DESCRIPTION DES SOMMANDS DE QUELQUES ENSEMBLES CONVEXES (*)

par JACQUES BAIR (à Liège) (**)

SOMMARIO. - *In uno spazio vettoriale, A, B e C siano tre convessi tali che* $A + B = C$. *In questo articolo, si considera il problema seguente: se conosciamo C, è possibile ottenere insegnamenti a proposito di A o B? Rispondiamo di si a questa domanda nei casi particolari più importanti.*

SUMMARY. - *In a real vector space, let A, B and C be convex sets such that* $A + B = C$. *The problem we consider in this note is the following: if we know the set C, it is possible to get indications about A or B? We answer this question in the most important particular cases.*

Introduction.

Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un espace vectoriel E, l'addition de Minkowski se définit par $A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$. Bien que très ancienne, cette notion est l'objet de nombreuses recherches à l'heure actuelle. Par exemple, Klee montre que certaines propriétés dont jouissent A et B sont également satisfaites par $A+B$ [8]; Jongmans recherche des lois qui permettent de simplifier par A l'égalité $A+B=$ $=A+C$ [9] et se demande quand la somme d'une face de A et d'une face de B est une face de $A+B$ [10]; rappelons aussi que d'autres auteurs, tels Geivaerts, Meyer, Sallee, Shephard et Silvermann, veulent savoir quand un ensemble convexe C peut s'écrire sous la forme $A+B$, où A et B ne sont pas des dilatés positifs de C.

(*) Pervenuto in Redazione il 15 gennaio 1977.

(**) Indirizzo dell'Autore: Institut de Mathématique, Université de Liège, 15, avenue des Tilleuls, B-4000 Liège (Belgium).

Pour notre part, nous nous sommes déjà penché sur le problème suivant: si un convexe donné C est la somme de Minkowski de deux convexes A et B, de quels renseignements dispose-t-on sur A et B ?

Nous avons déjà apporté quelques éléments de réponse à cette question en considétant les cas où C est un polytope [3] et un polyèdre convexe [4] d'un espace euclidien de dimension finie. Nous voudrions aujourd'hui envisager d'autres possibilités pour C, notamment considérer les ensembles qui ont joué un rôle essentiel dans les travaux de Klee et Jongmans cités ci-dessus; c'est ainsi que nous supposerons respectivement C encaqué, continu, algébriquement borné, cerné, serré, algébriquement ouvert et strictement convexe: nous essayerons alors de voir si les sommands de C jouissent de ces mêmes propriétés.

Sauf mention explicite du contraire, nous nous placerons constamment dans un espace vectoriel réel de dimension arbitraire et reprendrons la terminologie et les notations de [5]; de plus, nous supposerons toujours que les ensemble considérés A, B et C sont des convexes non vides de l'espace dans lequel ils sont plongés, tels que A et B soient des sommands associés de C, c'est-à-dire tels que $A+B=C$.

1. Plaçons-nous tout d'abord dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Jongmans vient de mettre en évidence les ensembles *encaqués*, c'est-à-dire les parties convexes dont toute image par une application linéaire est algébriquement fermée ou, de façon équivalente, dont toutes les projections (c'est-à-dire toutes les images par une application linéaire) sont fermées [10].

Il se peut fort bien que C soit encaqué, sans que A et B ne le soient; ainsi, dans le plan $\mathbb{R}^2$. considérons l'épigraphe A de la fonction réelle f: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } 0<x\leq 1 \\ 1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

et l'épigraphe B de la fonction réelle g: $]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} \text{ si } -1\leq x<0 \\ 1 \text{ si } x\leq -1: \end{cases}$$

A et B ne sont visiblement pas encaqués, alors que $C=A+B$ est un demi-espace fermé du plan et de ce fait encaqué. Néanmoins, nous disposons de ce résultat:

PROPOSITION 1. *Dans* $\mathbb{R}^d$, *si* C *est encaqué et* B *borné,* A *est encaqué.*

Preuve. Pour une projection quelconque π, on a $\pi(C)=\pi(A)+\pi(B)$. Comme π (C) est fermé et π (B) borné, π (A) est nécessairement fermé en vertu de la première proposition de [4].

