SU ALCUNE GENERALIZZAZIONI DI UN NOTO TEOREMA DI M. NAGATA (*)

di EMILIA MEZZETTI e WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra che per anelli $C_2 FD, C_3 FD$, di Macaulay e regolari, sussistono alcune proposizioni analoghe ad un noto teorema di Nagata relativo agli UFD. Si dimostrano altresì alcune proprietà di trasferimento.*

SUMMARY. - *It is shown in this paper for the $C_2 FD$, $C_3 FD$, Macaulay and regular rings, some propositions analogous to a well known theorem of Nagata related to UFD are valid. Furthermore other transfer properties are shown.*

Introduzione. In questa nota, per teorema di M. Nagata intenderemo quello contenuto in [2] e che può essere enunciato nel seguente modo:

« *Sia R un dominio d'integrità verificante la condizione delle catene crescenti per ideali principali, $\{p_i\}_{i \in I}$ un insieme di elementi primi di R ed S il sistema moltiplicativamente chiuso di R da essi generato. Se $S^{-1} R$ è un UFD, anche R lo è* ».

Intendendo generalizzare detto teorema per proprietà aritmetiche difformi da quelle *UFD*, si ricerca, in questa nota, sotto quali condizioni per gli elementi di un sistema moltiplicativamente chiuso S di un anello R, dal fatto che valga una proprietà aritmetica per $S^{-1} R$ ne consegua l'analoga validità per R. In questa direzione si affronta il problema relativo alle proprietà $C_2 FD, C_3 FD$, di Macaulay, regolare, dopo aver rammentato o dimostrato, nel primo paragrafo, alcune pro-

(*) Pervenuto in Redazione il 18 giugno 1977.
Lavoro parzialmente eseguito nell'ambito di una borsa di studio C. N. R..
(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa - 34100 Trieste.

prietà di transfer relative a detti anelli. L'esposizione è completata da alcuni esempi elementari di natura geometrica, atti ad illustrare alcune possibili applicazioni dei risultati precedentemente ottenuti.

§ **1.** Appare opportuno, prima di studiare la generalizzazione del teorema di Nagata per i domini sopramenzionati, studiare gli stessi relativamente ad alcune proprietà di trasferimento.

Per le definizioni degli anelli $C_2 FD$ e $C_3 FD$ e delle loro più importanti proprietà, rinviamo a [1].

Ogni localizzazione $S^{-1} R$ di un dominio d'integrità $C_2 FD$ (risp. di Macaulay, risp. regolare) R è pure $C_2 FD$ (risp. di Macaulay, risp. regolare) (cfr. [1] pag. 162).

Sussiste inoltre la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Ogni localizzazione $S^{-1} R$ di un dominio R d'integrità $C_3 FD$ è pure $C_3 FD$.*

Dimostrazione. Considerato un elemento $\frac{a}{s} (a \in R, s \in S)$ irriducibile di $S^{-1} R$, sia $a = \prod_{j=0}^{m} p_j$ una decomposizione in fattori irriducibili di a in R. Necessariamente esiste un fattore p_0 tale che $(p_0) \cap S = \emptyset$ perchè altrimenti $\frac{a}{s}$ risulterebbe invertibile in $S^{-1} R$.

Dall'essere $\frac{a}{s} = p_0 \frac{\prod_{1}^{m} {}_j \, p_j}{s}$ una decomposizione di $\frac{a}{s}$ ne segue che $(\prod_{1}^{m} {}_j \, p_j) s^{-1}$ è unitario in $S^{-1} R$ e quindi $p_0 R_S = \frac{a}{s} R_S$. Essendo $\sqrt{(p_0)}$ ideale primo di R e $\sqrt{(p_0)} R_S = \sqrt{p_0 R_S} = \sqrt{\frac{a}{s} R_S}$ ne segue la tesi. (c. v. d.)

