SULLA ESISTENZA DI SOLUZIONI LIMITATE PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE NON LINEARI

di ALFONSO AVERNA e GIULIANELLA COLETTI (a Perugia) (**)

SOMMARIO. - *Si forniscono condizioni necessarie e sufficienti per la limitatezza in* $J = [t_0, +\infty)$ *di (almeno) una soluzione, di tutte le soluzioni, di una sola soluzione di un'ampia classe di equazioni differenziali ordinarie non lineari.*

SUMMARY. - *Necessary and sufficient conditions are given for the boundedness in* $J = [t_0, +\infty)$ *of (at least) one solution, of all solutions, and of one and only one solution of a wide class of nonlinear ordinary differential equations.*

§ 1. Introduzione.

Nel 1964 W. A. Coppel [1], utilizzando un Teorema di J. L. Massera e J. J. Schäffer [2], ha fornito una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di almeno una soluzione limitata dell'equazione differenziale ordinaria:

$$\text{(L)} \qquad \dot{x} - A(t)\,x = b(t) \quad \text{per ogni} \quad b \in C_0(J),$$

essendo $C_0(J)$ lo spazio di Banach di tutte le funzioni continue e limitate definite su $J = [t_0, +\infty)$ e a valori in $\mathbb{R}^n$, con la norma data da $|b|_{C_0} = \sup_{t \in J} \|b(t)\|$, ove $\|...\|$ rappresenta la norma in $\mathbb{R}^n$.

(*) Pervenuto in Redazione il 26 aprile 1977.
Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C. N. R.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica-Università - Via Fabretti - 06100 Perugia.

Successivamente, W. A. Coppel ([3], cap. V) ha studiato il caso $b \in \overset{1}{L}_{\mathbb{R}^n}(J)$, essendo $\overset{1}{L}_{\mathbb{R}^n}(J)$ lo spazio di Banach di tutte le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ che sono L-integrabili su J con la norma fornita da

$$|b|_{L^1} = \int_{t_0}^{+\infty} \|b(t)\|\, dt.$$

Il caso generale $b \in \overset{p}{L}_{\mathbb{R}^n}(J)$, $1 \leqq p \leqq +\infty$, in cui b è un elemento dello spazio di Banach di tutte le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ con $\|b\|^p$ L-integrabile su J e la norma fornita da $|b|_{\overset{p}{L}_{\mathbb{R}^n}} = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \|b(t)\|^p\, dt\right)^{1/p}$, è stato considerato da R. Conti [4], che ha studiato, in particolare, i due casi estremi: quello in cui « *tutte* » le soluzioni di (L) sono limitate e l'altro in cui « *una sola* » soluzione di (L) è limitata.

V. A. Staikos ha esteso [5], [6] i risultati conseguiti da W. A. Coppel e da R. Conti alla classe di equazioni differenziali non lineari:

$$\text{(E)} \qquad \dot{x} - A(t)\, x = g(t, x),$$

ove A: $t \mapsto A(t)$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^{n,n}$ L-localmente sommabile su J e g: $(t, x) \mapsto g(t, x)$ è una funzione appartenente alla classe $\overset{p}{F}_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$, $1 \leqq p < +\infty$, di tutte le funzioni f, a valori in $\mathbb{R}^n$, definite su $J \times \mathbb{R}^n$, che soddisfano alle condizioni di Carathëodory ([7], n. 14, c)) e, inoltre, alle seguenti ipotesi:

(i) *esiste un* $\lambda \in \overset{p}{L}_{\mathbb{R}}(J)$ *in modo che risulti:*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqq \lambda(t)\, \|x - y\|$$

per ogni $(t, x), (t, y) \in J \times \mathbb{R}^n$;

(ii) $f(\cdot, 0) \in \overset{p}{L}_{\mathbb{R}^n}(J)$.

Scopo di questo lavoro è di generalizzare un risultato di V. A. Staikos ad una più ampia classe di equazioni differenziali non lineari (cfr. il Teorema 1 di [5] con il nostro Teorema I) e di estendere un risultato del citato autore a classi di equazioni differenziali non considerate in [5]. Abbiamo inoltre fornito nel Teorema II una condizione necessaria e sufficiente perché ogni equazione della classe da noi considerata abbia una sola soluzione con norma limitata da un assegnato numero H.

Nel Teorema I abbiamo sostituito alla condizione (i) sopra citata l'ipotesi (h) riportata nel § 2 che è più generale di quella, come risulta dal fatto che l'ipotesi (i) implica la nostra (h) (cfr. § 4), mentre esistono classi di equazioni differenziali non lineari (come quelle considerate negli esempi riportati nello stesso § 4) che, pur ammettendo soluzioni limitate, non soddisfano alla condizione (i), ma soddisfano alla nostra (h).