2. Restons dans $\mathbb{R}^d$ et considérons des ensembles qui jouent un rôle très important dans la théorie de la séparation de deux convexes: il s'agit des ensembles continus définis par Klee comme des convexes fermés dont la fonction d'appui (prenant éventuellement les valeurs $\pm\infty$) est continue sur la spère unitaire de $\mathbb{R}^d$ [8]; Gale et Klee ont démontré qu'un convexe fermé est continu si et seulement s'il est encaqué et ne contient aucune demi-droite dans sa frontière [11; p. 135], ou encore si et seulement s'il ne contient aucune demi-droite dans sa frontière, ni aucune demi-droite asymptote (une demi-droite D est asymptote de A si elle est disjointe de A et sa distance euclidienne à A est nulle) [8; 1.3, p. 381]. Cette dernière version de la définition est la plus maniable et elle permet de définir une notion voisine, mais plus générale: il s'agit des ensembles *relativement continus,* c'est-à-dire des convexes qui ne contiennent aucune demi-droite dans leur marge, ni aucune demi-droite asymptote. Bien entendu, ces deux notions coïncident lorsque l'ensemble considéré est fermé et a pour enveloppe linéaire l'espace tout entier; la première correspond en fait à la notion de topologiquement continu exploitée dans [2] et est donc équivalente à celle de proprement parabolique [2; 6.2, p. 437]; quant à la seconde, elle ne diffère des ensembles continus ou paraboliques au sens de l'article [2; p. 436] que par le caractère algébriquement fermé de l'ensemble considéré.

Malheureusement, un sommand d'un ensemble (relativement) continu n'est pas forcément (relativement) continu; par exemple, dans le plan, pour $A=[-1,1]\times[0,+\infty[$ et $B=\{(x_1,x_2)\colon x_2\geq x_1^2\}$, $A+B$ est (relativement) continu au contraire de A. Toutefois, on obtient encore un résultat positif pour tout sommand d'un (relativement) continu associé à un borné:

PROPOSITION 2. *Dans* $\mathbb{R}^d$, *si* C *est continu* (resp. *relativement continu*) *et* B *borné,* A *est continu* (resp. *relativement continu*).

Preuve. Occupons-nous tout d'abord du cas continu. Comme tout ensemble continu est fermé par définition même, $C=A+B$, ce qui nous permet de supposer B compact.

Montrons en premier lieu que A ne peut contenir aucune demi-droite dans sa frontière. En effet, une telle demi-droite D serait incluse dans un hyperplan de contact H de A: en d'autres termes, il existerait une forme linéaire f non nulle sur $\mathbb{R}^d$ et un réel α tels que

$$f(D)=\{\alpha\} \text{ et } A\subset\{x\in\mathbb{R}^d : f(x)\leq\alpha\}.$$

Comme B est compact, on peut trouver des réels β_1, β_2 et des points x_1, x_2 de B tels que

$$\beta_1=f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)=\beta_2, \quad \forall x\in B.$$

Dans ces conditions, x_2+D est une demi-droite contenue dans $\dot{A}+B\subset\overline{A}+B=C$; bien plus, comme

$$f(x)\leq\alpha+\beta_2, \quad \forall\ x\in C$$

et

$$f(x)=\alpha+\beta_2, \quad \forall\ x\in x_2+D,$$

x_2+D est contenue dans $\dot{C}$, ce qui contredit le caractère continu de C.

Par ailleurs, A est encaqué, puisque C l'est (Proposition 1). Dès lors, A est continu.

Considérons à présent le cas relativement continu. On démontre comme dans la première partie de cette preuve que ${}^mA$ ne peut contenir aucune demi-droite: il suffit en effet de remplacer B par $\overline{B}$ et de prendre pour H un vrai hyperplan de contact de A [1; 7.2, p. 220]: $\{x\in \mathbb{R}^d: f(x)=\alpha+\beta_2\}$ est alors un vrai hyperplan de contact de C, et de ce fait disjoint de ${}^iC$ [1; 7.1, p. 220]; partant, la demi-droite x_2+D est cette fois contenue dans $\overline{C}\setminus{}^iC={}^mC$, ce qui est de nouveau absurde. Enfin, il nous reste à vérifier que A ne peut posséder aucune demi-droite asymptote, ce qui pourrait être fait en adaptant le raisonnement formulé dans le cas continu. Nous préférons néanmoins en donner une preuve directe.