Dimostriamo qui di seguito una caratterizzazione degli *UFD* ed una caratterizzazione « locale » dei $C_2 FD$. Più precisamente sussistono le seguenti:

PROPOSIZIONE 2. *Un dominio d'integrità noetheriano R è un UFD se e soltanto se è un $C_2 FD$ ed il radicale di ogni ideale principale è principale.*

Dimostrazione. Se infatti l'anello R è $C_2 FD$ e verifica la condizione del radicale principale, ogni suo ideale primo di altezza uno è pure principale. Viceversa sia a un elemento non nullo e non unitario di R e $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ una decomposizione in fattori primi di a (dove i p_j sono non associati); si ha quindi $\sqrt{(a)} = (p_1 \cdots p_n)$ essendo $(p_1 \cdots p_n) = = (p_1) \cap \dots \cap (p_n)$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia R un dominio d'integrità noetheriano. L'anello R è un $C_2 FD$ se e soltanto se sono verificate entrambe le seguenti proprietà:*

(i) *$R_{\mathcal{M}}$ è un $C_2 FD$ per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ di R;*

(ii) *ogni ideale $\mathfrak{a}$ di R tale che, per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ di R, $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}$ sia radicale di un ideale invertibile, è radicale di un ideale principale.*

Dimostrazione.

a) Supponiamo che siano verificate le proprietà i) e ii). Sia $\mathcal{P}$ un ideale primo di altezza uno di R ed $\mathcal{M}$ un ideale massimale di R contenente $\mathcal{P}$. L'ideale $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ è primo di altezza uno in $R_{\mathcal{M}}$ e quindi esiste un elemento $a_{\mathcal{M}} \in R_{\mathcal{M}}$ tale che $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \sqrt{(a_{\mathcal{M}})}$ (per gli altri ideali massimali $\mathcal{M}$ tali che $\mathcal{M} \not\supseteq \mathcal{P}$ si ha $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = (1)$). Per (ii) ne segue che $\mathcal{P}$ è radicale di un ideale principale.

b) Sia R un dominio $C_2 FD$. È noto che ogni localizzazione di un $C_2 FD$ è un $C_2 FD$. Si consideri un ideale $\mathfrak{a}$ di R tale che per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ di R si abbia $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}} = \sqrt{(a_{\mathcal{M}})}$ ($a_{\mathcal{M}} \in R_{\mathcal{M}}$). Se $\mathfrak{a}$ è un ideale primo di altezza uno la (ii) è vera; altrimenti sia $\mathfrak{a} = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ una decomposizione primaria ridotta di $\mathfrak{a}$, dove Q_i è un ideale $\mathcal{P}_i$-primario. Considerato un ideale massimale $\mathcal{M}$ di R si ha:

$$\sqrt{(a_{\mathcal{M}})} = \mathfrak{a}_{\mathcal{M}} = (Q_1)_{\mathcal{M}} \cap \dots \cap (Q_s)_{\mathcal{M}} = \bigcap_{Q_j \subseteq \mathcal{M}} Q_j$$

dove quest'ultima è una decomposizione primaria ridotta di $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}$ in $R_{\mathcal{M}}$. Per [7] (pag. 209 Th. 5) gli ideali $(Q_j)_{\mathcal{M}}$ (per $Q_j \subseteq \mathcal{M}$) sono tutti ideali primi (i. e. $(\mathcal{P}_j)_{\mathcal{M}}$) di altezza uno da cui $(\mathcal{P}_i)_{\mathcal{M}} = (Q_i)_{\mathcal{M}}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Poiché l'ultima uguaglianza vale per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ e poiché facilmente si verifica, facendo variare $\mathcal{M}$ tra gli ideali massimali di R, che ogni $\mathcal{P}_i$ ha altezza uno, riesce $\mathcal{P}_i =$

Q_i $(i=1, 2, \dots, s)$ e quindi:

$$\alpha = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_s = \sqrt{x_1} \cap \dots \cap \sqrt{x_s} = \sqrt{x_1 \cdots x_s},$$

posto $\mathcal{P}_i = \sqrt{x_i}$ $(x_i \in R)$. (c. v. d.).

