PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI A VARIAZIONE SECONDA LIMITATA IN SENSO GENERALIZZATO (*)

di CANDIDA GORI COCCHIERI e MARCELLO RAGNI (a Perugia) (**)

SOMMARIO. - *Si definisce la variazione seconda generalizzata di una funzione misurabile* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *come integrale alla Burkill-Cesari di una opportuna funzione d'intervallo associata alla* f*, proponendo così un metodo diretto per la sua determinazione. Si esaminano poi varie proprietà delle funzioni a variazione seconda limitata in senso generalizzato.*

SUMMARY. - *We define the second generalized variation of a mesurable function* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *by means of Burkill-Cesari - type integral of a proper interval function, obtaining in this manner a direct method for its calculus. We establish then several properties of bounded second generalized variation functions.*

Introduzione.

È nota la generalizzazione del concetto classico di variazione, data da L. Cesari [5], allo scopo di estendere alle funzioni misurabili le nozioni di lunghezza e di area. Nello spazio delle funzioni misurabili viene così definito un funzionale variazione generalizzata, che si può anche introdurre come prolungamento alla Fréchet della variazione di una poligonale (G. Goffman [8]) e che C. Vinti [14] ha mostrato essere un perimetro alla De Giorgi [7].

(*) Pervenuto in Redazione il 22 novembre 1976.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C. N. R.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico dell'Università degli Studi - 06100 Perugia.

Recentemente M. Boni [2] ha ripreso la definizione di L. Cesari, facendo vedere che tramite questa si ottiene un metodo diretto per determinare la variazione generalizzata con peso di una $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ misurabile. Questo procedimento, che non tiene conto dei valori che la f assume in opportuni sottoinsiemi di $[a, b]$ di misura nulla, trova poi, come ha mostrato lo stesso Boni in [2], un naturale inserimento nella teoria dell'integrale alla Burkill-Cesari.

In questo lavoro, ricollegandoci ancora all'idea originaria di L. Cesari, abbiamo definito la variazione seconda generalizzata $V_g^{(2)}[f]$ di una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ misurabile come la variazione di una funzione d'intervallo associata alla restrizione della f su un dato insieme $E \subset [a, b]$ di misura $b-a$, mostrando poi l'indipendenza di questa definizione dalla scelta dell'insieme E. La funzione presa in considerazione era già stata da noi studiata in un precedente lavoro [9], dove si era definita la variazione seconda (non generalizzata) di una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; ma qui abbiamo preferito sviluppare la teoria in modo completamente autonomo dai risultati contenuti in [9]. Così operando si sono ottenute non solo varie generalizzazioni e miglioramenti di proposizioni già stabilite in [9], ma anche dei risultati che esprimono nuove proprietà delle funzioni misurabili a variazione seconda generalizzata limitata.

Nel primo paragrafo si è tra l'altro provato che nella classe delle funzioni a variazione seconda generalizzata limitata (2-*VGL*) tale variazione $V_g^{(2)}[f]$ è come si è già detto, indipendente dalla scelta dell'insieme E sul quale si considera ristretta la f (Proposizione 3) ed ha una rappresentazione analitica (Proposizione 14) analoga a quella nota per la variazione prima, sia classica (E. Baiada [1], C. Vinti [13]) che generalizzata (C. Vinti [14], M. Boni [2]). La suddetta Proposizione 14 dà un'ulteriore dimostrazione dell'indipendenza di $V_g^{(2)}[f]$ dall'insieme E. Inoltre la stessa variazione seconda generalizzata $V_g^{(2)}[f]$ si può ottenere come integrale alla Burkill-Cesari della funzione d'intervallo associata in due modi diversi, cioè sia rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ di tutte le suddivisioni finite di $[a, b]$ e ad una mesh non ordinaria (Proposizione 10), sia rispetto ad una opportuna sottofamiglia di $\mathcal{D}$ e alla mesh ordinaria (Proposizione 11).

Nel secondo paragrafo abbiamo esaminato alcune proprietà della variazione seconda generalizzata considerata come funzione d'intervallo ed abbiamo stabilito una condizione necessaria e sufficiente affinché una $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ misurabile sia 2-*VGL* (Proposizione 17).

Premesse.

Sia $[a, b]$, $a<b$, un intervallo chiuso, $\{I\}$ la collezione di tutti gli intervalli chiusi non degeneri contenuti in $[a, b]$ e $\mathcal{D}$ la famiglia di tutte le suddivisioni $D\equiv[I]$ di $[a, b]$ costituite da un numero finito di intervalli di $\{I\}$ non socrapponentisi.

Per « *mesh* » su $\mathcal{D}$ (Cfr. L. Cesari, [6]) si intende una qualunque applicazione δ: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ tale che

(d_1) $0<\delta(D)<+\infty$ per ogni $D\in\mathcal{D}$;

(d_2) per ogni $\varepsilon>0$ esiste $D\in\mathcal{D}$ tale che $\delta(D)<\varepsilon$.

