ANELLI DI POLINOMI SU DOMINI $C_2 FD$ E $C_3 FD$ (*)

di EMILIA MEZZETTI e WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostrano proprietà di trasferimento ad anelli di polinomi relativamente a domini $C_2 FD$ e $C_3 FD$ e si dà una caratterizzazione di detti domini nella classe degli anelli di Krull.*

SUMMARY. - *Transfer properties to polynomials rings in $C_2 FD$, $C_3 FD$ domains are shown. Furthermore we characterize $C_2 FD$'s, $C_3 FD$'s among Krull domains.*

Introduzione.

In un recente articolo, E. Stagnaro ha introdotto alcune generalizzazioni della nozione di dominio a fattorizzazione unica (*UFD*) [1].

Detti domini $C_i FD$ $(i = 1, 2, 3)$ e le loro proprietà risultano di grande rilievo per lo studio algebrico « globale e locale » delle cosiddette varietà sottoinsiemi intersezione completa, studiate principalmente dall'Hartshorne; non va taciuto che detti anelli assumono pure una certa rilevanza in teoria algebrica dei numeri.

Nel primo paragrafo, dopo aver ridimostrato il celebre teorema di Gauss per gli *UFD* (Teor. 1), e dopo aver introdotto, in una accezione più ampia di quella classica, la nozione di polinomio primitivo, si dimostra che per ogni anello $C_2 FD$ normale, vale la proprietà di trasferimento relativa all'anello di polinomi in un numero finito di indeterminate. Nel corso della dimostrazione si intravvede che l'ipotesi di normalità è essenziale.

(*) Pervenuto in Redazione il 23 aprile 1977.
Lavoro parzialmente eseguito nell'ambito di una borsa di studio C. N. R..
(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa - 34100 Trieste.

Nel paragrafo secondo vengono assegnate molteplici caratterizzazioni dei $C_2 FD$ e $C_3 FD$ nella classe dei domini di Krull, pervenendo al risultato che ogni anello di Krull $C_3 FD$ è un *UFD*.

Nel paragrafo terzo i teoremi di trasferimento precedentemente dimostrati nell'ipotesi di normalità, vengono estesi ad anelli di Krull; si perviene, in questa direzione, alla dimostrazione di proprietà di « transfer » relative ad anelli di polinomi per una famiglia qualsiasi di indeterminate.

Infine, in relazione ad anelli R che siano $C_2 FD$ normali, si studia l'ideale generato da un polinomio ed il relativo radicale, con particolare riguardo alla primitività del polinomio e alla sua fattorizzazione in $K[x]$ dove K è il corpo dei quozienti di R.

§ **1.** In questo paragrafo supporremo che gli anelli siano noetheriani.

Richiamiamo dapprima alcune definizioni (cfr. [1]). Un dominio noetheriano R verifica la proprietà *UFD* (risp. $C_2 FD$) se ogni ideale primo di altezza uno è principale (risp. radicale di un ideale principale).

Un dominio noetheriano R verifica la proprietà $C_3 FD$ se per ogni elemento irriducibile p di R l'ideale $\sqrt{p}$ è primo (necessariamente di altezza uno).

Consideriamo un anello noetheriano R e l'anello di polinomi $R[x]$ a coefficienti in R; è ben noto che, per il teorema dell'ideale principale di Krull, gli ideali primi di altezza uno di $R[x]$ sono tutti e soli quelli appartenenti alle due famiglie disgiunte:

$\mathcal{F}$ costituita dagli ideali primi Q di $R[x]$ con $Q=\mathcal{P}R[x]$ dove $\mathcal{P}$ è un ideale primo di altezza uno di R;

$\mathcal{G}$ costituita da tutti e soli gli ideali primi Q di $R[x]$ con $Q \cap R=(0)$.

Supposto R dominio d'integrità, è noto che ogni ideale Q di $\mathcal{G}$ è traccia su $R[x]$ dell'ideale primo Q' generato da Q in $K[x]$ dove K è il corpo dei quozienti di R (cfr. [2], Th. 149).