Per quanto riguarda i Teoremi III e IV facciamo osservare che esistono ampie classi di equazioni differenziali *non* lineari (cfr. § 4) aventi « tutte » le soluzioni limitate e verificanti le ipotesi dei nostri Teoremi ma non quelle dell'analogo Teorema 2 di [5].

§ 2. Consideriamo la classe delle equazioni differenziali « *non lineari* »:

$$(\tilde{\mathrm{E}}) \qquad \dot{x}-A(t)\,x=g(t,x),$$

essendo:

A: $t \mapsto A(t)$ *una funzione a valori in* $\mathbb{R}^{n,n}$, *localmente sommabile* (*secondo Lebesgue*) *su* $J=[t_0,+\infty)$;

g: $(t,x) \mapsto g(t,x)$ *una funzione appartenente alla classe* $F_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$ *di tutte le funzioni* f, *a valori in* $\mathbb{R}^n$, *definite su* $J\times\mathbb{R}^n$, *che verificano le condizioni di Carathëodory.*

In questo modo è assicurata ([7], Teorema 14.1) l'esistenza delle soluzioni di $(\tilde{\mathrm{E}})$ sull'intero intervallo J.

Sia poi $\tilde{F}^p_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$, $1\leqq p\leqq+\infty$, la totalità delle funzioni di $F_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$ per le quali si abbia:

(h) *per ogni insieme* « *limitato* » $B\subset\mathbb{R}^n$ *esiste* $\lambda_B\in L^p_{\mathbb{R}}(J)$ *in modo che risulti*:

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqq\lambda_B(t)\,\|x-y\|, \qquad \forall\ (t,x),\ (t,y)\in J\times B;$$

(hh) $f(\cdot,0)\in L^p_{\mathbb{R}^n}(J)$.

Indichiamo ora con X_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ i cui elementi sono i valori che le soluzioni « limitate » dell'equazione omogenea:

$$(\mathrm{L}_0) \qquad \dot{y}-A(t)\,y=0$$

assumono per $t=t_0$, mentre con X_2 denotiamo un qualunque sottospazio di $\mathbb{R}^n$ « *supplementare* » a X_1 ([8], pg. 241).

Chiamata inoltre P_i la « proiezione » ([8], pg. 240) di $\mathbb{R}^n$ su X_i $(i=1,2)$, poniamo per $t \in J$:

$$(2.1)\quad m(t; P_1, P_2) = \begin{cases} \left[\int_{t_0}^{t} |Y(t) P_1 Y^{-1}(s)|^q \, ds + \int_{t}^{+\infty} |Y(t) P_2 Y^{-1}(s)|^q \, ds \right]^{\frac{1}{q}}, \\ \qquad\qquad se \ 1 \leqq q < \infty, \\ \sup\limits_{t_0 \leqq s \leqq t} |Y(t) P_1 Y^{-1}(s)| + \sup\limits_{t \leqq s \leqq \infty} |Y(t) P_2 Y^{-1}(s)|, \\ \qquad\qquad se \ q = \infty, \end{cases}$$

essendo $Y(t)$ la « *matrice fondamentale* » di (L_0) scelta in modo che $Y(t_0)$ coincida con la matrice identica I, $|\ldots|$ una « *qualsiasi* » norma di matrici $n \times n$ e

$$q = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & se \quad 1 < p < \infty \\ 1 & se \quad p = \infty \\ \infty & se \quad p = 1. \end{cases}$$

Sulla funzione $m(t; P_1, P_2)$ formuliamo le seguenti ipotesi:

($\mathrm{hhh_I}$) *esista un numero reale* $K > 0$ *in modo che risulti*:

$$m(t; P_1, P_2) \leqq K \qquad per\ ogni\ t \in J;$$

($\mathrm{hhh_{II}}$) *esista un numero* $K > 0$ *in modo che risulti*:

$$m(t; 0, I) \leqq K \qquad per\ ogni\ t \in J;$$

($\mathrm{hhh_{III}}$) *esista un numero* $K > 0$ *in modo che risulti*:

$$m(t; I, 0) \leqq K \qquad per\ ogni\ t \in J,$$

che saranno utilizzate, le prime due, rispettivamente nei Teoremi **I**, **II** e la terza nei Teoremi III e IV.

Sussiste il seguente

TEOREMA I. *Sia data l'equazione differenziale* ($\tilde{\mathrm{E}}$) *con* $g \in \tilde{F}^p_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$, $1 \leqq p < +\infty$. *Condizione « necessaria » e « sufficiente » perché questa equazione ammetta « almeno » una soluzione limitata su J è che sia soddisfatta l'ipotesi* ($\mathrm{hhh_I}$).