Una funzione d'insieme $\Phi(I)$ definita per ogni $I\in\{I\}$ e a valori reali si dice « *quasi additiva* » (Cfr. L. Cesari, [6]) rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh $\delta(D)$ se

(ϕ) per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ tale che se $D_0\equiv[I]$ è un qualunque elemento di $\mathcal{D}$ con $\delta(D_0)<\eta$ allora esiste un $\lambda=$ $=\lambda(\varepsilon, D_0)>0$ tale che per ogni $D\equiv[J]\in\mathcal{D}$ con $\delta(D)<\lambda$ si ha

(ϕ_1) $$\sum_{I\in D_0} \Big|\sum_{J\subset I} \Phi(J)-\Phi(I)\Big|<\varepsilon$$

(ϕ_2) $$\sum_{J\not\subset I} |\Phi(J)|<\varepsilon.$$

Si dice invece che $\Phi(I)$, $I\in\{I\}$, è « *quasi subadditiva* » (Cfr. L. Cesari, [6]) rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh $\delta(D)$ se si verifica una condizione analoga alla (ϕ) con (ϕ_1) e (ϕ_2) sostituite da

(ϕ_3) $$\sum_{I\in D_0} \Big[\sum_{J\subset I} \Phi(J)-\Phi(I)\Big]^-<\varepsilon,$$

dove, se $m\in\mathbb{R}$, $m^-=(|m|-m)/2$.

Si dice poi che $\Phi(I)$, $I\in\{I\}$, è « *quasi subadditiva in senso forte* » se per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $D_0\in\mathcal{D}$ esiste un $\lambda=\lambda(\varepsilon, D_0)>0$ tale che per ogni $D\equiv[J]\in\mathcal{D}$ con $\delta(D)<\lambda$ vale la (ϕ_3).

Si chiama «*integrale alla Burkill-Cesari*» della funzione $\Phi(I)$, $I\in\{I\}$, rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh $\delta(D)$, il limite, se esiste,

$\lim_{\delta(D)\to 0} S(\Phi, D)$, dove $S(\Phi, D) = \sum_{I \in D} \Phi(I)$. Tale limite si denota $V(\Phi)$ e quindi

$$V(\Phi) = \lim_{\delta(D)\to 0} S(\Phi, D).$$

La particolare mesh definita per ogni $D \in \mathcal{D}$ dalla massima ampiezza degli intervalli di D la chiameremo mesh ordinaria.

Diremo che una funzione γ: $[a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ è « $\mathcal{D}$*-ammissibile* » se l'applicazione $\delta_\gamma : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ definita per ogni $D \in \mathcal{D}$, $D \equiv [I_i]$, $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, da

$$\delta_\gamma(D) = \max_{1 \le i \le N} (a_i - a_{i-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} \gamma(a_i)$$

è una mesh su $\mathcal{D}$.

Diremo che $\Phi(I)$, $I \in \{I\}$ è « γ*-subadditiva* » (Cfr. M. Ragni, [10]) se per ogni intervallo $I \in \{I\}$ e per ogni suddivisione di I in un numero finito di intervalli parziali $J_j = [b_{j-1}, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, risulta

$$\Phi(I) \le \sum_{j=1}^{M} \Phi(J_j) + \sum_{j=1}^{M-1} \gamma(b_j).$$

Diremo che $\Phi(I)$, $I \in \{I\}$, è « *continua in prossimità di un punto* » $c \in [a, b]$ (Cfr. M. Ragni, [10]) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma = \sigma(\varepsilon, c) > 0$ tale che per ogni intervallo $I \in \{I\}$ con $I \subset [c - \sigma, c]$ oppure $I \subset [c, c + \sigma]$ risulta $|\Phi(I)| < \varepsilon$.

Diremo che $\Phi(I)$, $I \in \{I\}$, è « *assolutamente continua in prossimità di un punto* » $c \in [a, b]$ (Cfr. M. Ragni [11]) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma = \sigma(\varepsilon, c) > 0$ tale che per ogni numero finito di intervalli $I_i \in \{I\}$ con $I_i \subset [c - \sigma, c]$ oppure $I_i \subset [c, c + \sigma]$ e $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$ per $i \neq j$, risulta

$$\Sigma_i |\Phi(I_i)| < \varepsilon.$$

§ 1.

Sia f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile ed $E \subset [a, b]$ un insieme tale che $m(E) = b - a$. Indichiamo con f_E la restrizione della funzione f all'insieme E. Per ogni intervallo $I = [u, v] \subset [a, b]$, $u < v$, consideriamo la funzione d'intervallo

$$\Phi_{f_E}(I) \equiv \sup_{\substack{\alpha, \beta \in I \cap E \\ \alpha < \beta}} \frac{f_E(\beta) - f_E(\alpha)}{\beta - \alpha} - \inf_{\substack{\alpha, \beta \in I \cap E \\ \alpha < \beta}} \frac{f_E(\beta) - f_E(\alpha)}{\beta - \alpha} .$$

Porremo per semplicità di scrittura

$$R_{f_E}(I) = \sup_{\alpha, \beta \in I \cap E} \frac{f_E(\beta) - f_E(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{e} \quad r_{f_E}(I) = \inf_{\alpha, \beta \in I \cap E} \frac{f_E(\beta) - f_E(\alpha)}{\beta - \alpha} .$$

DEFINIZIONE 1.

Diremo che f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è a « *variazione seconda generalizzata limitata* » (2-*VGL*) in $[a, b]$ se esiste un insieme $E \subset [a, b]$ con $m(E) = b - a$ tale che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_E}, D) < +\infty,$$

dove $S(\Phi_{f_E}, D) = \sum_{I \in D} \Phi_{f_E}(I)$.