Vogliamo ora, in relazione agli anelli che considereremo successivamente, esaminare la proprietà di transfer relativa ad anelli di polinomi in una indeterminata.

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 4. *Sia R un dominio d'integrità noetheriano. Se $R[x]$ è un $C_2 FD$ (risp. $C_3 FD$) anche R è un $C_2 FD$ (risp. $C_3 FD$).*

Dimostrazione.

a) Sia $\mathcal{P}$ un ideale primo di altezza uno di R, $Q = \mathcal{P} R[x]$ è un ideale primo di altezza uno dell'anello $C_2 FD$ $R[x]$ e si ha $Q \cap R = \mathcal{P}$ (cfr. [6] pag. 265). Posto $Q = \sqrt{fR[x]}$ $(f \in R[x])$ si verifica facilmente che $f \in R$ ovvero $f \in \mathcal{P}$ e quindi $\sqrt{fR} \subseteq \mathcal{P}$. D'altra parte per $a \in \mathcal{P} (\subseteq Q)$ esiste una relazione del tipo $a^n = f \cdot g$ $(g \in R[x])$; necessariamente $g \in R$ da cui $\sqrt{fR} = \mathcal{P}$.

b) Innanzitutto ogni elemento a di R, irriducibile di R, permane irriducibile in $R[x]$. Riesce per ipotesi che $\sqrt{aR[x]}$ è un ideale primo (di altezza uno) di $R[x]$. Posto $\mathcal{P} = \sqrt{aR[x]} \cap R$, si verifica facilmente come in *a*) che $\mathcal{P} = \sqrt{aR}$.

Non è noto agli autori se la « proprietà inversa » sussista per anelli $C_2 FD$ e $C_3 FD$; comunque con l'ipotesi aggiuntiva che gli anelli considerati siano di Krull sussiste la seguente:

PROPOSIZIONE 5. *Se R è un dominio di Krull $C_2 FD$* (risp. $C_3 FD$) *l'anello dei polinomi $R[x]$ è $C_2 FD$ (risp. $C_3 FD$)* (cfr. [8]).

Sussistono analogamente le seguenti note proposizioni:

— *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello R sia di Macaulay è che $R[x]$ sia di Macaulay* (cfr. [6]).

— *Condizione necessaria e sufficiente affinché un dominio noetheriano R sia regolare è che $R[x]$ sia regolare* (cfr. [9] Th. 40; [4] (17.3.7)).

§ **2.** Relativamente alle « generalizzazioni » del teorema di Nagata sussistono le seguenti proposizioni e considerazioni critiche.

PROPOSIZIONE 6. *Siano R un dominio d'integrità noetheriano ed S un sistema moltiplicativamente chiuso di R generato da elementi primi di R:*

a) se $S^{-1}R$ è un dominio C_2FD, l'anello R è un C_2FD;

b) se $S^{-1}R$ è un dominio C_3FD, l'anello R è un C_3FD.

Dimostrazione.

a) Sia Q un ideale primo di altezza uno di R. Se l'elemento s appartiene a $S \cap Q \neq \emptyset$, almeno un fattore primo p di s deve appartenere a Q, da cui $Q=(p)$. Se invece $S \cap Q = \emptyset$, l'ideale $S^{-1}Q$ è primo di altezza uno in $S^{-1}R$ e quindi $S^{-1}Q=\sqrt{yR}\,R_S=S^{-1}\sqrt{yR}$ dove y è un opportuno elemento di R non divisibile per alcun elemento primo di S.