Un polinomio $f(x)$ a coefficienti in R viene detto primitivo se $f(x) \notin Q$ per ogni ideale Q della famiglia $\mathcal{F}$.

Volendo dimostrare teoremi di « trasferimento » analoghi al celebre teorema di Gauss, per anelli $C_2 FD$ e $C_3 FD$ ed avendo sperimentato notevoli difficoltà nel caso generale, si è formulata l'ulteriore ipotesi che gli anelli considerati siano integralmente chiusi.

In questa direzione, onde ispirarsi al caso notevolmente più semplice degli *UFD*, si dà una dimostrazione del teorema di Gauss, utilizzando il fatto « essenziale » che ogni *UFD* è integralmente chiuso.

TEOREMA 1. *Per ogni dominio noetheriano UFD R, l'anello di polinomi R [x] è pure UFD.*

Dimostrazione. Sia Q^* un ideale primo di altezza uno di $R\,[x]$. Se Q^* appartiene alla famiglia $\mathcal{F}$, allora $Q^*=\mathcal{P}R\,[x]$ dove $\mathcal{P}$ è un ideale primo principale di R cioè $\mathcal{P}=pR\,(p\in R)$ e quindi $Q^*=pR\,[x]$.

Supponiamo ora che Q^* appartenga alla famiglia $\mathcal{G}$. Poiché R è normale, risulta $R'=R\,[x]$ pure normale e quindi R' è uguale all'intersezione degli anelli di valutazione discreta R'_Q al variare di Q fra gli ideali primi di altezza uno di R'.

Poiché $Q^*\,R'_Q=R'_Q$ per ogni $Q\neq Q^*$ e $Q^*\,R'_{Q^*}$ risulta l'unico ideale massimale di R'_{Q^*} si ha:

$$Q^*=R'\cap Q^*\,R'_{Q^*}=\bigcap_{ht\,Q=1} Q^*\,R'_Q.$$

Sia $f\,(x)$ un polinomio irriducibile di $K\,[x]$, appartenente ad R', primitivo, e che risulti un generatore dell'ideale $Q^*\,K\,[x]$; si verifica facilmente che $f\,(x)$ è pure un generatore dell'ideale massimale $Q^*\,R'_{Q^*}$. Inoltre, $f\,(x)\,R'_Q=R'_Q$ per ogni $Q\in\mathcal{F}$ poiché $f\,(x)$ è primitivo; considerato un ideale Q distinto da Q^* ed appartenente alla famiglia $\mathcal{G}$, si ha che $QK\,[x]$ e $Q^*\,K\,[x]$ risultano inconfrontabili e quindi $f\,(x)\;R'_Q=R'_Q$.

Poiché $R'\cap f\,(x)\,R'_{Q^*}=Q^*$, per raggiungere la tesi, basterà far vedere che $f\,(x)\,R'=R'\cap f\,(x)\,R'_{Q^*}$. Infatti se $g\,(x)=f\,(x)\cdot r\,(x)/s\,(x)$ è un elemento di $R'\cap f\,(x)\,R'_{Q^*}$ con $s\,(x)\notin Q^*$, si ha che: $r\,(x)/s\,(x)=$ $=g\,(x)/f\,(x)$ appartiene a R_{Q^*} poiché $s\,(x)\notin Q^*$ ed inoltre appartiene a R_Q per $Q\neq Q^*$ poiché $f\,(x)\notin Q$ in quanto $f\,(x)$ è irriducibile in $K\,[x]$.

TEOREMA 2. *Per ogni dominio R normale e $C_2 FD$, l'anello di polinomi R [x] è pure normale e $C_2 FD$.*

Dimostrazione. Sia Q^* un ideale primo appartenente alla famiglia $\mathcal{F}$; poiché $Q^*=\mathcal{P}\;R\,[x]$ dove $\mathcal{P}$ è un ideale primo di altezza uno di R e quindi $\mathcal{P}=\sqrt{p}\,(p\in R)$ si ha $Q^*=\sqrt{p}R\,[x]=\sqrt{pR\,[x]}$ (cfr. [3]).