PROPOSIZIONE 1.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora f_E è lipschitziana.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che per ogni intervallo $I = [u, v] \subset \subset [a, b]$ con $u < v$ e $u, v \in E$, risulta

$$r_{f_E}(I) \leq \frac{f_E(v) - f_E(u)}{v - u} \leq R_{f_E}(I)$$

e che, essendo la f 2-*VGL*, è $|r_{f_E}(I)| < +\infty$ e $|R_{f_E}(I)| < +\infty$.

In seguito faremo uso della seguente

PROPOSIZIONE 2.

Se f_E è assolutamente continua, per ogni intervallo $I = [u, v] \subset [a, b]$ con $u < v$, u, $v \in E$, esiste un insieme $A \subset I \cap E$ di misura positiva tale che per tutti i punti $p \in A$ risulta

$$\frac{f_E(v) - f_E(u)}{v - u} \leq f_E'(p) \tag{1}$$

e analogamente esiste un insieme $B \subset I \cap E$ di misura positiva tale che per tutti i punti $q \in B$ risulta

$$\frac{f_E(v)-f_E(u)}{v-u} \geq f_E'(q). \tag{1'}$$

Dimostrazione. Se f_E è assolutamente continua è derivabile quasi ovunque in E e risulta per ogni $u, v \in [a, b] \cap E$

$$f_E(v)-f_E(u)=\int_u^v f_E'(x)\, dx.$$

Se l'insieme A dei punti p per i quali vale la (1) fosse di misura nulla, allora quasi ovunque in $[u, v] \cap E$ si avrebbe

$$\frac{f_E(v)-f_E(u)}{v-u} > f_E'(t).$$

Risulterebbe allora

$$\frac{f_E(v)-f_E(u)}{v-u}=\frac{1}{v-u}\int_u^v f_E'(t)\, dt < \frac{f_E(v)-f_E(u)}{v-u}$$

che è assurdo. Si ha quindi $m(A)>0$. Analogamente si prova la (1').

Proposizione 3.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL e se E ed F sono due sottoinsiemi di $[a, b]$ di misura $b-a$ tali che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_E}, D) < +\infty \quad e \quad \sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_F}, D) < +\infty,$$

allora risulta

$$\sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_E}, D)=\sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_F}, D).$$

Dimostrazione. Sia $H=E \cap F$; è $m(H)=b-a$. Per ogni intervallo $I \subset [a, b]$ risulta ovviamente $R_{f_E}(I) \geq R_{f_H}(I)$ e $r_{f_E}(I) \leq r_{f_H}(I)$. Proviamo che $R_{f_E}(I) \leq R_{f_H}(I)$, analoga è la dimostrazione che risulta $r_{f_E}(I) \geq r_{f_H}(I)$. Per ogni $\varepsilon>0$ esistono due punti α, $\beta \in I^0 \cap E$ con $\alpha<\beta$ tali che

$$R_{f_E}(I)-\varepsilon < \frac{f_E(\beta)-f_E(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Per la continuità della funzione f_E (Cfr. Proposizione 1) ed essendo

$m(H)=b-a$, è possibile determinare due punti $\alpha', \beta' \in H \cap I$ con $\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta$ se $R_{f_E}(I)>0$, oppure con $\alpha' \leq \alpha < \beta \leq \beta'$ se $R_{f_E}(I)<0$ (se $R_{f_E}(I)=0$ la dimostrazione è analoga) tali che

$$f_E(\beta)-f_E(\beta')<\frac{\beta-\alpha}{2}\varepsilon \text{ e } f_E(\alpha')-f_E(\alpha)<\frac{\beta-\alpha}{2}\varepsilon.$$

Per l'opportuna scelta che si è fatta per i punti α' e β' si ha

$$\frac{f_E(\beta')-f_E(\alpha')}{\beta-\alpha}=\frac{f_H(\beta')-f_H(\alpha')}{\beta-\alpha}\leq\frac{f_H(\beta')-f_H(\alpha')}{\beta'-\alpha'}$$

e quindi risulta

$$R_{f_E}(I)-\varepsilon<\frac{f_E(\beta)-f_E(\alpha)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{f_E(\beta)-f_E(\beta')+f_E(\beta')-f_E(\alpha')+f_E(\alpha')-f_E(\alpha)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{f_E(\beta)-f_E(\beta')}{\beta-\alpha}+\frac{f_H(\beta')-f_H(\alpha')}{\beta-\alpha}+\frac{f_E(\alpha')-f_E(\alpha)}{\beta-\alpha}<$$

$$<\varepsilon+\frac{f_H(\beta')-f_H(\alpha')}{\beta'-\alpha'}\leq R_{f_H}(I)+\varepsilon,$$

cioè $R_{f_E}(I)\leq R_{f_H}(I)$ per l'arbitrarietà di ε.

È allora $\Phi_{f_E}(I)=\Phi_{f_H}(I)$ per ogni $I\subset[a,b]$ e quindi $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_E},D)=\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_H},D)$. Analogamente si prova che $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_F},D)=\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_H},D)$ e quindi l'asserto.

La Proposizione 3 dimostra che il numero $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_E},D)$, se f è 2-VGL, non dipende dall'insieme E di partenza; è quindi possibile dare la seguente

DEFINIZIONE 2.

Se $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ è 2-VGL ed E è un sottoinsieme di $[a,b]$ di misura $b-a$ tale che $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_E},D)<+\infty$, allora chiameremo « *variazione seconda generalizzata* » della f in $[a,b]$ il numero

$$V_g^{(2)}[f]=\sup_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_E},D).$$

Conseguenze della Proposizione 3 sono i due seguenti risultati.