Supposons qu'il existe une demi-droite D' asymptote de A. Il existe un hyperplan H' qui sépare franchement D' et A, qui est nécessairement parallèle à ${}^1D'$ [2; 4.2, p. 433] et qui contient D' (sinon la séparation serait forte et la distance de A à D' ne serait pas nulle); en d'autres termes, on peut trouver une forme linéaire f' non nulle sur $\mathbb{R}^d$ et un réel α' tels que

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f'(x) \leq \alpha'\} \text{ et } f'(A) \mp \{\alpha'\} = f'(D').$$

Par ailleurs, il existe un point b en lequel f' atteint son maximum sur $\overline{B}$. Dès lors,

$$C \subset \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^d : f'(x) \leq \alpha' + f'(b)\} \text{ et } f'(C) \mp \alpha' + f'(b);$$

de plus, $\overline{C}$ est disjoint de $H^* = {}^m\Sigma$, sinon une demi-droite serait incluse dans $\overline{C} \cap H^*$ [5; I.3.5, p. 8 et 2; 5.1, p. 434], donc dans ${}^mC$, ce qui est impossible. Or, la demi-droite $b + D'$ est incluse dans H^* et telle que $0 \in \overline{A + \overline{B} - (b + D')} = \overline{C - (b + D')}$, d'où la distance de D' à C est nulle; ainsi, $b + D'$ est une demi-droite asymptote de C, ce qui est absurde.

Nous allons désormais travailler dans un espace vectoriel réel E de dimension arbitraire, et y mettre en évidence un fait intéressant, à savoir que les notions proches du caractère borné d'un ensemble donnent de beaux résultats quant au problème qui nous préoccupe.

Rappelons brièvement quelques définitions.

Un ensemble A est *algébriquement borné* si son cône asymptote C_A se réduit à $\{0\}$ [2; p.. 436]; A est *cerné* quand, pour toute forme linéaire f sur E, $f(A)$ est majoré (ou, de façon équivalente, borné) dans $\mathbb{R}$ [9; p. 530]; A est *serré* quand toute forme linéaire sur E atteint un maximum (donc aussi un minimum) sur A [9; p. 532]; A est insérable dans la direction dé finiepar une droite D ou, plus simplement, *D-insérable* s'il est contenu dans une bande limitée par deux hyperplans parallèles entre eux et non parallèles à D [7; p. 818]; enfin, A est *insérable* s'il est D-insérable pour toute direction de droite D [7; p. 819].

Avec ces définitions, on obtient l'énoncé suivant:

Proposition 3. *Tout sommand d'un ensemble algébriquement borné* (resp. *cerné, serré, D-insérable, insérable*) *C jouit de la même propriété.*

Preuve. La première partie de l'énoncé est réglée par la formule

$$C_A + C_B \subset C_{A+B} \quad [2;\ 3.9,\ \text{p. } 435].$$

Les autres cas découlent de l'égalité

$$f(A+B) = f(A) + f(B)$$

valable pour toute forme linéaire f sur E et toutes parties A, B de E, ainsi que du fait que tout sommand d'un intervalle borné (resp. compact) de $\mathbb{R}$ est lui-même borné (resp. compact).

Remarque. Il est assez facile de constater que l'hypothèse de convexité sur l'ensemble C peut être supprimée dans l'énoncé précédent.

4. Coquet et Dupin caractérisent l'adhérence de certains ensembles convexes d'un espace vectoriel topologique [6; Théor. 2, p. 290]: ils supposent l'espace c-régulier (c'est-à-dire tel que, pour tout convexe fermé C et tout point $p \notin C$, il existe un convexe ouvert K contenant p et disjoint de C) ou l'ensemble convexe doué de points intérieurs.

