delle due V-aggiunzioni $\tilde{a}$: $\tilde{\mathbf{a}}^{-1} \dashv \tilde{\mathbf{a}}$, θ': $\delta' \dashv \bar{\otimes}'$, ove $\tilde{\mathbf{a}}$ è il V-funtore « associatività » in $V_{\#}$ (cfr. [4]

p. 519). Tale prodotto risulta ancora una V-aggiunzione $\tilde{\theta}=\theta'\tilde{a}$: $\tilde{\mathbf{a}}^{-1}\delta' \dashv \bar{\otimes}'\,\bar{\mathbf{a}}$; ma $\tilde{\mathbf{a}}^{-1}\delta'=\bar{\delta}$ poiché **K** è comonoide in $V_\#$ e δ ne è la comoltiplicazione; onde $-\bar{\otimes}(-\bar{\otimes}-)$ risulta un V-funtore V-aggiunto destro al V-funtore $\bar{\delta}$. Ricordando ora la definizione di $\bar{a}$ (cfr. n. 2), ed applicando la proposizione 1.3, si raggiunge la tesi.

Osservazione 3.5: Dalla proposizione 1.3 risulta, inoltre, che $\alpha=K(1,\bar{a})$ per ogni h, a, b, c di K. (cfr. def. 2.1.).

4. V-NATURALITÀ DI $\bar{\lambda}$ E DI $\bar{\rho}$. Osserviamo intanto che:

Proposizione 4.1.: *L'isomorfismo* β: $K(k,a) \to K(k, \bar{Z}\,\bar{\otimes}\, a)$ (*cfr. def.* 2.2) *determina una V-aggiunzione* β: $1 \dashv \bar{Z}\,\bar{\otimes}\,-$, *essendo* 1, $\bar{Z}\,\bar{\otimes}\,-$: $K \to K$ *funtori (ordinari) associati ai due V-funtori* 1 *e* $\bar{Z}\,\bar{\otimes}\,-$ *con la ovvia V-struttura.*

DIM: In effetti, per assicurare la naturalità di β rispetto a k è sufficiente verificare la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
K(k,a) \arrow[rr, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"] \arrow[dddd, "K(f,1)"'] & & Z\otimes K(k,a) \arrow[rr, "e^{-1}\otimes 1"] \arrow[d, "\rho^{-1}"] & & K(k,\bar{Z})\otimes K(k,a) \arrow[dl, "\rho^{-1}"'] \arrow[dddd, "(K\otimes K)(\delta(f){,}1)"] \\
& \cdot \arrow[dd, "1\otimes f"] & \cdot \arrow[l, "\lambda\otimes 1"'] & \cdot \arrow[l, "(e\otimes 1)\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes f"] & \\
& & & \cdot \arrow[d, "1\otimes\delta"] \arrow[dl, "(e\otimes 1)\otimes\lambda^{-1}"'] & \\
& \cdot \arrow[dl, "M"'] & \cdot \arrow[l, "\lambda\otimes\lambda"'] & \cdot \arrow[l, "(e\otimes 1)\otimes(e\otimes 1)"] \arrow[dr, "M"] & \\
K(h,a) \arrow[rr, "\lambda^{-1}"] & & Z\otimes K(h,a) \arrow[rr, "e^{-1}\otimes 1"] & & K(h,\bar{Z})\otimes K(h,a)
\end{tikzcd}$$

essendo f: $h \to k$ un morfismo qualsiasi di K ed e: $K \to \mathcal{J}$ la counità del comonoide **K** in V. Tale commutatività discende essenzialmente dalla struttura di comonoide e dal fatto che $\lambda\,(e\otimes 1)$: $K\otimes K \to K$ è un V-funtore; (si ricordi che e: $K(l,a) \to Z$ è un isomorfismo se $a=\bar{Z}$).

La naturalità di β rispetto ad a si riconosce facilmente essere dipendente dalla commutatività del seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
K(k,a) \arrow[r, "\bar{\lambda}^{-1}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] & \bullet \arrow[r, "e^{-1}\otimes 1"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] & K(k,\bar{Z})\otimes K(k,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \\
\bullet \arrow[r, "1\otimes\bar{\lambda}^{-1}"] \arrow[dd, "f\otimes 1"'] & \bullet \arrow[d, "f\otimes 1"] & \bullet \arrow[l, "1\otimes(e\otimes 1)"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes(1\otimes 1)"] \arrow[dl, "f\otimes(e\otimes 1)"'] \\
 & \bullet \arrow[d, "\bar{\lambda}^{-1}\otimes 1"] \arrow[dl, "1\otimes\lambda"'] & \bullet \arrow[d, "(j\otimes f)\otimes(1\otimes 1)"] \arrow[dl, "(1\otimes f)\otimes(e\otimes 1)"'] \\
\bullet \arrow[d, "M"'] & \bullet \arrow[l, "\lambda\otimes\lambda"] & \bullet \arrow[l, "(e\otimes 1)\otimes(e\otimes 1)"] \arrow[d, "M"] \\
K(k,b) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] & \bullet \arrow[r, "e^{-1}\otimes 1"] & K(k,\bar{Z})\otimes K(k,b)
\end{tikzcd}
$$