Proviamo prima la condizione sufficiente. Sia $x \in C_0(J)$. Poiché da (h) discende:

$$\|g(t, x(t))\| \leqq \lambda_B(t)\, |x|_{C_0} + \|g(t, 0)\|, \tag{2.2}$$

ove B è un insieme « *limitato* » di $\mathbb{R}^n$ contenente $x(t)$ e il vettore nullo, risulta (cfr. (hh)):

$$g(\cdot, x) \in L^p_{\mathbb{R}^n}(J), \qquad \textit{per ogni } x \in C_0(J). \tag{2.3}$$

Utilizzando il Teorema di Hölder (cfr. [9], pg. 208), da (2.3) e ($\mathrm{hhh_I}$), segue allora che esistono finiti i due integrali:

$$\int_{t_0}^{t} Y(t)\, P_1\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds, \tag{2.4}$$

$$\int_{t}^{+\infty} Y(t)\, P_2\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds, \qquad \forall\ t \in J,$$

e possiamo quindi considerare l'operatore « T »

$$T\colon x(t) \mapsto Tx(t) = \int_{t_0}^{t} Y(t)\, P_1\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds + \tag{2.5}$$

$$- \int_{t}^{+\infty} Y(t)\, P_2\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds, \qquad x \in C_0(J).$$

Poiché risulta peraltro:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} Y(t)\, P_1\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds - \int_{t}^{+\infty} Y(t)\, P_2\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds \right\| \leqq \tag{2.4'}$$

$$\leqq c\left(\int_{t_0}^{t} |Y(t)\, P_1\, Y^{-1}(s)|^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t_0}^{t} \|g(s, x(s))\|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+c\left(\int_{t}^{+\infty} |Y(t)\, P_2\, Y^{-1}(s)|^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq c\, K\left(\int_{t_0}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

l'operatore (2.5) trasforma lo spazio di Banach $C_0(J)$ in sé.

Preso ora l'insieme $\Omega_H \subset C_0(J)$

(2.6) $$\Omega_H = \{x \in C_0(J) : |x|_{C_0} \leqq H,\ H > 0\},$$

vogliamo provare che

α) Ω_H è « *T-invariante* », *cioè* $T(\Omega_H) \subset \Omega_H$;

$\alpha\alpha$) T è una « *contrazione* » in Ω_H.

Per ogni $x \in \Omega_H$ si ha (cfr. (2.2) e (hhh$_1$)):

(2.7) $$\|Tx(t)\| \leqq c\left\{\int_{t_0}^{t} |Y(t)\, P_1\, Y^{-1}(s)|\, [\lambda_{B_H}(s)\, |x|_{C_0} + \|g(s, 0)\|]\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} |Y(t)\, P_2\, Y^{-1}(s)|\, [\lambda_{B_H}(s)\, |x|_{C_0} + \|g(s, 0)\|]\, ds\right\} \leqq$$

$$\leqq cK\{H\, |\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}} + |g(\cdot, 0)|_{L^p_{\mathbb{R}^n}}\},$$

avendo indicato con B_H l'insieme (limitato) dei valori delle funzioni appartenenti a Ω_H.

Poiché spostando opportunamente t_0 [1] è possibile rendere:

[1] Nell'eventualità che occorra spostare t_0 in t_0^* $(> t_0)$ si potrebbe ritenere che la limitatezza di una soluzione x^* di $(\widetilde{E})$ risulti provata soltanto nell'intervallo

$$|\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}} \leqq \frac{1}{4\,cK}\,, \quad |g(\cdot,0)|_{L^p_{\mathbb{R}^n}} \leqq \frac{H}{4\,cK}\,, \tag{2.8}$$

da (2.7), tenendo presente (2.8), segue infine:

$$|Tx|_{C_0} \leqq \frac{1}{2} H, \tag{2.7'}$$

e pertanto risulta $T(\Omega_H) \subset \Omega_H$, cioè Ω_H è « *T-invariante* ».

D'altra parte, utilizzando (h), (hhh$_I$), possiamo scrivere:

$$\|(Tx-Ty)(t)\| \leqq c\,|x-y|_{C_0}\left\{\int_{t_0}^{t} |Y(t)\,P_1\,Y^{-1}(s)|\,\lambda_{B_H}(s)\,ds + \right. \tag{2.9}$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} |Y(t)\,P_2\,Y^{-1}(s)|\,\lambda_{B_H}(s)\,ds\right\} \leqq cK\,|\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}}\,|x-y|_{C_0}, \quad \forall x, y \in \Omega_H,$$

da cui, assumendo $\vartheta_{\Omega_H} = cK\,|\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}}$, si ha:

$$|Tx-Ty|_{C_0} \leqq \vartheta_{\Omega_H}\,|x-y|_{C_0}, \tag{2.9'}$$

e pertanto, tenendo presente la prima delle (2.8), segue che l'operatore « T » è una « *contrazione* » in Ω_H.