Nous sommes en mesure de donner une version purement vectorielle de ce théorème: elle ne réclame aucune hypothèse sur l'espace vectoriel ni sur l'enveloppe linéaire de l'ensemble convexe considéré.

PROPOSITION 4. *Soient A une cellule convexe (c'est-à-dire un ensemble convexe doué de points internes) et B un ensemble cerné tels que $C = A + B$ contienne une demi-droite D; ${}^bA$ et ${}^iA$ sont formés de demi-droites translatées de D.*

PREUVE. Remarquons tout d'abord que ${}^bA$ est algébriquement fermé et doué de points internes [5; I.6.4, p. 15].

Soient $D = [x_0 \colon x_0 + u)$ la demi-droite contenue dans C et x_1 un point quelconque de ${}^bA$; montrons que la demi-droite $D_1 = [x_1 \colon x_1 + u)$ est incluse dans ${}^bA$. Si tel n'était pas le cas, il existerait un demi-espace fermé $\{x \in E \colon f(x) \leq \alpha\}$ contenant ${}^bA$ mais non D_1, puisque ${}^bA$ est l'intersection de demi-espaces fermés [1; 7.7, p. 221]. On aurait $f(u) > 0$ et $f(B)$ borné dans $\mathbb{R}$; il existerait alors un réel β tel que $C \subset A + {}^bB \subset$ $\subset \{x \in E \colon f(x) \leq \beta\}$. Comme $f(u) > 0$, D ne serait pas contenu dans $\{x \in E \colon f(x) \leq \beta\}$, ce qui est absurde. En conclusion, ${}^bA$ est une réunion de demi-droites translatées de D; ${}^iA$ jouit de cette même propriété grâce au résultat I. 3.6 de [5; p. 8].

5 Si l'on s'enquiert des décompositions d'un ensemble algébriquement ouvert en des sommands algébriquement ouverts, quelques exemples simples du plan sont peu encourageants: ainsi, l'ensemble algébriquement ouvert $C =]0, 2[\times]-1, 1[$ peut s'écrire comme la somme des deux convexes $A = (]0, 1[\times [0, 1[)$ et $B = (]0, 1[\times]-1, 0])$ qui ne sont pas algébriquement ouverts. Par contre, si l'on suppose serré un des deux sommands, on obtient des renseignements très précis sur l'autre sommand, à savoir:

PROPOSITION 5. *Si C est algébriquement ouvert, B serré et A doué de points internes, A est algébriquement ouvert et les sous-espaces vectoriels parallèles à ${}^1A$ et ${}^1C$ coïncident; en particulier, si, de plus, C est proprement ouvert, A est lui aussi proprement ouvert.*

Preuve. On peut supposer A distinct d'un singlet.

Supposons tout d'abord que A ne soit pas algébriquement ouvert; il existe un point x_0 dans $A \cap {}^nA \subset A \cap {}^mA$ [5; I. 7.5, p. 21]. Par x_0 passe un vrai hyperplan d'appui H de A [1; 7.2, p. 220]; en d'autres termes, il existe une forme linéaire f non nulle sur E et un réel α tels que

$$A \subset \{x \in E\colon f(x) \leq \alpha\} \text{ et } f(x_0) = \alpha;$$

de plus, A contient un point x_1 pour lequel $f(x_1) < \alpha$.

Comme, par hypothèse, B est serré, on peut trouver un point $x_2 \in B$ et un réel β tels que

$$f(x_2) = \beta \text{ et } f(B) \subset]-\infty, \beta].$$

Dans ces conditions,

$$f(C) \subset]-\infty, \alpha+\beta],\ x_0+x_2 \in C \cap \{x \in E\colon f(x) = \alpha+\beta\}$$

et

$$x_1+x_2 \in C \cap \{x \in E\colon f(x) < \alpha+\beta\}.$$

Comme C est algébriquement ouvert, la droite $D=(x_0+x_2\colon x_1+x_2)$ insère x_0+x_2 dans C, ce qui est absurde puisque D contiendrait alors des points de C dans le demi-espace ouvert $\{x \in E\colon f(x) > \alpha+\beta\}$. En conclusion, A est algébriquement ouvert.

