SUL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI DEL GRUPPO SIMMETRICO (*)

di GIOVANNI ZACHER (a Padova) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra che i sottogruppi normali nei gruppi simmetrici infiniti sono determinati reticolarmente in senso stretto.*

SUMMARY. - *Normal subgroups in infinite symmetric groups are strongly lattice defined.*

Dati i gruppi G e $\bar{G}$, un isomorfismo del reticolo $L(G)$ di tutti i sottogruppi di G su quello $L(\bar{G})$ di $\bar{G}$ si usa chiamare, brevemente, una proiettività di G su $\bar{G}$. È noto (cf. [4], [7]) che se G è il gruppo simmetrico S_n di grado finito n e se $n \geq 4$, allora ogni proiettività di G è indotto da un isomorfismo di G. Recentemente R. Schmidt [2] ha provato che il gruppo alterno A_n di grado finito n, se $n \geq 4$, è pure individuato da $L(A_n)$, mentre ogni sua proiettività è indotta da un isomorfismo se e solo se è $n \neq 4, 3^r, 3^r+1$ con r numero dispari ≥ 3. Nella presente Nota si estende tale analisi ai sottogruppi normali dei gruppi simmetrici infiniti; si perviene al seguente risultato: *se G è un sottogruppo normale del gruppo simmetrico S^X su un insieme infinito X, allora ogni proiettività di G è indotta da uno (ed un solo) isomorfismo.*

In un gruppo G un elemento g si suol chiamare fortemente reale [1] se e solo se $g^i = g^{-1}$ per una opportuna involuzione i di G; ci sarà utile la seguente osservazione

1. *Se σ è una autoproiettività del gruppo G, allora per ogni ele-*

(*) Pervenuto in Redazione il 21 settembre 1977.
(**) Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

mento fortemente reale g risulta $\langle g\rangle^{\sigma}=\langle g\rangle$ *se (e solo se)* σ *fissa ogni sottogruppo d'ordine 2 di G.*

DIM. Possiamo supporre $g=i\cdot i_1$ con l'ordine di g maggiore di 2. Ora $\langle i, i_1\rangle^{\sigma}=\langle i, i_1\rangle$, per cui σ vi induce una autoproiettività che fissa $\langle g\rangle$ essendo esso l'unico sottogruppo massimo ciclico di $\langle i, i_1\rangle$.

Se X è un insieme (anche non finito), $S^{(X)}$ denoterà il gruppo di tutte le permutazioni a supporto finito, mentre il gruppo alterno A^X è definito dalla posizione $A^X=\{g\in S^{(X)}\mid g$ è di classe pari$\}$. Sfruttando i citati risultati sui gruppi alterni e simmetrici finiti e il teorema locale di Sadovski sulle proiettività (cf. ad es. [5] cap. II th. 1) non è difficile vedere che si ha

2. *Se X è un insieme infinito, allora ogni proiettività di* $S^{(X)}$ *o di* A^X *è indotta da un isomorfismo.*

3. *Sia X un insieme infinito e G un gruppo tale che* $A^X\leq G\leq S^X\cdot A^X$ *è allora fissato da ogni autoproiettività di G.*

DIM. Se σ è una autoproiettività di G, per 2. è $(A^X)^{\sigma}\simeq A^X$ per cui da $(A^X)^{\sigma}\neq A^X$ segue che $A^X\wedge(A^X)^{\sigma}=\{1\}$ trattandosi di gruppi semplici [6], con $A^X\lhd G$; ma è pure $(A^X)^{\sigma}\lhd G$ in virtù di [3] th. $C\,2$, per cui il centralizzante di A^X in G è diverso da $\{1\}$, cosa assurda.

Se $\emptyset\neq Y\subseteq X$ e $G\leq S^X$, come d'uso, G_Y indicherà lo stabilizzatore di Y in G: $G_Y=\{g\in G\mid y^g=y$ per ogni $y\in Y\}$. Abbiamo allora il seguente

LEMMA 1. *Sia X un insieme infinito e G un gruppo normale non identico di* S^X. *Se* $Y=\{y_1, y_2,\dots, y_n\}$ *è un sottoinsieme finito non vuoto di n elementi di X e se* σ *è una autoproiettività di G, allora* $(G_Y)^{\sigma}=G_{Y'}$, *con Y' un conveniente sottoinsieme di n elementi di X.*