Sia ora Q^* un ideale primo della famiglia $\mathcal{G}$. Sia $f\,(x)$ un polinomio di $R'=R\,[x]$ (dominio normale, essendo normale R) generatore dell'ideale $Q^*\,K\,[x]$; si verifica che $f\,(x)$ è pure un generatore dell'ideale massimale $Q^*\,R'_{Q^*}$ dell'anello di valutazione discreta R'_{Q^*}.

Con ragionamento analogo a quello svolto nel Teorema 1, si dimostra che $f\,(x)$ non può appartenere ad alcun ideale primo Q della famiglia $\mathcal{G}$, distinto da Q^*. Supposto inoltre che $f\,(x)$ appartenga agli ideali $Q_1, \dots, Q_s$ di $\mathcal{F}$ e quindi $Q_i = \sqrt{p_i R[x]}$ $(p_i \in R)$, consideriamo le valutazioni discrete v_{Q_i} associate.

Se $v_{Q_1}(f(x)) = n$ e $v_{Q_1}(p_1) = m$, considerato l'elemento $c_1 = \dfrac{f(x)^m}{p_1{}^n}$, si ha $v_{Q_1}(c_1) = 0$, $v_{Q_i}(c_1) > 0$ $(i = 2, \dots, s)$, $v_{Q^*}(c_1) > 0$ e $v_Q(c_1) = 0$ per ogni $Q \in \mathcal{G} - \{Q^*\}$ e quindi c_1 appartiene ad R' e gli ideali primi di altezza uno che lo contengono sono soltanto $Q_2, \dots, Q_s, Q^*$. Iterando il procedimento, si perviene ad un elemento $g(x) = c_s$ di R' del tipo: $g(x) = \dfrac{f(x)^\alpha}{p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}}$ appartenente ad un solo ideale primo di altezza uno (i. e. Q^*) e quindi primitivo.

Per raggiungere la tesi, basterà dimostrare che $Q^* = \sqrt{g(x)}$. Infatti se $h(x) \in \sqrt{g(x)}$, allora esiste un intero n tale che $h(x)^n = g(x) \cdot r(x) = \dfrac{f(x)^\alpha \cdot r(x)}{p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}}$ appartiene a Q^* e quindi, essendo Q^* primo, riesce $h(x) \in Q^*$.

Viceversa, essendo $Q^* = R' \cap f(x) R'_{Q^*}$, se $h(x) = f(x) \cdot \dfrac{r(x)}{s(x)}$ $(s(x) \notin Q^*)$ è un elemento di Q^* si ha:
$h(x)^\alpha = f(x)^\alpha \cdot \dfrac{r(x)^\alpha}{s(x)^\alpha} = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s} g(x) \cdot \dfrac{r(x)^\alpha}{s(x)^\alpha}$; l'elemento $p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s} \dfrac{r(x)^\alpha}{s(x)^\alpha} = \dfrac{h(x)^\alpha}{g(x)}$ giace in R' in quanto appartiene a R'_Q per $Q \neq Q^*$ ($g(x)$ è contenuto in un unico ideale primo di altezza uno) e appartiene a R'_{Q^*} in quanto $s(x) \notin Q^*$. Riesce quindi $h(x)^\alpha \in (g(x))$, ovvero la tesi.

§ 2. È ben nota (cfr. [4]) la caratterizzazione degli *UFD* nella classe degli anelli di Krull. Si dimostra infatti che se R è un anello di Krull e $\{v_i\}_{i \in I}$ la famiglia delle sue valutazioni essenziali, condizione necessaria e sufficiente affinché R sia *UFD* è che per ogni valutazione (essenziale) v_i esista un elemento a_i di R tale che $v_i(a_i) = 1$ e $v_j(a_i) = 0$ per ogni scelta dell'indice j diverso da i in I.