Essendo soddisfatte per il nostro operatore « T » le ipotesi α), $\alpha\alpha$) esso (cfr. [10], pg. 54 o [11], pg. 8), ha un punto unito $x^* \in \Omega_H$.

Poiché, come si verifica facilmente, x^* è soluzione di $(\tilde{E})$, resta provata, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, la condizione sufficiente.

La condizione necessaria si prova come in [4].

OSSERVAZIONE I. Il procedimento da noi adottato e che ci ha condotto all'esistenza per l'equazione $(\tilde{E})$ di una soluzione limitata

$J^* = [t_0^*, +\infty) \subset J$. Ma si vede subito che tale soluzione x^* è limitata in tutto $J = [t_0, +\infty)$. Infatti, per le condizioni di Carathëodory, esiste una soluzione $x: \mapsto x(t), t \in J$, che coincide con la x^* per $t_0^* \leqq t < \infty$; essa si può ottenere prolungando a sinistra, da t_0^* a t_0, la x^* e assumendo per condizione iniziale della soluzione di $(\tilde{E})$ il valore, in t_0, di tale prolungamento. Poiché la x è continua in $[t_0, t_0^*]$ essa è limitata in questo intervallo; d'altra parte, la dimostrazione del Teorema I prova che la $x = x^*$ è limitata in J^*; ne segue che x è limitata in tutto $J = [t_0, +\infty)$.

$x^* \in \Omega_H$ ci consente di dare anche una « *valutazione approssimata* » di questa soluzione. Nelle condizioni in cui ci siamo posti è noto infatti (cfr. [11], pg. 8) che:

β) la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ove

$$x_{n+1} = Tx_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

e « T » è l'operatore definito mediante la (2.5), converge, qualunque sia il punto iniziale x_0 di Ω_H, verso il punto unito $x^* \in \Omega_H$;

$\beta\beta$) l'errore di approssimazione $\rho(x^*, x_n) = \sup\limits_{t \in J} \|(x_n - x^*)(t)\|$ è limitato da:

$$\rho(x^*, x_n) \leqq \frac{\vartheta^n_{\Omega_H}}{1 - \vartheta_{\Omega_H}} \rho(x_1, x_0).$$

§ 3. Proveremo ora il seguente

TEOREMA II. *Sia* $H > 0$ e $1 < p < +\infty$. *Condizione « necessaria » e « sufficiente » perché l'equazione* ($\widetilde{\mathrm{E}}$), *ove* $g \in \widetilde{F}^p_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$, *ammetta « una sola » soluzione limitata* x *tale che* $|x|_{\sigma_0} = \sup\limits_{t \in J^*} \|x(t)\| \leqq H$, $J^* = [t_0^*, +\infty)$ (²), *è che sia soddisfatta l'ipotesi* ($\mathrm{hhh_{II}}$).

Per provare la parte necessaria del Teorema, osserviamo intanto che risulta verificata la ($\mathrm{hhh_I}$), poiché per ipotesi l'equazione ($\widetilde{\mathrm{E}}$) ha una soluzione limitata (cfr. Teorema I) e che, d'altra parte, per $g \equiv 0$ la ($\widetilde{\mathrm{E}}$) si riduce a ($\mathrm{L_0}$), per la quale la soluzione nulla è allora l'unica soluzione limitata. Ne discende che $X_1 = \{0\}$, $X_2 = \mathbb{R}^n$ e di conseguenza la ($\mathrm{hhh_I}$) si riduce alla ($\mathrm{hhh_{II}}$).

Per dimostrare la condizione sufficiente osserviamo che, se è soddisfatta la ($\mathrm{hhh_{II}}$), l'unica soluzione limitata di ($\mathrm{L_0}$) è la soluzione nulla (cfr. [4], Teorema 3). Ne segue che $X_1 = \{0\}$ e $X_2 = \mathbb{R}^n$: la predetta condizione altro non è allora che la ($\mathrm{hhh_I}$) e pertanto l'equazione ($\widetilde{\mathrm{E}}$), per il già citato Teorema I, ha almeno una soluzione limitata x e questa è tale che, per $t \in J^*$, $|x|_{\sigma_0} \leqq H$, come abbiamo provato nel Teorema I.

(²) cfr. le (2.8), e la nota (1).