Andiamo ora a verificare che:

Proposizione 4.2.: *La V-aggiunzione determina sui funtori (ordinari)* 1 *e* $\bar{Z}\bar{\otimes}-$ *la medesima V-struttura di partenza.*

DIM: Bisogna, a tale scopo, osservare che commutano i diagrammi:

$$
\begin{tikzcd}
K(a,b) \arrow[rr, "K(1,\eta')"] \arrow[dr, "1"'] & & K(a,\bar{Z}\,\bar{\otimes}b) \arrow[dl, "\beta^{-1}"] \\
 & K(a,b) &
\end{tikzcd}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
K(a,b) \arrow[rr, "K(\varepsilon',1)"] \arrow[dr, "\bar{Z}\,\bar{\otimes}\,-"'] & & K(\bar{Z}\,\bar{\otimes}a,b) \arrow[dl, "\beta"] \\
& K(\bar{Z}\,\bar{\otimes}a,\bar{Z}\,\bar{\otimes}b) &
\end{tikzcd}$$

essendo η':

$$\begin{tikzcd}
& K(b,b) \arrow[d, "\beta"] \\
Z \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\eta'=\bar{\lambda}'"'] & K(b,\bar{Z}\,\bar{\otimes}b)
\end{tikzcd}$$

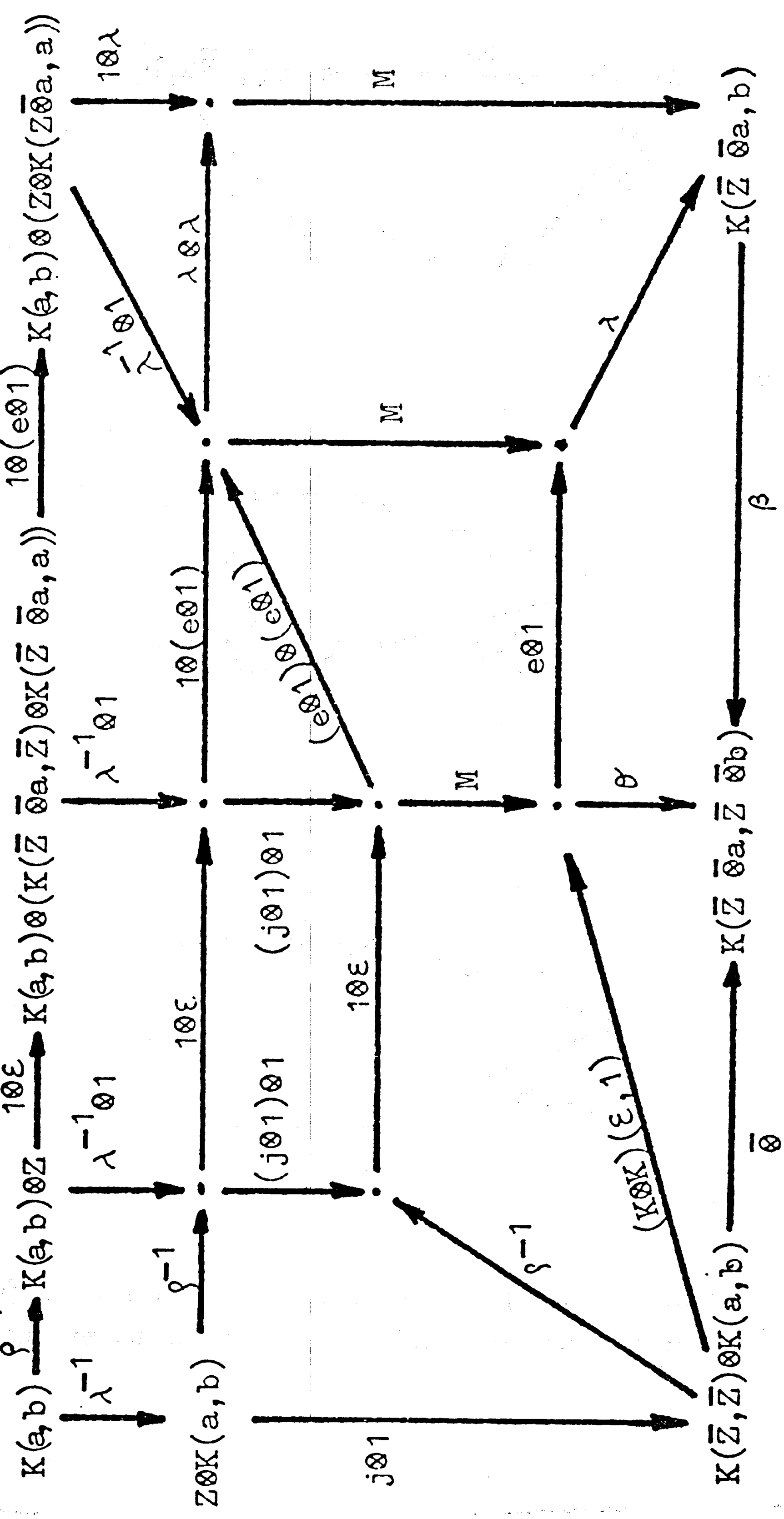
(cfr. n. 2)