Valgono le seguenti caratterizzazioni dei $C_2 FD$ e $C_3 FD$ nella classe degli anelli di Krull:

PROPOSIZIONE 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello di Krull R sia un $C_2 FD$ è che per ogni valutazione essenziale v_i di R esista un elemento a_i di R tale che $v_i(a_i) > 0$ e $v_j(a_i) = 0$.*

Dimostrazione. Sia v_i una valutazione essenziale e $\mathcal{P}_i$ il relativo ideale primo di altezza uno di R. Essendo R un dominio C_2FD si ha $\mathcal{P}_i=\sqrt{p_i}\,(p_i\in R)$. Essendo $p_i\in\mathcal{P}_i$ e $p_i\notin\mathcal{P}_j\,(i\neq j))$, poiché altrimenti $\sqrt{p_i}\subseteq\mathcal{P}_j$, riesce $v_i(p_i)>0$ e $v_j(p_i)=0$ per ogni scelta dell'indice j diverso da i.

Viceversa, sia $\mathcal{P}$ un ideale primo di altezza uno di R e detta v la valutazione essenziale ad esso associata, esiste per ipotesi un elemento a^* di R con $v(a^*)>0$ e $w(a^*)=0$ per ogni altra valutazione essenziale w di R. Esiste, quindi, un unico ideale primo minimale sopra a^* e cioè $\mathcal{P}$, da cui $\mathcal{P}=\sqrt{a^*R}$.

PROPOSIZIONE 2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello di Krull R sia un C_3FD, è che per ogni elemento irriducibile p di R, esista una valutazione essenziale v tale che $v(p)>0$ e $w(p)=0$ per ogni valutazione essenziale w distinta da v.*

Dimostrazione. Poiché R è un C_3FD, essendo p irriducibile di R, l'ideale $\mathcal{P}=\sqrt{p}$ è primo di altezza uno; considerata la valutazione essenziale v associata a $\mathcal{P}$, risulta $v(p)>0$ e $w(p)=0$ per ogni valutazione essenziale w con $w\neq v$.

Viceversa, considerato un elemento irriducibile p di R e detta v la valutazione essenziale tale che $v(p)>0$ e $w(p)=0$ per ogni $w\,(w\neq v)$, sia $\mathcal{P}$ l'ideale primo di altezza uno associato a v. Poiché $\mathcal{P}$ è l'unico ideale primo minimale sopra p, ne deriva $\mathcal{P}=\sqrt{p}$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia R un dominio di Krull. Condizione necessaria e sufficiente affinché R sia un C_3FD è che per ogni elemento p irriducibile di R, esistano una valutazione essenziale v di R ed un elemento q irriducibile di R con $\sqrt{p}=\sqrt{q}$ e $v(q)=1$ e $w(q)=0$ per ogni altra valutazione essenziale w.*

Dimostrazione. Siano R un dominio di Krull C_3FD e p un elemento irriducibile di R. Risulta che $\sqrt{p}=\mathcal{P}$ è un ideale primo di altezza uno e che l'anello $R_{\mathcal{P}}$ è un anello di valutazione discreta. Sia q un generatore di $\mathcal{M}$, unico ideale massimale di $R_{\mathcal{P}}$, che risulti un elemento irriducibile di R; si verifica facilmente l'esistenza di un tale elemento. Essendo q un elemento di $\mathcal{P}$, risulta $\sqrt{q}\subseteq\mathcal{P}$; anzi per l'ipotesi C_3FD e per l'irriducibilità di q, i due ideali coincidono, cioè

$\sqrt{q}=\sqrt{p}$ (1). Si consideri la valutazione essenziale v relativa all'ideale $\mathcal{P}$. Banalmente si verifica che $v(q)=1$ e $w(q)=0$ per ogni altra valutazione essenziale w.