La soluzione corrispondente y di (L_0):

$$y(t)=x(t)-\int_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(s)\,g(s,x(s))\,ds, \quad t_0\leqq t<+\infty \tag{3.1}$$

è, peraltro, pure limitata, poiché da (3.1) utilizzando (h), (hhh_{II}) discende:

$$\|y(t)\| \leqq |x|_{\sigma_0}+c\left(\int_{t_0}^{t}|Y(t)\,Y^{-1}(s)|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\cdot \tag{3.1'}$$

$$\cdot\left[\left(\int_{t_0}^{+\infty}\|g(s,0)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}+|x|_{\sigma_0}\,|\lambda_B|_{L^p_{\mathbb{R}}}\right]\leqq$$

$$\leqq |x|_{\sigma_0}+cK\left[|g(\cdot,0)|_{L^p_{\mathbb{R}^n}}+|x|_{\sigma_0}\,|\lambda_B|_{L^p_{\mathbb{R}}}\right]<+\infty, \text{ per ogni } t\in J,$$

avendo, al solito, indicato con c una costante che dipende dalla scelta della norma $|\dots|$. Allora y è la soluzione nulla di (L_0) e pertanto da (3.1) segue:

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(s)\,g(s,x(s))\,ds, \qquad t_0\leqq t<+\infty. \tag{3.2}$$

Dimostriamo ora che la x, limitata su J, è la sola soluzione tale che $|x|_{\sigma_0}\leqq H$ in J^*.

Supponiamo, infatti, che oltre a tale x ci sia un'altra soluzione $\bar{x}$ della $(\tilde{E})$, con $|\bar{x}|_{\sigma_0}=\sup_{t\in J^*}\|x(t)\|\leqq H$:

$$\bar{x}(t)=\int_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(s)\,g(s,\bar{x}(s))\,ds, \qquad t\in J^*. \tag{3.2'}$$

Posto $\xi(t)=x(t)-\bar{x}(t)$, $t\in J^*$, si ricava

$$\xi(t)=\int_{t_0^*}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(s)\,[g(s,x(s))-g(s,\bar{x}(s))]\,ds, \tag{3.3}$$

da cui:

$$(3.3') \qquad \|\xi(t)\| \leqq \int_{t_0^*}^{t} \|Y(t)\,Y^{-1}(s)\|\,\|\xi(s)\|\,\lambda_{B_H}(s)\,ds \leqq$$

$$\leqq c\left(\int_{t_0^*}^{t} \|Y(t)\,Y^{-1}(s)\|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}} |\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}} \sup_{s\in J^*} \|\xi(s)\|,$$

essendo B_H l'insieme dei valori delle funzioni appartenenti a Ω_H (cfr. (2.6)). Tenuto conto della (hhh_{II}) si ottiene:

$$(3.4) \qquad \sup_{t\in J^*} \|\xi(t)\| \leqq cK\,|\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}} \sup_{s\in J^*} \|\xi(s)\|,$$

e perciò:

$$(3.4') \qquad [1-cK\,|\lambda_{B_H}|_{L^p_{\mathbb{R}}}] \sup_{t\in J^*} \|\xi(t)\| \leqq 0;$$

ma, per il modo come è stato scelto t_0^*, risulta $1-cK\,|\lambda_B|_{L^p_{\mathbb{R}}}>0$; dunque $\xi(t)\equiv 0$, cioè $x(t)\equiv \bar{x}(t)$, $t\in J^*$.

Osservazione II. Dalla dimostrazione del Teorema II risulta evidente che la condizione necessaria continua a sussistere anche per $p=1$; non altrettanto può dirsi per la parte sufficiente, poiché la proposizione 3 di [4], qui utilizzata per provare che la (hhh_{II}) assicura che l'equazione ($\tilde{\mathrm{E}}$) ha una sola soluzione limitata, è valida soltanto se $1<p\leqq+\infty$.

Formuliamo ora la seguente ipotesi:

$$(hh') \qquad f(\cdot,x)\in L^p(J) \qquad \textit{per ogni } x\in AC(J),$$

essendo $AC(J)$ la totalità delle funzioni assolutamente continue su J e a valori in R^n, e indichiamo con $\tilde{\tilde{F}}^p_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$, $1\leqq p\leqq+\infty$, la totalità delle funzioni di $F_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$ che verificano l'ipotesi (hh').

Sussiste il seguente

Teorema III. *Sia data l'equazione differenziale* ($\tilde{\mathrm{E}}$), *ove* $g\in\tilde{\tilde{F}}^p_{\mathbb{R}^n}(J\times\mathbb{R}^n)$. *Condizione «necessaria» e «sufficiente» perché essa abbia «tutte» le soluzioni limitate è che sia soddisfatta l'ipotesi* (hhh_{III}).

Per dimostrare che sussiste la parte necessaria osserviamo intanto che, nelle condizioni in cui ci siamo posti, è verificata (cfr. [4], Teorema 1) la (hhh_I). D'altra parte, poiché, in particolare, tutte le soluzioni di (L_0) sono limitate e risulta, quindi, $X_1 = \mathbb{R}^n$, $X_2 = \{0\}$, la (hhh_I) si riduce per l'appunto alla (hhh_{III}).