PROPOSIZIONE 4.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è 2-VGL e se* h: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che* $f=h$ *q. o. in* $[a, b]$, *allora* g *è 2-VGL e risulta* $V_g^{(2)}[f] = V_g^{(2)}[h]$.

La dimostrazione è immediata.

PROPOSIZIONE 5.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è 2-VGL e se* E *è un qualunque sottoinsieme di* $[a, b]$ *di misura* $b-a$, *tale che* f_E *è continua, allora risulta*

$$V_g^{(2)}[f] = \sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_E}, D).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $E \subset [a, b]$ un insieme di misura $b-a$ tale che f_E sia continua e sia $F \subset [a, b]$ un insieme di misura $b-a$ tale che $V_g^{(2)}[f] = \sup_{D \in \mathcal{D}} S(\Phi_{f_F}, D)$. Posto $H = E \cap F$, in modo analogo a quanto fatto nel corso della dimostrazione della Proposizione 3, si prova che per ogni $I \subset [a, b]$ è $\Phi_{f_E}(I) = \Phi_{f_H}(I) = \Phi_{f_F}(I)$ e quindi l'asserto.

Data una funzione f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ 2-VGL, poniamo la nostra attenzione ora nello studio di alcune proprietà della funzione d'intervallo Φ_{f_E}, dove E è un qualunque sottoinsieme di $[a, b]$ di misura $b-a$ tale che f_E è continua.

PROPOSIZIONE 6.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è 2-VGL, allora la funzione d'intervallo* Φ_{f_E} *è continua in prossimità di ogni punto di* $[a, b]$ (Cfr. Premesse).

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che la funzione Φ_{f_E} è continua a destra in prossimità di ogni punto $c \in [a, b[$ e cioè che per ogni $c \in [a, b[$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che se $J \in \{I\}$ è un qualunque intervallo contenuto in $[c, c+\sigma]$, allora risulta $\Phi_{f_E}(J) < \varepsilon$. Analogamente si proverà che Φ_{f_E} è continua a sinistra in prossimità di ogni punto $c \in]a, b]$ e quindi continua in prossimità di ogni punto di $[a, b]$. Fissato un punto $c \in [a, b[$, supponiamo per assurdo che esista un numero $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\nu \in]c, b]$ risulti $\Phi_{f_E}([c, \nu]) > \varepsilon$. Fissato un punto $\nu_0 \in]c, b]$ è allora

$$\Phi_{f_E}([c, \nu_0]) = R_{f_E}([c, \nu_0]) - r_{f_E}([c, \nu_0]) > \varepsilon. \tag{2}$$

Per le proprietà delle operazioni di estremo superiore e di estremo inferiore che definiscono R_{f_E} e r_{f_E} rispettivamente, è possibile determinare quattro punti $\alpha_0', \beta_0', \alpha_0'', \beta_0'' \in [c, \nu_0] \cap E$ con $\alpha_0' < \beta_0'$ e $\alpha_0'' < \beta_0''$ tali che

$$(3) \qquad \frac{f_E(\beta_0') - f_E(\alpha_0')}{\beta_0' - \alpha_0'} - \frac{f_E(\beta_0'') - f_E(\alpha_0'')}{\beta_0'' - \alpha_0''} >$$

$$> R_{f_E}([c, \nu_0]) - r_{f_E}([c, \nu_0]) - \varepsilon/2.$$

Per le Proposizioni 1 e 2 esistono due punti $x_0' \in]\alpha_0', \beta_0'[\cap E$ e $x_0'' \in]\alpha_0'', \beta_0''[\cap E$ tali che

$$(4) \qquad f_E'(x_0') - f_E'(x_0'') > \frac{f_E(\beta_0') - f_E(\alpha_0')}{\beta_0' - \alpha_0'} - \frac{f_E(\beta_0'') - f_E(\alpha_0'')}{\beta_0'' - \alpha_0''}.$$

Posto $\nu_1 = \min\{x_0', x_0''\}$, risulta $c < \nu_1 < \nu_0$ e dalle (2), (3), (4) si ha

$$\Phi_{f_E}([\nu_1, \nu_0]) \geq f_E'(x_0') - f_E'(x_0'') > \varepsilon/2$$

e inoltre è per ipotesi $\Phi_{f_E}([c, \nu_1]) > \varepsilon$.

Iterando il procedimento, si costruisce una successione $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_n > \ldots$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $c < \nu_n$,

$$\Phi_{f_E}([\nu_{n+1}, \nu_n]) > \varepsilon/2, \quad \Phi_{f_E}([c, \nu_n]) > \varepsilon.$$

Ciò contraddice chiaramente il fatto che f è 2-VGL. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\sigma > 0$ tale che $\Phi_{f_E}([c, c+\sigma]) < \varepsilon$. Poiché Φ_{f_E} è monotona non decrescente rispetto alla relazione di inclusione, per ogni intervallo $J \subset [c, c+\sigma]$ risulta $\Phi_{f_E}(J) < \varepsilon$.

Per ogni $c \in [a, b] - E$ poniamo

$$\hat{f}_E(c) = \lim_{x \to c} f_E(x)$$

(è facile provare che tale limite esiste).