DIM. Sia anzitutto $n\geq 5$. A^Y si identifica con un sottogruppo di G, e per il suo centralizzante in G si ha $\mathcal{C}_G(A^Y)=G_Y$. Se ora σ è una autoproiettività di G, la sua restrizione ad A^X è indotta, in virtù di 2. e 3., da un automorfismo τ di A^X, per cui esiste un $\pi\in S^X$ tale che per ogni $x\in A^X$ si ha $x^{\tau}=\pi^{-1}x\pi$ (cf. ad es. [6] Satz 4.3); in particolare $(A^Y)^{\sigma}=A^{Y'}$ con $Y'=Y^{\pi}$. Risulta $(G_Y)^{\sigma}=(\mathcal{C}_G(A^Y))^{\sigma}=\mathcal{C}_G(A^{Y'})=G_{Y'}$. La conclusione sarà raggiunta se si farà vedere che da $(G_Y)^{\sigma}=G_{Y'}$ con Y' equipotente ad Y, segue che $(G_{\{y_1,y_2\dots y_{n-1}\}})^{\sigma}=G_{\{z_1,z_2\dots z_{n-1}\}}$ con $\{z_1,z_2,\dots,z_{n-1}\}\subset Y'$, per ogni insieme finito non vuoto $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$.

Considerato all'uopo l'insieme di $n+3$ oggetti $Y \cup \{y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}\} \subset X$, risulta $G_{\{y_1, y_2, y_3 \dots y_{n-1}\}} = \langle G_Y, (y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) \rangle$, come un facile conto prova, come pure $A^{\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}\}} = \langle a = (y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}),\ c = (y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) \rangle$. Da $\{1\} = \langle c \rangle^\sigma \wedge (G_Y)^\sigma = \langle c' \rangle \wedge G_{Y'} = \pi^{-1} \langle c \rangle \pi \wedge G_{Y'}$ segue che il ciclo del 3^0 ordine c' sposta almeno uno degli oggetti di Y'.

Poiché $\langle a \rangle \leq G_Y$, da $\pi^{-1} \langle a \rangle \pi = \langle a \rangle^\sigma = \langle a' \rangle \leq G_{Y'}$ si vede che a' è un ciclo del 3^0 ordine che non sposta alcun elemento di Y', e poiché $\langle a, c \rangle^\sigma = A^{\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}\, y_{n+3}\}^\pi}$ si conclude che c' sposta un solo elemento di Y'. Ne segue che $(G_{\{y_1, y_2 \dots y_{n-1}\}})^\sigma = (G_Y \vee \langle c \rangle)^\sigma = G_{Y'} \vee \langle c' \rangle = G_{\{z_1, z_2 \dots z_{n-1}\}}$ con $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}\} \subsetneq Y'$.

Teorema 1. *Sia X un insieme infinito, G un sottogruppo normale di S^X e σ una autoproiettività di G. Allora σ è indotta da un automorfismo interno π di S^X.*

Dim. Per 2. possiamo supporre $S^X \lneq G$. In virtù del lemma 1, risulta $G_x^\sigma = G_y$ per ogni $x \in X$, e la posizione $x \mapsto y$ individua una permutazione π su X. Ne consegue che se $\langle g \rangle^\sigma = \langle g' \rangle$, i due insiemi supporti: sup. g, sup. g' hanno la stessa cardinalità. Posto $\tau = \pi \sigma^{-1}$, la conclusione sarà raggiunta se proviamo che τ è l'autoproiettività identica di G. Tenuto presente che ogni elemento di G è fortemente reale (cf. [6] Hilfssatz 2.8 e Hauptsatz 2.20) basterà in virtù di 1. dimostrare che τ fissa ogni sottogruppo d'ordine 2 di G. Sia allora i una involuzione di G; se sup. i è finito si conclude usando 2.

Per ipotesi assurda, esista un $i \in G - S^{(X)}$ tale che $i = (x,y) i_1, i' = (x,y)' i_1'$, ove $\langle i' \rangle = \langle i \rangle^\tau, y' \neq y$. Ora $\langle (x,y) \rangle^\tau = \langle (x,y) \rangle$, $\langle i_1 \rangle^\tau \leq G^\tau_{\{x,y\}} = G^\tau_x \wedge G^\tau_y = G_x \wedge G_y = G_{\{x,y\}}$ e, in definitiva, $\langle i \rangle^\tau \leq \langle (x,y) \rangle \times \langle i_1 \rangle^\tau$ per cui i': $x \mapsto y$, mentre è altresì i': $x \mapsto y' \neq y$, impossibile.