Viceversa sia p un elemento irriducibile di R. Per le ipotesi poste esiste una valutazione essenziale v ed un elemento q irriducibile di R con $\sqrt{q}=\sqrt{p}$ e $v(q)=1$ e $w(q)=0$ $(w \neq v)$. Si verifica facilmente che q è un generatore dell'ideale massimale $\mathcal{M}$ dell'anello di valutazione discreta R_v. Inoltre l'elemento q per le ipotesi sopracitate, appartiene ad un unico ideale primo di altezza uno di R, cioè a $\mathcal{M} \cap R$, da cui

$$\sqrt{q}=\sqrt{p}=\mathcal{M} \cap R \qquad \text{(C. V. D.)}.$$

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un anello R sia un UFD è che sia di Krull e $C_3 FD$.*

Dimostrazione. È ben noto che ogni *UFD* è un anello di Krull verificante la proprietà $C_3 FD$.

Viceversa, per la caratterizzazione degli *UFD* fra i domini di Krull citata all'inizio di questo paragrafo, sia v una valutazione essenziale di R e $\mathcal{P}$ l'ideale primo di altezza uno ad essa relativo. Essendo R un $C_3 FD$ (e quindi un $C_2 FD$) riesce $\sqrt{p}=\mathcal{P}$ per qualche elemento irriducibile p di R. Per la proposizione 3, esiste un elemento q con $v(q)=1$ e $w(q)=0$ per ogni valutazione essenziale w distinta da v e quindi R è un *UFD*.

ESEMPI. Un'immediata conseguenza di questo teorema è che un anello di Krull che non sia *UFD* è necessariamente non $C_3 FD$ e quindi, in particolare, non esistono anelli normali che siano $C_3 FD$ e non *UFD* (crf. [1], esempio 2, § 4).

L'anello degli interi del corpo quadratico $Q(\sqrt{10})$ (i. e. $Z[\sqrt{10}]$) non è un $C_3 FD$. Infatti è ben noto che trattasi di un dominio di Dedekind, non principale (cfr. [5]) e quindi non *UFD*.

Si consideri il corpo K, estensione quadratica di $Q(X)$ con $K=\dfrac{Q(X)[Y]}{(Y^2-2X)}$ ed il suo sottoanello A generato da Z, X e y, dove y è una radice del polinomio Y^2-2X. Si ha che $A=\dfrac{Z[X, Y]}{(Y^2-2X)}$ è uno $Z[X]$-

(1) Da queste considerazioni e dal fatto che $\mathcal{P}$ è il saturato tramite $R-\mathcal{P}$ di qR segue che:

$$ax \in qR \Leftrightarrow \exists\ n \in N \text{ con } x^n \in qR \Leftrightarrow \exists\ m \in N \text{ con } x^m \in pR.$$

modulo libero; si verifica facilmente, utilizzando le norme e le tracce degli elementi di A su $Z[X]$, che A è normale di dimensione di Krull uguale a due. Parimenti, tramite le norme, ed il fatto « essenziale » che è nota la divisibilità in $Z[X]$ (2), si ha che $y^2 = 2X$ sono due fattorizzazioni distinte di uno stesso elemento di A in fattori irriducibili. Essendo A non verificante la proprietà *UFD*, l'anello A non può essere un $C_3 FD$ (3).

§ **3**. Le condizioni svolte nel primo paragrafo, relativamente ad anelli noetheriani, integralmente chiusi, si possono rifare, con lievi modifiche del tutto inessenziali, per domini di Krull non necessariamente noetheriani. Infatti, per quanto attiene all'esistenza delle due famiglie $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, invece di avvalersi del teorema dell'ideale principale di Krull, ci si può riferire alle considerazioni svolte in [6] (pagg. 16-17).