Proposizione 7.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, per ogni $c \in E$ esistono finiti i limiti

$$D_d[f_E(c)] = \lim_{x \to c^+} \frac{f_E(x) - f_E(c)}{x - c} \quad e \quad D_s[f_E(c)] = \lim_{x \to c^-} \frac{f_E(x) - f_E(c)}{x - c}$$

(con $c < b$ nel primo e $c > a$ nel secondo); *e per ogni* $c \in [a, b] - E$

esistono finiti i limiti

$$\hat{D}_d\,[f_E(c)] = \lim_{x \to c^+} \frac{f_E(x) - \hat{f}_E(c)}{x - c} \quad e \quad \hat{D}_s\,[f_E(c)] = \lim_{x \to c^-} \frac{\hat{f}_E(x) - f_E(c)}{x - c}$$

(con $c < b$ nel primo e $c > a$ nel secondo).

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che esiste finito il numero $D_d\,[f_E(c)]$, analoga è la dimostrazione relativa a $D_s\,[f_E(c)]$. Sia $c \in [a, b[\, \cap E$. Per ogni coppia di punti $x', x'' \in [c, v] \cap E$ con $c < v \leq b$ risulta

$$\left| \frac{f_E(x') - f_E(c)}{x' - c} - \frac{f_E(x'') - f_E(c)}{x'' - c} \right| \leq \Phi_{f_E}([c, v]).$$

L'asserto segue allora immediatamente dalla Proposizione 6. La dimostrazione dell'esistenza finita dei numeri $\hat{D}_d\,[f_E(c)]$ e $\hat{D}_s\,[f_E(c)]$ è analoga alla precedente osservando che per ogni $c \in [a, b] - E$ e per ogni $\bar{x} \in E$ è

$$\frac{f_E(\bar{x}) - \hat{f}_E(c)}{\bar{x} - c} = \lim_{x \to c} \frac{f_E(\bar{x}) - f_E(x)}{\bar{x} - x}.$$

Per ogni $x \in [a, b]$ definiamo la seguente funzione

$$\gamma(x) = \begin{cases} |D_d\,[f_E(x)] - D_s\,[f_E(x)]| & \text{se } x \in E \\ |\hat{D}_d\,[f_E(x)] - \hat{D}_s\,[f_E(x)]| & \text{se } x \in [a, b] - E \end{cases} \tag{5}$$

PROPOSIZIONE 8.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora risulta $\gamma(x) = 0$ in $[a, b]$ a meno di una infinità numerabile di punti.

La dimostrazione è analoga a quella fatta per provare le (a_2) e (a_3) del Teorema 10 di [9]. Pure analogamente al Lemma 2 di [9] si dimostra la seguente

PROPOSIZIONE 9.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora la funzione d'intervallo Φ_{f_E} è γ-subadditiva.

PROPOSIZIONE 10.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora la funzione d'intervallo $\Phi_{f_E}(I)$, $I \in \{I\}$, è quasi additiva rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh

$$\delta_\gamma (D) = \max_i \{(a_i - a_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{N-1} \gamma (a_i)$$

(dove $D \in \mathcal{D}$, $D \equiv [I_i]$, $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$); *inoltre esiste finito l'integrale alla Burkill-Cesari*

$$V_\gamma (\Phi_{f_E}) = \lim_{\delta_\gamma(D) \to 0} S (\Phi_{f_E}, D)$$

e risulta $V_\gamma (\Phi_{f_E}) = V_g^{(2)} [f]$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 8 la funzione γ definita in (5) è $\mathcal{D}$-ammissibile (Cfr. Premesse). Allora in virtù delle Proposizioni 6 e 9, dalla Proposizione 3 di [10] segue che la Φ_{f_E} è quasi subadditiva in senso forte rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh $\delta_\gamma (D)$. Da ciò segue (L. Cesari, [6], Remark pag. 98) che esiste $V_\gamma (\Phi_{f_E})$ e risulta

$$V_\gamma (\Phi_{f_E}) = \sup_{D \in \mathcal{D}} S (\Phi_{f_E}, D) = V_g^{(2)} [f];$$

inoltre (L. Cesari, [6], 2. v pag. 97) la Φ_{f_E} è quasi additiva rispetto alla famiglia $\mathcal{D}$ e alla mesh $\delta_\gamma (D)$.

Nella Proposizione 10 si è visto che la variazione seconda generalizzata di una funzione 2-VGL è uguale all'integrale alla Burkill-Cesari della funzione d'intervallo Φ_{f_E} e tale integrale è stato ottenuto operando con una mesh non ordinaria. È possibile in questo caso operare anche con la mesh ordinaria, purché si consideri una opportuna restrizione della famiglia $\mathcal{D}$.

Sia $N = \{x \in [a, b] : \gamma (x) \neq 0\}$. Per la Proposizione 8, N è al più numerabile e consideriamo l'insieme $M = [a, b] - N$. Indicata con $\mathcal{D}_M = \{D_M\}$ la famiglia di tutte le suddivisioni di $[a, b]$ in un numero finito di intervalli i cui estremi appartengono ad M, sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 11.