Essendo $\sqrt{yR}$ saturato con S (infatti da $s'z\in\sqrt{(y)}$ $(s'\in S,\ z\in R)$ consegue $s'^n z^n \in yR$ e non essendo y divisibile per alcun elemento di S si ha $z^n\in yR$ ovvero $z\in\sqrt{yR}$ si ha $Q=\sqrt{yR}$.

b) Innanzitutto ogni elemento irriducibile di R, appartenente ad S, è primo. Inoltre ogni elemento irriducibile a di R, non appartenente ad S, è tale che $a/1$ è irriducibile in R_S (infatti se $a/1=x/s\cdot y/t$ $(s, t\in S;\ x, y\in R)$ si ha $sta=xy$, dove s e t risultano prodotti di elementi primi; da ciò ne consegue che almeno uno dei due elementi x, y è scrivibile come prodotto di un unitario di R e di un elemento di S e quindi risulta invertibile in $S^{-1}R$). Essendo quindi $\sqrt{a/1\,R_S}=S^{-1}\sqrt{aR}$ un ideale primo e $\sqrt{aR}$ un ideale saturato con S (infatti da $s'z\in\sqrt{(a)}$ $(s'\in S;\ z\in R)$ consegue $s'^n z^n\in aR$ ed essendo a non divisibile per alcun elemento di S, si ha $z^n\in aR$, ovvero $z\in\sqrt{aR}$) si ha che $\sqrt{aR}$ è un ideale primo di R. (c. v. d.).

Volendo tuttavia porre in maggiore evidenza le proprietà aritmetiche caratteristiche dei C_2FD relativamente al « teorema di Nagata », appare opportuno restringere la nostra attenzione agli anelli C_2FD che risultino domini di Krull; si ottiene in tal modo la seguente:

PROPOSIZIONE 7. *Sia R un dominio di Krull noetheriano e S un sistema moltiplicativamente chiuso di R generato da una famiglia*

$\{p_i\}_{i\in I}(p_i \in R)$ *con* $\sqrt{(p_i)}$ *ideale primo.*

Se $S^{-1}R$ *è un dominio* C_2FD, *anche* R *è* C_2FD.

Dimostrazione. Sia Q un ideale primo di altezza uno di R. Se $Q\cap S \neq \emptyset$, esiste un elemento p_i tale che $p_i \in Q$, da cui $Q=\sqrt{p_i}$. Se invece $Q\cap S=\emptyset$, l'ideale primo di altezza uno $S^{-1}Q$ di $S^{-1}R$ è del tipo $S^{-1}\sqrt{yR}=\sqrt{yR_S}$ $(y\in R)$.

Dimostriamo qui di seguito che si può scegliere « il generatore » y di $S^{-1}Q$ in modo tale che appartenga ad un solo ideale primo di altezza uno di R, i. e. Q.

Innanzi tutto l'elemento y appartiene soltanto ad un numero finito di ideali primi di altezza uno di R che, ad eccezione di Q, sono tutti del tipo $\sqrt{(p_i)}$; infatti se $y\in Q^*$ (con Q^* primo di altezza uno di R) allora $\sqrt{yR_S}\subseteq Q_S^*$, ovvero $Q^*=Q$ oppure $Q^*\cap S\neq\emptyset$ i. e. $Q^*=\sqrt{(p_k)}$. Siano $Q_1=\sqrt{(p_1)}, \dots, Q_s=\sqrt{(p_s)}$ gli ideali primi minimali distinti da Q sopra y. Consideriamo la valutazione essenziale v_{Q_1} associata a Q_1. Riesce $v_{Q_1}(y)=r, v_{Q_1}(p_1)=s'$; si verifica facilmente che l'elemento $z=y^{s'}/p_1^r$ appartiene ad R ed ammette come ideali primi minimali $Q_2, \dots, Q_s, Q$. Iterando il processo s volte si perviene ad un elemento z^* di R che ammette come ideale primo minimale solo Q. Riesce quindi $Q=\sqrt{z^*R}$. (c. v. d.).

OSSERVAZIONI.

1) Per quanto esposto in [5] (pag. 21 e § 3 prop. 3) un dominio *UFD* è caratterizzato dal fatto che è di Krull e che il suo gruppo delle classi dei divisori è nullo.