Valgono quindi le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 4. *Se R è un anello di Krull $C_2 FD$, anche $R[x]$ lo è.*

PROPOSIZIONE 5. *Se R è un anello di Krull $C_3 FD$ (e quindi UFD), anche $R[x]$ lo è.*

COROLLARIO. *Sia R un anello di Krull $C_3 FD$. Ogni polinomio irriducibile di $R[x]$ è primitivo (nel senso $C_3 FD$) e risulta irriducibile in $K[x]$ dove K è il corpo dei quozienti di R.*

Vogliamo ora estendere ai domini $C_2 FD$ e $C_3 FD$ la seguente:

PROPOSIZIONE 6. *Sia R un dominio UFD. L'anello di polinomi $R[x_i]_{i \in I}$, per una qualunque famiglia di indeterminate, è pure un UFD.* (cfr. [8]).

PROPOSIZIONE 7. *Sia R un dominio di Krull $C_2 FD$ (risp. $C_3 FD$). L'anello di polinomi $R[x_i]_{i \in I}$ è pure un dominio di Krull $C_2 FD$ (risp. $C_3 FD$).*

(2) $Z[X]$ è infatti un *UFD*.

(3) D'altra parte si verifica facilmente che l'ideale $\sqrt{yA}$ non è primo.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $R' = R[x_i]_{i \in I}$ è un dominio di Krull le cui valutazioni essenziali sono le valutazioni discrete v_α di K_I corpo dei quozienti di R', tali che le restrizioni di v_α a $K_{\mathcal{J}}$ (corpo dei quozienti di $R[x_i]_{i \in \mathcal{J}}$) con $\mathcal{J}$ sottinsieme finito di I, risultino valutazioni essenziali o improprie di $R[x_i]_{i \in \mathcal{J}}$. Supposto R un $C_2 FD$ di Krull e v_α una valutazione essenziale di R', esiste un sottinsieme finito $\mathcal{J}$ di I tale che la restrizione di v_α a $R[x_i]_{i \in \mathcal{J}}$ sia una valutazione propria e quindi essenziale. Per la proposizione 1, esiste un elemento f di $R[x_i]_{i \in \mathcal{J}}$ tale che $v_\alpha(f) > 0$ e $w(f) = 0$ per ogni altra valutazione essenziale w di R', in quanto subordina o una valutazione essenziale v_β di $R[x_i]_{i \in \mathcal{J}}$ (e quindi $v_\beta(f) = w(f) = 0$) oppure una valutazione impropria.

§ 4. In questo paragrafo vogliamo studiare per un dominio R di Krull $C_2 FD$, il « comportamento » di un polinomio irriducibile di $R[x]$. Nel caso dei $C_3 FD$, il problema è completamente risolto dal corollario del paragrafo terzo e dalla seguente:

PROPOSIZIONE 8. *Siano R un anello normale e $g(x)$ un polinomio di grado positivo di $R[x]$. L'ideale $g(x) R[x]$ risulta primo se e soltanto se $g(x) K[x]$ è primo e l'ideale frazionario α^{-1}, dove α è l'ideale di R generato dai coefficienti di $g(x)$, coincide con R.* (*cfr.* [7]).

Relativamente ai $C_2 FD$ si può invece enunciare il seguente:

TEOREMA 4. *Siano R un dominio $C_2 FD$, normale e $g(x)$ un polinomio a coefficienti in R di grado positivo. Detto α l'ideale di R generato dai coefficienti di $g(x)$, condizione necessaria e sufficiente affinché $\sqrt{g(x) R[x]}$ risulti primo è che $\sqrt{g(x) K[x]}$ sia primo e $\alpha^{-1} = R$* (4).

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che l'ideale $\sqrt{g(x) K[x]}$ coincide con $R^{*-1} \sqrt{g(x) R[x]}$ ($R^* = R - \{0\}$) e che quindi $\sqrt{g(x) K[x]} \cap R[x]$ risulta il saturato, tramite il sistema moltiplicativamente chiuso R^*, dell'ideale $\sqrt{g(x) R[x]}$.

(4) Si ricorda che in un dominio noetheriano R, detto α un ideale non nullo e non improprio di R, l'ideale divisoriale α^{-1} coincide con R se e solo se prof $(\alpha) \geq 2$. (cfr. [2]).