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è 2-VGL ed è* $M = \{x \in [a, b] : \gamma (x) = 0\}$ *allora esiste finito il limite*

$$V^{(M)} (\Phi_{f_E}) = \lim_{\delta(D_M) \to 0} S (\Phi_{f_E}, D_M)$$

(dove δ è la mesh ordinaria su $\mathcal{D}_M$) *e risulta*

$$V^{(M)} (\Phi_{f_E}) = V_\gamma (\Phi_{f_E}) = V_g^{(2)} [f].$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché la f è 2-VGL, esiste una costante $H>0$ tale che risulta $\gamma(x)\leq M$ per ogni $x\in[a,b]$. Consideriamo la funzione

$$\bar{\gamma}(x)=\begin{cases} H & \text{se } x\in[a,b]-M \\ 0 & \text{se } x\in M \end{cases}$$

che è $\mathcal{D}$-ammissibile (Cfr. Premesse) essendo $m(M)=b-a$. Per la Proposizione 12 di [11], essendo $\gamma(x)\leq\bar{\gamma}(x)$ per ogni $x\in[a,b]$, esiste $V_{\bar{\gamma}}(\Phi_{f_E})$ e risulta $V_{\bar{\gamma}}(\Phi_{f_E})=V_\gamma(\Phi_{f_E})$. D'altra parte per ogni $D\in\mathcal{D}$ con $\delta_{\bar{\gamma}}(D)<H$ risulta $D\in\mathcal{D}_M$ e quindi si ha

$$V^{(M)}(\Phi_{f_E})=\lim_{\delta(D_M)\to 0} S(\Phi_{f_E},D_M)=\lim_{\delta_{\bar{\gamma}}(D)\to 0} S(\Phi_{f_E},D)=$$

$$=V_{\bar{\gamma}}(\Phi_{f_E})=V_\gamma(\Phi_{f_E}).$$

Se f è 2-VGL ed E un insieme contenuto in $[a,b]$ di misura $b-a$ tale che f_E è continua, per le Proposizioni 5 e 1 f_E è derivabile quasi ovunque, cioè esiste un sottoinsieme F di $[a,b]$ di misura $b-a$ tale che f_F è derivabile e risulta inoltre

$$V_g^{(2)}[f]=\sup_{D\in\mathcal{D}} S(\Phi_{f_F},D).$$

Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 12.

Se $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ è 2-VGL ed F è un sottoinsieme di $[a,b]$ di misura $b-a$, tale che f_F è derivabile, allora f_F' è continua.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto $c\in F$, $c\neq b$, esiste finito il limite

$$\lim_{x\to c+} f_F'(x)=f_F'(c+0); \tag{6}$$

infatti per ogni intervallo $[c,v]$ con $c<v\leq b$ e per ogni coppia di punti $x',x''\in]c,v]\cap F$ risulta

$$|f_F'(x')-f_F'(x'')|\leq\Phi_{f_F}([c,v])$$

e quindi la (6) per la continuità della Φ_{f_F} in prossimità del punto c (Proposizione 6). D'altra parte per ogni $v\in F$ con $c<v\leq b$ esistono per la Proposizione 2 due punti $x',x''\in]c,v]$-F tali che

$$f_F'(x') \leq \frac{f_F(v)-f_F(c)}{v-c} \leq f_F'(x'')$$

e quindi risulta $f_F'(c+0)=f_F'(c)$. Analogamente si prova che è

$$f_F'(c-0)= \lim_{x \to c-} \frac{f_F(x)-f_F(c)}{x-c} = f_F'(c)$$

per ogni $c \in F$ con $c \neq a$.

Osserviamo che della Proposizione 12 non sussiste il viceversa, cioè se in un sottoinsieme F di $[a, b]$ di misura $b-a$ risulta f_F' continua, in generale la funzione f non è 2-VGL; ad esempio la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \in]0,1] \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è derivabile con derivata continua in $[0, 1]$, ma non è 2-VGL.

Data una funzione f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, con f' indichiamo la sua derivata in senso distribuzionale. Se f è 2-VGL in $[a, b]$ e se $F \subset [a, b]$ è un insieme di misura $b-a$ tale che f_F è derivabile, risulta $f'(x)=f_F'(x)$ q. o. in $[a, b]$ e sussiste inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 13.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora la derivata in senso distribuzionale f' è a variazione generalizzata limitata (VGL) e risulta

$$V_g[f']=V_g^{(2)}[f],$$

dove $V_g[f']$ è la variazione generalizzata della f'.

DIMOSTRAZIONE. Sia $F \subset [a, b]$ un insieme di misura $b-a$ tale che f_F sia derivabile e inoltre sia $f'(x)=f_F'(x)$ per ogni $x \in F$. Per ogni intervallo $I=[u, v] \subset [a, b]$, con $u, v \in F$, $u<v$, risulta

$$|f'(v)-f'(u)| \leq \Phi_{f_F}(I)$$

e quindi f' è VGL in $[a, b]$ (Cfr. M. Boni, [2]). La variazione generalizzata della f', essendo f_F' continua (Proposizione 12), è data dal numero

$$V_g[f']= \sup_{D_F \in \mathcal{D}_F} \sum_{I \in D_F} |\Delta f_F'(I)|$$

(dove $\Delta f_F'(I) = f_F'(v) - f_F'(u)$ se $I = [u, v]$ e $\mathcal{D}_F = \{D_F\}$ è la famiglia di tutte le suddivisioni di $[a, b]$ in un numero finito di intervalli i cui estremi sono in F) e con un procedimento analogo a quello fatto per dimostrare il Teorema 7 di [9] si prova che è $V_g[f'] = V_g^{(2)}[f]$.

PROPOSIZIONE 14.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora risulta

$$V_g^{(2)}[f] = \lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{b-h} \frac{|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|}{h^2}\, dx.$$

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1 di [9].

§ 2.