Analogamente dalla proposizione 7 si deduce che un dominio di Krull R è C_2FD se e soltanto se il gruppo $\mathcal{H}(R)$ è nullo dove con $\mathcal{H}(R)$ si indica il gruppo quoziente del gruppo dei divisori $\mathcal{D}(R)$ rispetto al sottogruppo dei divisori generato dagli ideali primi radicali di ideali principali.

2) Volendo anche per i C_3FD dare maggior risalto alle proprietà caratteristiche degli stessi, anche sotto l'ipotesi aggiuntiva che gli anelli siano domini di Krull, bisognerebbe enunciare il « teorema di Nagata » per sistemi moltiplicativamente chiusi generati da elementi irriducibili; per [8], Th. 3, si riotterrebbe il teorema di Nagata originale per gli *UFD*.

3) Non va taciuto il fatto che il teorema di Nagata per sistemi moltiplicativamente chiusi generati da elementi primi sussiste per anel-

li verificanti la condizione delle catene crescenti sugli ideali principali, che siano integralmente chiusi, o completamente integralmente chiusi, o di Krull (cfr. [5] § 1, Ex. 13).

Relativamente alle proprietà di Cohen-Macaulay e di regolarità sussistono le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 8. *Siano R un anello noetheriano ed S un suo sistema moltiplicativamente chiuso generato da elementi $p_i\,(i \in I)$ di R che risultino non divisori dello zero e tali che gli anelli $R/(p_i)$ risultino di Macaulay* (1). *Se $S^{-1}R$ è un anello di Macaulay, necessariamente anche R è di Macaulay.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ un ideale massimale di R. Se $\mathcal{M} \cap S = \emptyset$ si ha $ht\,\mathcal{M} = ht\,\mathcal{M}_S =$ prof $\mathcal{M}_S$. Inoltre riesce prof $\mathcal{M} =$ prof $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ e prof $\mathcal{M} \leq$ prof $\mathcal{M}_S \leq$ prof $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$. Dalle relazioni precedenti segue che $ht\,\mathcal{M} =$ prof $\mathcal{M}$. Se invece $\mathcal{M} \cap S \neq \emptyset$, sia p_j un generatore di S appartenente ad $\mathcal{M}$. Considerato l'anello di Macaulay $R' = R/(p_j)$ e posto $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/(p_j)$ riesce $ht\,\mathcal{M}' =$ prof $\mathcal{M}'$ e prof $\mathcal{M} =$ prof $\mathcal{M}' + 1$ (potendosi iniziare una R-sequenza di $\mathcal{M}$ con l'elemento p_j). Inoltre per l' Hauptidealsatz si ha $ht\,\mathcal{M} = ht\,\mathcal{M}' + 1$ e dalle ultime due uguaglianze si consegue prof $\mathcal{M} = ht\,\mathcal{M}$ (c. v. d.).

PROPOSIZIONE 9. *Siano R un dominio noetheriano ed S un suo sistema moltiplicativamente chiuso generato da elementi $p_i\,(i \in I)$ di R tali che $R/(p_i)$ risulti regolare per ogni scelta dell'indice i. Se $S^{-1}R$ è regolare necessariamente R è regolare e gli elementi p_i non appartengono a $\mathcal{M}^2$ per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ che contenga p_i.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ un ideale massimale di R. Se $\mathcal{M} \cap S = \emptyset$ si ha $R_{\mathcal{M}} \simeq (R_S)_{\mathcal{M}_S}$ e quindi $R_{\mathcal{M}}$ risulta regolare quale particolare localizzazione di un anello regolare. Se invece $\mathcal{M} \cap S \neq \emptyset$, sia p_j un generatore di S appartenente ad $\mathcal{M}$. Essendo p_j un elemento regolare di $R_{\mathcal{M}}$, per [4] (17.1.8) e poiché

$$\frac{R_{\mathcal{M}}}{(p_j)_{\mathcal{M}}} \simeq \left(\frac{R}{(p_j)}\right)_{\frac{\mathcal{M}}{(p_j)}}$$

risulta che $R_{\mathcal{M}}$ è un anello locale regolare.