e ε':

$$\begin{tikzcd}
& K(\bar{Z}\,\bar{\otimes}a,\ \bar{Z}\bar{\otimes}a) \arrow[d, "\beta^{-1}"] \\
Z \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\varepsilon'=\bar{\lambda}"'] & K(\bar{Z}\,\bar{\otimes}a,a)
\end{tikzcd}$$

(cfr. n. 2)

Ma la commutatività del primo diagramma è assicurata dal fatto che $K(1,\bar{\lambda}^{-1})=\beta$ (cfr. proposizione 2.3), mentre quella del secondo risulta da:


K(a,b)
K(a,b)⊗Z
K(a,b)⊗(K(Z̄ ⊗a,Z̄)⊗K(Z̄ ⊗a,a))
K(a,b)⊗(Z⊗K(Z̄⊗a,a))
Z⊗K(a,b)
K(Z̄,Z̄)⊗K(a,b)
K(Z̄ ⊗a,Z̄ ⊗b)
K(Z̄ ⊗a,b)
j⊗1
1⊗ε
1⊗(e⊗1)
1⊗λ
λ⊗λ
M
e⊗1
β

ove si è espresso ε' in termini di ε (counità dell'aggiunzione θ) e si è usata la definizione del V-funtore $\bar{Z}\bar{\otimes}-$. La commutatività di quest'ultimo diagramma si raggiunge agevolmente osservando che $\lambda: \mathcal{J}\otimes K \to K$, $e: K \to \mathcal{J}$ sono V-funtori, che θ è una V-aggiunzione e ricordando la definizione di β.

Proposizione 4.3.: *L'isomorfismo* $\bar{\lambda}$: $\bar{Z}\bar{\otimes}- \to 1$ *di* K (*cfr. oss.* 2.4) *è* V-*naturale.*

Dim: Si è appena osservato che la V-aggiunzione β: $1 \dashv \bar{Z}\bar{\otimes}-$ determina sui funtori la medesima V-struttura di partenza. Il teorema 5 di [5] p. 24 porge allora immediatamente la tesi, ricordando che $\bar{\lambda}$ è la counità di β.

In modo analogo, ricordando la definizione di $\bar{\rho}$ (cfr. def. 2.5), se ne prova la V-naturalità.

A questo punto, possiamo concludere col seguente teorema:

Teorema 4.4.: *Sia* $\mathbf{K}=(K, \delta, e)$ *un comonoide in* $V_{\#}$ *con* V *monoidale e simmetrica. Esista un oggetto* $\bar{Z}$ *di* K *tale che la counità* $e: K \to \mathcal{J}$ *del comonoide subordini un isomorfismo* $K(a, \bar{Z}) \xrightarrow{e} Z$ *per ogni* a *di* K. *Esista inoltre un* V-*funtore* $\bar{\otimes}$: $K \otimes K \to K$ V-*aggiunto destro al* V-*funtore* δ. *Risulta allora che*:

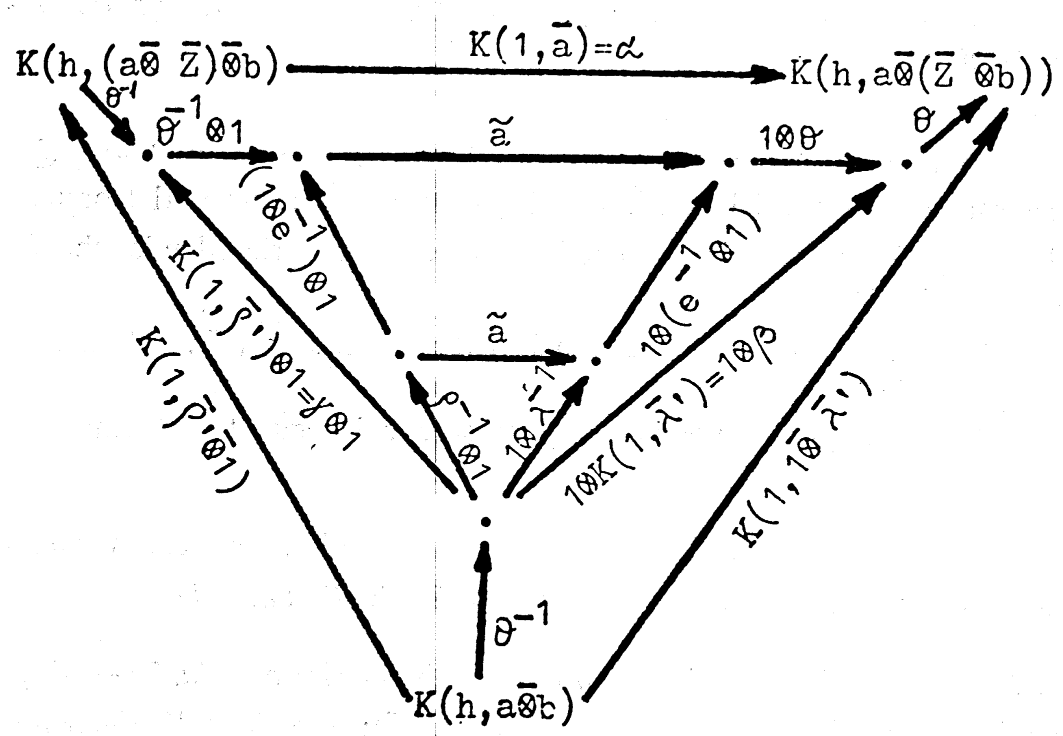
a) *È possibile assegnare una struttura* V-*monoidale canonica su* K, *con unità* $\bar{Z}$;

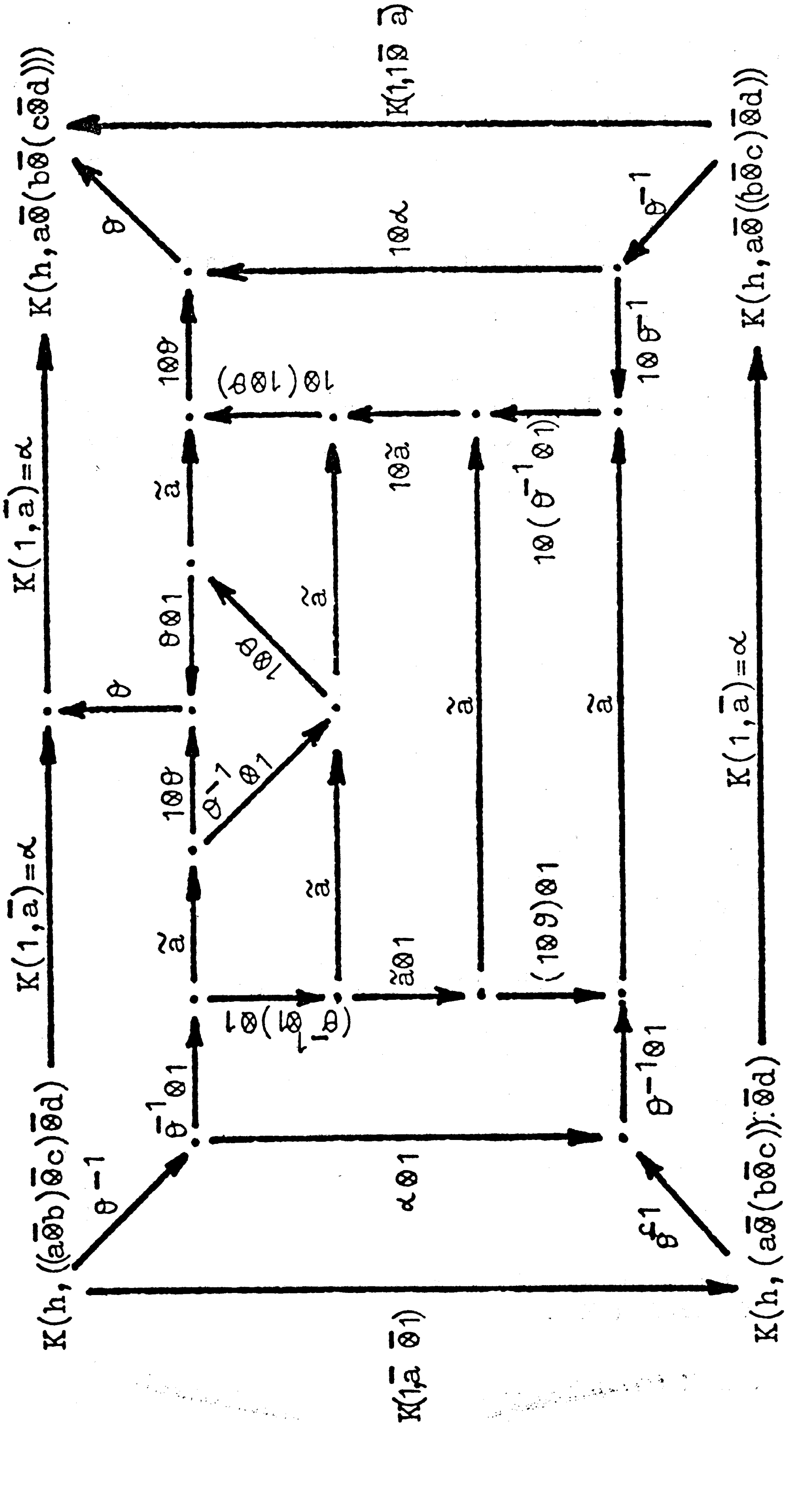
b) *Ogni* $K(r, -)$: $K \to V$ *ha struttura fortemente monoidale* (*cfr.* [6] p. 84);