Per provare la proposizione inversa teniamo presente che da (hhh_{III}) discende la limitatezza di tutte le soluzioni di (L_0) (cfr. [4], Teorema 2), cioè esiste un numero $M>0$ in modo da aversi:

$$(3.5) \qquad |Y(t)| \leqq M \qquad \textit{per ogni } t \in J.$$

D'altra parte, se x è una qualunque soluzione di ($\widetilde{\mathrm{E}}$) risulta:

$$(3.6) \qquad x(t) = Y(t)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)\, Y^{-1}(s)\, g(s, x(s))\, ds, \quad t \in J,$$

da cui, tenendo presente (3.5) e utilizzando (hh') e (hhh_{III}), segue:

$$(3.6') \qquad \|x(t)\| \leqq M\, \|x(t_0)\| + cK \left(\int_{t_0}^{+\infty} \|g(s, x(s))\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

ove c è, al solito, una costante che dipende dalla scelta della norma $|\ldots|$. Il Teorema è così completamente dimostrato.

Formuliamo infine la seguente ipotesi:

(hhhh) esista una funzione $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(J)$ tale che

$$\|f(t, x)\| \leqq \varphi(t)\, \|x\|, \quad \text{per ogni } (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n,$$

e indichiamo con $\Phi^p_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n) \subset F_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$, $1 \leqq p < +\infty$, la totalità delle funzioni di $F_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$ che verificano l'ipotesi (hhhh).

Sussiste il seguente

TEOREMA IV. *Sia data l'equazione differenziale* ($\widetilde{\mathrm{E}}$), *ove* $g \in \Phi^p_{\mathbb{R}^n}(J \times \mathbb{R}^n)$. *Condizione « necessaria » e « sufficiente » perché essa abbia « tutte » le soluzioni limitate è che sia soddisfatta l'ipotesi* (hhh_{III}).

Per provare la condizione sufficiente facciamo osservare che anche qui sussistono le relazioni (3.5) e (3.6) e che dalla (3.6), tenendo presente (3.5), (hhhh) e (hhh$_{\mathrm{III}}$), segue:

$$(3.7) \qquad \|x(t)\| \leqq M\,\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\|Y(t)\,Y^{-1}(s)\|\;\|x(s)\|\,ds \leqq$$

$$\leqq M\,\|x(t_0)\| + \sup_{t_0 \leqq s \leqq t} \|x(s)\| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\|Y(t)\,Y^{-1}(s)\|\,ds \leqq$$

$$\leqq M\,\|x(t_0)\| + cK \sup_{t_0 \leqq s \leqq t} \|x(s)\|\,|\varphi|_{L^p_{\mathbb{R}}},$$

da cui si ottiene facilmente

$$(3.7') \qquad \sup_{t_0 \leqq s \leqq t} \|x(s)\| \leqq \frac{M\,\|x(t_0)\|}{1 - cK\,|\varphi|_{L^p_{\mathbb{R}}}}.$$

Poiché, spostando eventualmente t_0, è possibile rendere $|\varphi|_{L^p_{\mathbb{R}}} < \dfrac{1}{cK}$, segue infine:

$$(3.7'') \qquad \|x(t)\| \leqq \frac{M\,\|x(t_0)\|}{1 - cK\,|\varphi|_{L^p_{\mathbb{R}}}} = \bar{c}.$$

La condizione necessaria si prova come nel Teorema III.

§ 4. Il nostro Teorema I contiene, come caso particolare, il Teorema 1 di V. A. Staikos (3).

È intanto ovvio che la nostra ipotesi (h) è implicata dall'ipotesi (i) del citato autore (cfr. § 2 e § 1).

(3) Osserviamo che il citato Teorema 1 di Staikos sussiste per $1 \leqq p < +\infty$ e non per $p = +\infty$, come invece risulta dall'enunciato.

Inoltre nel corso della dimostrazione è affermato: « Since a finite shifting does not affect the substance of the problem, without loss of generality, we can assume that K is less than $\dfrac{1}{2c\,|\lambda|_{L^p_{\mathbb{R}}}}$, i. e. $\vartheta < 1$ ». Poiché lo spostamento di t_0 non può garantire che diminuisca il valore della funzione $m(t, P_1, P_2)$, l'affermazione è errata anche se con quello spostamento è effettivamente possibile rendere $\vartheta < 1$.

Per provare allora che la (h) è effettivamente più generale dell'analoga di cui in [5], illustreremo ora un esempio di una classe di equazioni differenziali non lineari che non verificano l'ipotesi (i) mentre soddisfano alla nostra (h).