Supposto che $\sqrt{gR[x]}$ non sia primo e che $\sqrt{gK[x]}$ sia primo, esiste, per quanto ricordato sopra, un elemento $h(x) \notin \sqrt{gR[x]}$ e $h(x) \in \sqrt{gK[x]} \cap R[x]$, ovvero un elemento $a \in R^*$ tale che $ah(x) \in \in \sqrt{gR[x]}$. Esiste quindi un intero $s \in N$ tale che $a^s \cdot h(x)^s = g(x) f(x)$ $(f(x) \in R[x])$. Detti b_j i coefficienti del polinomio $f(x)$, esiste un elemento $b_{\bar{j}}$ non divisibile per a^s (perché altrimenti $h(x)$ apparterrebbe a $\sqrt{gR[x]}$). Essendo R un anello normale, poiché $a^s \mid g(x) f(x)$, detti c_i i coefficienti di $g(x)$, si ha $a^s \mid c_i b_j$ per ogni scelta degli indici i e j; in particolare $a^s \mid c_i b_{\bar{j}}$ per ogni scelta dell'indice i. L'elemento $b_{\bar{j}}/a^s$ appartiene ad α^{-1} ma non ad R.

Viceversa sia $\sqrt{gR[x]}$ primo. Facilmente si verifica che $\sqrt{gK[x]}$ è pure primo e che esiste un unico ideale primo di altezza uno contenente $g(x)$ in $R[x]$, che necessariamente appartiene alla famiglia $\mathcal{G}$ (5).

Se ora l'ideale divisoriale $\tilde{\alpha}$ associato ad α risultasse proprio (a norma della prop. 8 del § 1 di [6]), ammetterebbe una decomposizione primaria del tipo $\cap \mathcal{P}_i^{(m_i)}$ con $\mathcal{P}_i$ ideali primi di altezza uno di R. Ne risulterebbe che $g(x)$ non è primitivo. (c. v. d.)

Come conseguenza del precedente teorema, un polinomio $g(x)$ irriducibile di $R[x]$ dove R è un dominio normale $C_2 FD$, potrebbe risultare non primitivo (qualora $\alpha^{-1} \supsetneqq R$ oppure equivalentemente prof $\alpha < 2$) oppure, anche se primitivo, potrebbe possedere una decomposizione in fattori irriducibili in $K[x]$ in cui intervengono fattori irriducibili primi fra loro. Nei casi or ora esposti, risulterebbe $\sqrt{g(x) R[x]}$ non primo.

(5) Infatti se $g(x) \in \bar{Q} = \sqrt{pR[x]}$ $(p \in R)$, ovvero $\bar{Q} \in \mathcal{F}$, considerata la valutazione discreta $\nu_{\bar{Q}}$ e posto $\nu_{\bar{Q}}(g(x)) = m$, $\nu_{\bar{Q}}(p) = n$, l'elemento $g(x)^n/p^m$ risulterebbe un elemento unitario di $R[x]$ e quindi di R (assurdo).

BIBLIOGRAFIA

[1] STAGNARO E., *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale,* Ann. Univ. Ferrara Sez. VII, Vol. XIX (1974), 157-179.

[2] KAPLANSKY I., *Commutative rings,* Univ. Chicago Press (1974).

[3] NORTHCOTT D. G., *Lessons on rings, modules and multiplicities,* Cambridge Press, (1968).

[4] ZARISKI O., SAMUEL P., *Commutative Algebra Vol. II,* Van Nostrand (1960).

[5] SAMUEL P., *Théorie algébrique des nombres,* Hermann (1967).

[6] BOURBAKI N., *Algèbre commutative Ch. 7 - Diviseurs,* Hermann (1965).

[7] VASCONCELOS W. V., *Divisor theory in module categories,* North-Holland (1974).

[8] COHN P. M., *Unique factorization domains,* Am. Math. Monthly Vol. 80 (1973).