c) *Ogni oggetto di* K *ha struttura di comonoide in* K.

DIM: *a*) Si definiscano $\bar{a}, \bar{\lambda}, \bar{\rho}$ come in 2. Da 2 risulta che $\bar{\lambda}, \bar{\rho}$, sono isomorfismi di K; da 3 segue che $\bar{a}$ è un isomorfismo V-naturale, mentre la V-naturalità di $\bar{\lambda}, \bar{\rho}$ è provata in 4. Rimangono ancora da verificare le proprietà $MC\,2$ ed $MC\,3$ (cfr. [4] p. 472).

Entrambe risultano immediatamente dai due diagrammi seguenti:





La commutatività di tali diagrammi è assicurata dalle definizioni di α, β, γ, da 2.3, 2.6 e 3.5, dalla naturalità di θ e dal fatto che V è una categoria monoidale. $MC\,2$ si ottiene (a parte l'inversione delle freccie) applicando $Z \xrightarrow{Ja\bar{\otimes}b} K(a \bar{\otimes} b, \bar{a} \otimes b)$; $MC\,3$ in modo analogo.

b) Posto infatti $\tilde{\Phi}=\theta, \Phi_0=e^{-1}$, ricordando le definizioni di α, β, γ e le 2.4, 2.6 e 3.5, si raggiunge immediatamente la tesi.

c) Immediata da § 1.

Osservazione 4.5.: Se $\mathbf{K}(K, \delta, e)$ è un comonoide commutativo (cfr. [7]) è possibile inoltre dimostrare, usando le stesse tecniche applicate in questa nota, che K assume anche struttura V-simmetrica e che ogni $K(r, -)$ è anche simmetrico.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUNGE MARTA C., *Relative functor categories and categories of algebras.* Journal of Algebra 11, 64-101 (1969).

[2] DAY BRIAN, *On closed categories of functors.* Reports of the Midwest category seminar IV (Springer Lecture Notes in Mathematics), Vol. 137, 1-38 (1970).

[3] DUBUC EDUARDO J. *Kan extensions in Enriched category theory.* (Springer Lecture Notes in Mathematics) Vol. 145 (1970).

[4] EILENBERG SAMUEL and KELLY MAX G., *Closed categories.* Proceedings Conf. on Categorical Algebra (Springer) 421-562 (1966).

[5] KELLY MAX G., *Tensor products in Categories.* Journal of Algebra 2, 15-37 (1965).

[6] KELLY MAX G., and STREET ROSS., *Review of the elements of 2-categories.* Category seminar. (Springer Lecture Notes in Mathematics) Vol. 420, 75-103 (1974).

[7] LINDNER HERALD., *Monads generated by monoids.* Manuscripta Mathematica 15, 139-152 (1975).

[8] SCHIPPER W. J. DE., *Symmetric closed categories.* (Mathematical centre tracts) Vol. 64 (1975).