Pertanto, con il nostro Teorema si può dedurre per queste equazioni la limitatezza delle loro soluzioni, laddove questa proprietà non può essere dedotta applicando i risultati di cui in [5].

Consideriamo, dunque, l'equazione scalare:

$$(\tilde{\mathrm{E}}) \qquad \frac{dx}{dt} - a(t)\,x = g(t, x), \qquad t \in [t_0, +\infty), \qquad t_0 > 0,$$

alla quale è associata l'equazione lineare:

$$(\mathrm{L}) \qquad \frac{dx}{dt} - a(t)\,x = 0,$$

con $a \in L_{\mathrm{loc}}(J)$, $g \in \tilde{F}^{p}_{\mathbb{R}}(J \times \mathbb{R})$.

Come è ben noto, l'integrale generale di (L_0) è dato da:

$$x(t) = C \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau,$$

mentre una soluzione fondamentale è fornita da $Y(t) = \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$, e risulta $x \in C_0(J)$ se $\sup\limits_{t \in J} \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau < +\infty$. In queste condizioni, « *tutte* » le soluzioni di (L_0) sono limitate e, quindi, il sottospazio X_1 dei punti di $\mathbb{R}$ che sono valori per $t = t_0$ delle soluzioni limitate di (L_0) coincide con $\mathbb{R}$, mentre il suo supplementare è dato da $X_2 = \{0\}$. Pertanto, le corrispondenti proiezioni di $\mathbb{R}$ su X_1 e X_2 sono $P_1 = 1$ e $P_2 = 0$; si ha allora:

$$(4.1) \quad m(t; P_1, P_2) = m(t; 1, 0) = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(\exp \int_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau \right)^{q} ds \right]^{\frac{1}{q}}, & 1 \leqq q < \infty \\[2ex] \sup\limits_{t_0 \leqq s \leqq t} \exp \displaystyle\int_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau, & q = \infty. \end{cases}$$

Se, invece, la (L_0) ha una soluzione non limitata, la sola sua soluzione limitata è $x=0$. Si ha allora $X_1=\{0\}$, $X_2=\mathbb{R}$, $P_1=0, P_2=1$ e pertanto risulta:

$$(4.2)\quad m(t; P_1, P_2)=m(t; 0, 1)=\begin{cases} \left[\int\limits_t^{+\infty}\left(\exp\int\limits_s^t a(\tau)\,d\tau\right)^q ds\right]^{\frac{1}{q}}, & 1\leqq q<\infty \\ \sup\limits_{t\leqq s\leqq\infty} \exp\left(-\int\limits_t^s a(\tau)\,d\tau\right), & q=\infty. \end{cases}$$

Da qui si vede intanto che per l'esempio da noi trattato potranno essere presi in considerazione i nostri Teoremi.

Se, in particolare, è $a(t)\equiv a=$ costante, $t\in J$, come è noto la (L_0) ha tutte le soluzioni limitate per $a\leqq 0$; mentre se è $a>0$ l'unica soluzione limitata di (L_0) è $x(t)\equiv 0$.

In questi casi la $m(t; P_1, P_2)$ si riduce a

$$(4.3)\qquad m(t; 1, 0)=\begin{cases} \left(\dfrac{1-e^{qa(t-t_0)}}{(-a)\,q}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\leqq q<\infty \\ 1 & q=\infty \end{cases}$$

se risulta $a<0$; si riduce a

$$(4.4)\qquad m(t; 1, 0)=\begin{cases} (t-t_0)^{\frac{1}{q}}, & 1\leqq q<\infty, \\ 1 & q=\infty, \end{cases}$$

per $a=0$; infine per $a>0$ si riduce a

$$(4.5)\qquad m(t; 0, 1)=\begin{cases} \left[\int\limits_t^{+\infty} e^{qa(t-s)}\,ds\right]^{\frac{1}{q}}=\left(\dfrac{1}{aq}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\leqq q<\infty \\ \sup\limits_{t\leqq s\leqq\infty} e^{a(t-s)}=1, & q=\infty. \end{cases}$$

Segue pertanto che se $g(t, x)$ è una funzione che soddisfa alle condizioni (h), (hh) e si prende per $a>0$

$$(4.6)\qquad K=\left(\frac{1}{aq}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 1<p\leqq\infty,$$

la (hhh_I) del Teorema I è verificata: l'equazione studiata ammette allora almeno una soluzione limitata per ogni $g \in \tilde{F}^p_{\mathbb{R}}(J \times \mathbb{R})$, $1 < p \leqq \infty$.