Sia f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione 2-VGL e per ogni intervallo $I = [u, v] \subset [a, b]$ consideriamo la variazione seconda generalizzata $V_g^{(2)}[f, I]$ della funzione f nell'intervallo I. Risulta in virtù della prima parte del lavoro

$$V_g^{(2)}[f, I] = \lim_{\delta_\gamma(D_I) \to 0} S(\Phi_{f_E}, D_I) = \sup_{D_I \in \mathcal{D}_I} S(\Phi_{f_E}, D_I),$$

dove $E \subset I$ è un insieme di misura $|I|$ tale che f_E è continua e $\mathcal{D}_I = \{D_I\}$ è la famiglia di tutte le suddivisioni finite dell'intervallo I.

È noto (Cfr. [3]) che l'integrale alla Burkill-Cesari di una funzione d'intervallo non negativa, considerata come funzione d'insieme, è superadditivo, cioè per ogni intervallo $I = [u, v] \subset [a, b]$ e per ogni $c \in]u, v[$ risulta

$$V_g^{(2)}[f, [u, v]] \geq V_g^{(2)}[f, [u, c]] + V_g^{(2)}[f, [c, v]]; \tag{7}$$

inoltre dalla Proposizione 9 si deduce immediatamente che è anche

$$V_g^{(2)}[f, [u, v]] \leq V_g^{(2)}[f, [u, c]] + V_g^{(2)}[f, [c, v]] + \gamma(c). \tag{8}$$

Proviamo che sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 15.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ è 2-VGL, allora, posto $N = \{x \in [a, b] : \gamma(x) \neq 0\}$ si ha per ogni intervallo $I = [u, v] \subset [a, b]$ e per ogni $c \in]u, v[$

$$(9) \qquad V_g^{(2)}[f, [u, v]] = V_g^{(2)}[f, [u, c]] + V_g^{(2)}[f, [c, v]] \quad se \ c \notin N$$

$$(10) \qquad V_g^{(2)}[f, [u, v]] = V_g^{(2)}[f, [u, c]] + V_g^{(2)}[f, [c, v]] + \gamma(c) \quad se \ c \in N$$

DIMOSTRAZIONE. La (9) è immediata conseguenza delle (7) e (8) essendo $\gamma(c)=0$. Proviamo la (10). Per ogni fissato $\varepsilon>0$ esiste un $\eta_1>0$ tale che se $D_{[u,c]} \in \mathcal{D}_{[u,c]}$ con $\delta_\gamma(D_{[u,c]})<\eta_1$, allora risulta

$$(11) \qquad |S(\Phi_{f_E}, D_{[u,c]}) - V_g^{(2)}[f, [u, c]]| < \varepsilon.$$

Analogamente esiste un $\eta_2>0$ tale che se $D_{[c,v]} \in \mathcal{D}_{[c,v]}$ con $\delta_\gamma(D_{[c,v]})<\eta_2$, allora risulta

$$(12) \qquad |S(\Phi_{f_E}, D_{[c,v]}) - V_g^{(2)}[f, [c, v]]| < \varepsilon.$$

Per la continuità della funzione Φ_{f_E} in prossimità del punto c (Proposizione 6) esiste un numero $\eta_3>0$ tale che per ogni intervallo $J \subset \subset [c-\eta_3, c]$, oppure $J \subset [c, c+\eta_3]$ risulta $\Phi_{f_E}(J)<\varepsilon$.

Posto $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \gamma(c)\}$, sia $D_{[u,v]} \in \mathcal{D}_{[u,v]}$, $D_{[u,v]} \equiv [I_i]$, $i=1, 2, \dots, n$, con $\delta_\gamma(D_{[u,v]})<\eta$. Essendo $\gamma(c)>\delta_\gamma(D_{[u,v]})$, il punto c è interno ad un intervallo di $D_{[u,v]}$, che indicheremo $I_j=[a_{j-1}, a_j]$ e porremo $I_j'=[a_{j-1}, c]$, $I_j''=[c, a_j]$. Risulta

$$(13) \qquad V_g^{(2)}[f, [u, v]] \geq S(\Phi_{f_E}, D_{[u,v]}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \Phi_{f_E}(I_i) + \Phi_{f_E}(I_j) + \sum_{i=j+1}^{n} \Phi_{f_E}(I_i).$$

Si noti che la suddivisione $D_{[u,c]} \equiv [I_1, I_2, \dots, I_{j-1}, I_j']$ ha la mesh δ_γ minore di η_1, la suddivisione $D_{[c,v]}=[I_j'', I_{j+1}, \dots, I_n]$ ha la mesh δ_γ minore di η_2; inoltre essendo $c-a_{j-1}<\eta_3$, e $a_j-c<\eta_3$, risulta $\Phi_{f_E}(I_j')<\varepsilon$ e $\Phi_{f_E}(I_j'')<\varepsilon$; infine è $\gamma(c)<\Phi_{f_E}(I_j)$.

Allora dalla (13), anche in virtù delle (11) e (12), risulta

$$V_g^{(2)}[f, [u, v]] \geq S(\Phi_{f_E}, D_{[u,c]}) + S(\Phi_{f_E}, D_{[c,v]}) + \Phi_{f_E}(I_j) -$$

$$- \Phi_{f_E}(I_j') - \Phi_{f_E}(I_j'') >$$

$$> V_g^{(2)}[f, [u, c]] - \varepsilon + V_g^{(2)}[f, [c, v]] - \varepsilon + \gamma(c) - \varepsilon - \varepsilon =$$

$$= V_g^{(2)}[f, [u, c]] + V_g^{(2)}[f, [c, v]] + \gamma(c) - 4\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε e dalla (8) si ha la (10).