Montrons à présent que les sous-espaces vectoriels $({}^1A)_0$ et $({}^1C)_0$ parallèles respectivement à ${}^1A$ et ${}^1C$ coïncident. Quitte à effecteur une translation, nous pouvons toujours supposer que l'origine est interne à B, puisque B est un convexe non vide de dimension finie [9; Prop. 1, p. 530]. Il est clair que

$$({}^1A)_0 \subset {}^1B + ({}^1A)_0 = ({}^1C)_0.$$

Si $({}^1A)_0$ ne coïncide pas avec $({}^1C)_0$, on peut trouver un point p dans $({}^1B) \setminus ({}^1A)_0$. Désignons par H' un hyperplan homogène de E qui inclut $({}^1A)_0$, mais ne contient pas le point p; on peut écrire H' sous la forme

$$H' = \{x \in E\colon f'(x) = 0\},$$

où f' est une forme linéaire non nulle sur E, telle que $f'(p)=1$. Il existe des réels α', β_1 et β_2 tels que

$$f'(A)=\{\alpha'\},\ f'(B)=[\beta_1, \beta_2];$$

de plus, $\beta_1<\beta_2$ puisque $0\in {}^iB$ et $p\notin H'$. Dans ces conditions,

$$f'(C)=f'(A+B)=[\alpha'+\beta_1, \alpha'+\beta_2],$$

ce qui est absurde puisque l'image par f' d'un ensemble algébriquement ouvert est algébriquement ouverte [5; I. 10.8, p. 42]. Dès lors, $({}^1A)_0=({}^1C)_0$.

Maintenant, si C est proprement ouvert, $({}^1C)_0=E=({}^1A)_0$, d'où A est lui aussi proprement ouvert.

Remarques. *a*) Un examen attentif de cette preuve montre que l'hypothèse ${}^iA\neq\emptyset$ n'est pas indispensable pour avoir $({}^1A)_0=({}^1C)_0$; elle semble néanmoins naturelle pour démontrer que A est algébriquement ouvert. En effet, il existe (dans un espace vectoriel de dimension infinie, bien sûr) des convexes A et B tels que ${}^i(A-B)\neq\emptyset$, ${}^iA={}^iB=\emptyset$, ${}^{i(V)}A\neq\emptyset$ et ${}^{i(W)}B\neq\emptyset$ pour deux sous-espaces vectoriels V, W de E dont la somme redonne $({}^1A)_0+({}^1B)_0$ [12]: dans ces conditions, $C={}^i(A-B)$ est un convexe algébriquement ouvert [5; I.2.2, p. 12] qui peut s'écrire sous la forme $C^{i(V)}=A-{}^{i(W)}B$ [1], alors que ${}^i[{}^{i(V)}A]\cap {}^i[{}^{i(W)}B]=\emptyset$, puisque ${}^1[{}^{i(V)}A]={}^1A$, ${}^1[{}^{i(W)}B]={}^1B$, ${}^{i(V)}A\subset A$ et ${}^{i(W)}B\subset B$ entraînent ${}^i[{}^{i(V)}A]\subset{}^iA=\emptyset$ et ${}^i[{}^{i(W)}B]\subset{}^iB=\emptyset$.

b) Si B n'est pas serré, $({}^1A)_0$ ne coïncide pas nécessairement avec $({}^1C)_0$; pour preuve, dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles $A=]0,1[\times\{0\}$, $B=\{0\}\times]0,1[$ et $C=A+B=]0,1[\times]0,1[$.

6. Jongmans [9] a également mis en lumière l'importance des ensembles strictement convexes, c'est-à-dire des ensembles convexes qui ne possèdent dans leur marge aucun segment vrai.