Lemma 2. *Sia X un insieme infinito e G un gruppo tale che $A = A^X \leq G \leq S^X$. Posto $\bar{X} = \{A_x \mid x \in X\}$ e detto σ una proiettività di G su H, le posizioni $g \mapsto \underline{g}$, $h \mapsto \sigma \underline{h} \sigma^{-1}$ atteggiano $\bar{X}$ rispettivamente a G ed H-insiemi fedeli. Per ogni $\langle g \rangle \leq G$, un sottoinsieme $\bar{Y}$ di $\bar{X}$ è un'orbita di $\langle g \rangle$ se e solo se $\bar{Y}$ è anche un'orbità di $\langle g \rangle^\sigma$.*

Dim. Che $\bar{X}$ sia un H-insieme segue da 3., 2. e Satz 4. 3 in [6] e la fedeltà da $\mathcal{C}_H(A^\sigma) = \{1\}$. Sia poi $g \in G$ e $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Osserviamo che se g è d'ordine infinito risulta $\langle g \rangle \leq \mathcal{N}(A_Y)$ se e solo se $\langle g \rangle^\sigma \leq \mathcal{N}(A_Y^\sigma)$ mentre se Y è finito e g periodico vale analoga proprietà in quanto per 2. è $A_Y \simeq A \simeq A^\sigma \simeq A_Y^\sigma$ e la conclusione si raggiunge usando di nuovo theorem $C\,2$ di [3].

Sia ora $\overline{Y}$ l'orbita di $\langle g \rangle$, $\overline{Y}_1$ quella di $\langle g \rangle^\sigma$ contenenti A_x. Per ogni $h \in \langle g \rangle^\sigma$ risulta, per quanto osservato, $A_x^{\sigma h \sigma^{-1}} \geq A_Y$ per cui $\overline{Y}_1 \subseteq \overline{Y}$ e sarà $\langle g \rangle^\sigma \leq \mathcal{N}(A_{Y_1}^\sigma)$ e dunque anche $\langle g \rangle \leq \mathcal{N}(A_{Y_1})$ per cui dovrà essere $Y_1 = Y$.

TEOREMA 2. *Sia X un insieme infinito, G un sottogruppo normale di S^X e σ una proiettività di G su H. Allora esiste uno ed un solo isomorfismo di G su H che induce σ.*

DIM. *Sia* $G \neq \{1\}$; sarà $A = A^X \leq G \leq S^X$ e poiché ogni involuzione di G è contenuta in un gruppo quadrinomio, σ conserva i sottogruppi d'ordine 2; essi generano G ed H [6]. Posto $\overline{X} = \{A_x \mid x \in X\}$, $\overline{X}$ è un G-insieme ed un H-insieme fedele (lemma 2); se poi g è una involuzione di G, posto $\langle g' \rangle = \langle g \rangle^\sigma$, g e g' operano identicamente su $\overline{X}$ per il lemma 2. Ne segue che la posizione $g \mapsto g'$ si estende ad un isomorfismo φ di G su H. Posto $\sigma \varphi^{-1} = \tau$, τ è una autoproiettività di G che fissa ogni sottogruppo d'ordine 2 di G. Ma allora τ è indotto dall'automorfismo identico di G in virtù del teorema 1, e così σ è indotto da φ. φ è anche unico dato che l'identità è l'unico automorfismo potenza di G.

BIBLIOGRAFIA

[1] GORENSTEIN, D: *Finite groups,* Harper and Row, New York.

[2] SCHMIDT, R.: *Verbandsautomorphismen der alternierenden Gruppen,* Math. Zeit. 154, 71-78 (1977).

[3] STONEHEWER, S. E.: *Modular subgroup structure in infinite groups,* Proc. London Math. S. 32, 63-101 (1976).

[4] SUZUKI, M.: *On the lattice of subgroups of finite groups,* Trans. Am. Math. Soc. 70, 345-371 (1951).

[5] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Springer Verlag, Berlin (1956.)

[6] WIELANDT, H.: *Unendliche Permutationsgruppen,* Vorlesungen, Tübingen (1959/60).

[7] ZACHER, G.: *Sul reticolo dei sottogruppi di un gruppo di permutazioni,* Padova, Cedam (1965).