PROPOSIZIONE 16.

Se f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è 2-VGL, allora la funzione d'intervallo* $V_g^{(2)}[f, I]$ *è continua in prossimità di ogni punto di* $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la continuità a destra della $V_g^{(2)}[f, I]$ in prossimità di ogni punto di $[a, b[$, analoga sarà la dimostrazione della continuità a sinistra in prossimità di ogni punto di $]a, b]$. Fissato un punto $c \in [a, b[$, supponiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni intervallo $[c, v]$ con $c < v \leq b$ risulti $V_g^{(2)}[f, [c, v]] > \varepsilon$. Per la continuità della Φ_{f_E} (dove $E \subset [a, b]$ è un insieme di misura $b-a$ tale che f_E sia continua) in prossimità del punto c, esiste un $\eta > 0$ tale che per ogni intervallo $J \subset [c, c+\eta]$ risulta $\Phi_{f_E}(J) < \varepsilon/4$. Sia v_0 un qualunque punto con $c < v_0 \leq b$ e si fissi una suddivisione $D_{[c,v_0]} \in \mathcal{D}_{[c,v_0]}$, $D_{[c,v_0]} = [I_i]$, $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, tale che si abbia $\delta_\gamma(D_{[c,v_0]}) < \eta$ e

$$V_g^{(2)}[f, [c, v_0]] < S(\Phi_{f_E}, D_{[c,v_0]}) + \varepsilon/4.$$

Per la continuità della Φ_{f_E} in prossimità del punto c è $\Phi_{f_E}([c, a_1]) < \varepsilon/4$ e quindi risulta

$$V_g^{(2)}[f, [a_1, v_0]] > S(\Phi_{f_E}, D_{[c,v_0]}) - \Phi_{f_E}([c, a_1]) >$$

$$> V_g^{(2)}[f, [c, v_0]] - \varepsilon/4 - \varepsilon/4 > \varepsilon/2,$$

ed è pure per ipotesi $V_g^{(2)}[f, [c, a_1]] > \varepsilon$.

Posto $v_1 = a_1$, nell'intervallo $[c, v_1]$ è possibile ripetere le stesse considerazioni fatte nell'intervallo $[c, v_0]$. Si viene a creare così una successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente e tale che per ogni n risulta $v_n > c$, $V_g^{(2)}[f, [c, v_n]] > \varepsilon$ e $V_g^{(2)}[f, [v_{n+1}, v_n]] > \varepsilon/2$.

Tenuto conto della Proposizione 15, per ogni n è allora

$$V_g^{(2)}[f, [c, v_0]] = V_g^{(2)}[f, [c, v_n]] + \sum_{i=1}^{n} V_g^{(2)}[f, [v_i, v_{i-1}]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(v_i) > \varepsilon + \frac{n}{2}\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(v_i).$$

Ciò è assurdo perché la f è 2-*VGL*.

PROPOSIZIONE 17.

Condizione necessaria e sufficiente perché f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *sia 2-VGL è che esista un insieme* $E \subset [a, b]$ *di misura* $b-a$ *tale che* f_E *sia lip-*

schitziana e che la funzione Φ_{f_E} *sia assolutamente continua in prossimità di ogni punto di* $[a, b]$ (Cfr. Premesse).

DIMOSTRAZIONE. La condizione necessaria è conseguenza della Proposizione 1 e della Proposizione 16 che implica immediatamente l'assoluta continuità della funzione Φ_{f_E} in prossimità di ogni punto di $[a, b]$.

Per la condizione sufficiente si osservi che se f_E è lipschitziana (con $E \subset [a, b]$ di misura $b-a$), allora la Φ_{f_E} è γ-subadditiva, cioè vale la Proposizione 9. L'asserto segue allora dalla Proposizione 11 di [11].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA: *La variazione totale, la lunghezza di una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Fis. Mat. Nat., (VIII), **22** (1957), pp. 584-588.

[2] M. BONI: *Variazione generalizzata con peso e quasi additività.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (in corso di stampa).

[3] J. C. BRECKENRIDGE: *Burkill-Cesari integrals of quasi additive interval functions.* Pacific J. of Math., **37**, no. 3 (1971) pp. 635-654.

[4] J. C. BURKILL: *Functions of intervals.* Proc. London Math. Soc. **22** (1923) pp. 275-310.

[5] L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie II, **5** (1936) pp. 229-313.

[6] L. CESARI: *Quasi additive set functions and concept of integral over a variety.* Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962) pp. 94-113.

[7] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Ann. Mat. Pura e Appl. (IV) **36** (1954) pp. 191-213.

[8] G. GOFFMAN: *Lower semicontinuity and area functionals. I - The non parametric case.* Rend. Circ. Mat. Palermo (II) **2** (1953) pp. 203-235.

[9] C. GORI - M. RAGNI: *Sulla variazione seconda.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **22** (1973), pp. 66-93.

[10] M. RAGNI: *Sui concetti di approssimata subadditività e quasi subadditività.* Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo (in corso di stampa).

[11] M. RAGNI: *Sull'esistenza dell'integrale alla Burkill-Cesari.* Rend. Circ. Mat. Palermo (in corso di stampa).

[12] S. SAKS: *Théorie de l'intégrale.* Warszawa, 1933.

[13] C. VINTI: *L'integrale di Weiertrass.* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. (A), **92** (1958), pp. 423-434.

[14] C. VINTI: *Perimetro - Variazione.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie III, **18** (1964), pp. 201-231.