En général, un sommand d'un ensemble strictement convexe n'est pas strictement convexe; ainsi, dans le plan $B=C=\{(x_1, x_2): x_1>0, x_2>0, x_1 x_2\geq 1\}$ sont strictement convexes au contraire de $A=[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, alors que $A+B=C$. Encore une fois, si l'on fait appel à un sommand cerné d'un ensemble strictement convexe, son sommand associé sera strictement convexe; de façon plus précise:

Proposition 6. *Si C est strictement convexe, B cerné et A doué de points internes, A est strictement convexe.*

Preuve. Procédonc par l'absurde et supposons que la marge ${}^mA$ de A contienne un segment vrai S. Comme l'internat de A n'est pas vide, il existe un vrai hyperplan de contact H de A qui contient S [1; 7.2, p. 220], c'est-à-dire une forme linéaire non nulle f sur E et un réel α tels que

$$f(S)=\{\alpha\},\ A \not\subset f^{-1}(\{\alpha\}) \text{ et } A \subset \{x \in E\colon f(x) \leq \alpha\}.$$

Le caractère cerné de B nous garantit que $\bar{B}$ est compact (comme borné fermé de dimension finie [9; Prop. 1, p. 530]), d'où l'existence de réels β et β' tels que

$$f(B) \subset f(\bar{B}) = [\beta', \beta];$$

de plus, on peut trouver un point b de ${}^b\bar{B}=B$ [5; V. 1.4, p. 161] dont l'image par f vaut β. L'hyperplan $H'=\{x \in E\colon f(x)=\alpha+\beta\}$ est visiblement un vrai hyperplan de contact de C, qui contient le segment $b+S$; or, ce dernier est inclus dans ${}^bB+A \subset {}^bC$ [5; I. 8.4. B, p. 34], et, même, dans ${}^mC$ puisque ${}^iC$ est disjoint de H' [1; 7.1, p. 220]. Ceci contredit le caractère strictement convexe de C.

Remarque. Aux ensemble strictement convexes sont souvent associés les ensembles *lisses*, c'est-à-dire les convexes tels que, par tout point de leur marge, passe un hyperplan de contact et un seul. Malheureusement, ces ensembles ne se laissent pas toujours décomposer en des ensembles lisses; comme illustration, citons l'exemple bien connu du disque fermé de $\mathbb{R}^2$, qui peut s'écrire comme la somme de deux lentilles compactes, convexes et non lisses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAIR J., *Nouvelles propriétés des opérateurs algébriques dans un espace vectoriel,* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 40, 1971, pp. 214-223.

[2] BAIR J., *Cônes asyptotes et cônes caractéristiques,* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 40, 1971, pp. 428-437.

[3] BAIR J., *Une mise au point sur la décomposition des convexes,* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 44, 1975, pp. 698-705.

[4] BAIR J., *Une étude des sommands d'un polyèdre convexe,* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 45, 1976, pp. 307-311.

[5] BAIR J. - FOURNEAU R., *Etude géométrique des espaces vectoriels - une introduction,* Lect. Notes in Math., vol. 489, 1975, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York.

[6] COQUET G. - DUPIN J. C., *Quelques propriétés des ensembles convexes linéairement bornés et des ensembles insérables,* Bull. Classes des Sc. Acad. Roy. de Belgique, 57, 1971, pp. 287-295.

[7] COQUET G. - DUPIN J. C., *Quelques propriétés des ensembles convexes linéairement bornés et des ensembles insérables,* Bull. Classes des Sc. Acad. Roy. de Belgique, 57, 1971, pp. 818-826.

[8] GALE D. - KLEE V., *Continuous convex sets,* Math. Scand., 7, 1959, pp. 379-391.

[9] JONGMANS F., *Sur les complications d'une loi de simplification dans les espaces vectoriels,* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 42, 1973, pp. 529-534.

[10] JONGMANS F., *Réflexions sur l'art de sauver la face,* en voie de publication dans Bull. Soc. Roy. Sc. Liège.

[11] KLEE V., *Maximal separation theorems for convex sets,* Trans. Amer. Math. Soc., 134, 1968, pp. 133-147.

[12] VANGELDÈRE J., *On the frank separation of two convex sets,* en voie de publication dans J. Math. Anal. and Appl.