(1) Per la definizione si rimanda a [3].

OSSERVAZIONI.

1) Sembrerebbe, a prima vista, confrontando le ipotesi delle proposizioni relative agli anelli C_2FD, C_3FD, normali, che le ipotesi della proposizione 8 siano alquanto forti riguardo alla tesi che si vuol raggiungere. Tuttavia, difformemente a quanto accade per i C_2FD, ... etc., le condizioni della prop. 8, qualora si supponga che R risulti un dominio d'integrità, non sono soltanto sufficienti ma anche necessarie. Infatti se R è di Macaulay, necessariamente $R/(x)$ è di Macaulay per ogni x (non divisore dello zero) di R.

2) Analogamente all'osservazione precedente, le condizioni della proposizione 9, non sono soltanto sufficienti ma anche necessarie. Infatti se R è regolare e p_i non appartiene a $\mathcal{M}^2$ per ogni ideale massimale $\mathcal{M}$ contenente p_i, necessariamente $R/(p_i)$ è regolare (2).

Come semplici conseguenze geometriche delle proposizioni in precedenza dimostrate, si possono enunciare, ad esempio, le seguenti proprietà:

a) Se V è una varietà affine irriducibile, non liscia, tale che il luogo dei punti singolari Sing (V) risulti una sottovarietà intersezione completa, necessariamente Sing (V) non è liscia. In particolare, per ogni curva irriducibile affine non liscia, la sottovarietà dei punti singolari non è sottovarietà intersezione completa.

b) Se V è una varietà affine irriducibile, tale che contenga una sottovarietà W intersezione completa, di ideale di classe fondamentale e tale che l'aperto speciale affine $V-W$ possegga ideale di classe fondamentale, necessariamente l'anello delle funzioni regolari su V è di Macaulay,

(2) È ben noto (cfr. [4], 17.1.8) che se R è un anello locale regolare, ed x un elemento di un ideale massimale $\mathcal{M}$ di R, non appartenente a $\mathcal{M}^2$, riesce $R/(x)$ regolare; d'altra parte considerati un elemento x di $\mathcal{M}^2-\{0\}$ e l'anello $R^* = R/(x)$ si verifica che ogni sistema di elementi di $\mathcal{M}$ che costituiscono tramite le loro immagini in R^* una base minimale di $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}/(x)$ è una base minimale di $\mathcal{M}$. Essendo per l'Hauptidealsatz $\dim R^* = \dim R - 1$, risulta che R^* non è regolare.

BIBLIOGRAFIA

[1] STAGNARO E., *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale,* Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Vol. XIX (1974), 157-179.

[2] NAGATA M., *A remark on the unique factorization theorem,* J. Math. Soc. Japan, Vol. IX, (1957), 143-145.

[3] HOCHSTER M. - RATLIFF JR., *Five theorems on Macaulay rings,* Pacific J. Math. Vol. 44 n. 1 (1973), 147-172.

[4] GROTHENDIECK A. - DIEUDONNÉ J., *EGA IV (première partie)* IHES (1964).

[5] BOURBAKI N., *Algèbre commutative (Ch. 7-Diviseurs)* Hermann (1965).

[6] NORTHCOTT D. G., *Lessons on rings, modules and multiplicities,* Cambridge Univ. Press (1968).

[7] ZARISKI O. - SAMUEL P., *Commutative Algebra Vol. I,* VanNostrand (1958).

[8] MEZZETTI E. - SPANGHER W., *Anelli di polinomi su domini C_2FD e C_3FD* (in corso di pubblicazione), Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste.

[9] MATSUMURA H., *Commutative Algebra,* Benjamin (1970).