Mostriamo ora che esistono effettivamente ampie classi di funzioni $g(t, x)$ che soddisfano alla nostra (h), mentre non verificano la (i) di [5]. Una di queste classi è, ad esempio, quella fornita da

$$(4.7) \qquad g(t, x) = f(x)\, t^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0, x \in \mathbb{R}, \ t \in [t_0, +\infty), \ t_0 > 0,$$

con « f » a rapporto incrementale illimitato su $\mathbb{R}$ e limitato su ogni intervallo limitato del reale come è, in particolare, la funzione f: $x \mapsto x^2$.

Infatti, limitandoci per brevità a considerare nella (4.7) $f(x) = x^2$, per ogni insieme « *limitato* » $B \subset \mathbb{R}$ risulta:

$$\text{(h)} \qquad \frac{\|g(t, x) - g(t, y)\|}{\|x - y\|} \leqq \lambda_B(t) \quad \text{per ogni} \quad (t, x), (t, y) \in J \times B,$$

con

$$\lambda_B(t) = \Lambda_B\, t^{-\alpha}, \qquad \Lambda_B \geqq \sup_{x, y \in B} |x + y|,$$

e risulta $\lambda_B \in L^p_{\mathbb{R}}(J)$, per $p > \dfrac{1}{\alpha}$.

Poiché inoltre tali funzioni soddisfano pure alla (hh), risultano verificate le ipotesi del nostro Teorema, mentre la (i) di [5] *non* può essere soddisfatta poiché risulta:

$$(4.8) \qquad \frac{\|g(t, x) - g(t, y)\|}{\|x - y\|} = |x + y|\, t^{-\alpha},$$

e la funzione $|x + y|$ *non* è limitata in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il nostro Teorema III e l'analogo Teorema 2 di [5], vogliamo osservare che, pur non essendo agevole un loro confronto, vi sono tuttavia ampie classi di equazioni differenziali che soddisfano alla nostra ipotesi (hh′) e non alle (i), (ii).

È allora possibile, applicando il nostro Teorema III, riconoscere che queste equazioni hanno « *tutte* » le soluzioni *limitate*, mentre ciò non è possibile ricorrendo al Teorema 2 di [5].

Classi di siffatte equazioni sono fornite, ad esempio, da:

$$(4.9) \qquad \frac{dx}{dt} - ax = f(x)\, t^{-\alpha}, \ \alpha > 0, \ t \in [t_0, +\infty), \ t_0 > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

con « f » limitata e a rapporto incrementale illimitato su $\mathbb{R}$. Tale è, in particolare, la « f » così definita:

$$(4.10)\qquad f\colon x \mapsto f(x) = \sin nx,\ 2(n-1)\pi \leqq x \leqq 2n\pi,\ n=1,2,\ldots;$$

come si verifica facilmente.

Perché le ipotesi del nostro Teorema III siano tutte verificate, basta allora assumere (cfr. (4.3)):

$$(4.6')\qquad K = \begin{cases} \max\left[1, \left(\dfrac{1}{(-a)\,q}\right)^{\frac{1}{q}}\right] & \text{se } 1<p\leqq\infty,\ a<0 \\ 1 & \text{se } p=1,\ a=0, \end{cases}$$

nei quali casi le equazioni sopra considerate hanno « *tutte* » le soluzioni limitate.

È appena il caso di osservare che *non* è, invece, applicabile a queste equazioni nessuno dei Teoremi di [5], poiché, risultando:

$$(4.8')\qquad \frac{\|g(t,x)-g(t,y)\|}{\|x-y\|} = \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| t^{-a}$$

e non essendo limitato su $\mathbb{R}$ il rapporto incrementale $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, non è verificata l'ipotesi (i) più volte citata.

Per quanto riguarda infine il nostro Teorema IV, l'esempio riportato qui sotto prova che la classe di funzioni presa in considerazione in questo Teorema, oltre ad essere diversa da quella considerata nel nostro Teorema III, è anche diversa dalla classe di cui al Teorema 2 di [5].

Invero, se andiamo a considerare l'equazione:

$$\frac{dx}{dt} - a(t)\,x = f(x)\,t^{-2},\qquad t\in[t_0,+\infty),\quad t_0>0,\quad x\in\mathbb{R}$$

con la « f » definita come segue:

$$(4.11)\qquad f\colon x\mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x} & 0<|x|\leqq 1 \\ x^{1/3}\sin 1 & |x|>1, \end{cases}$$

si vede facilmente che la $f(t, x) \equiv f(x)\, t^{-2}$ soddisfa alla condizione (hhhh), ma non alla (hh′) del Teorema III (basta per questo assumere, per esempio, $x(t) = t^7$), né alla (i) di [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. A. COPPEL, *On the stability of ordinary differential equations*, J. London Math. Soc., 39 (1964), 255-260.

[2] J. L. MASSERA - J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis*, Ann. of Math., 67 (1958), 517-573.

[3] W. A. COPPEL, *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Heath Math. Monograph, Boston, (1965).

[4] R. CONTI, *On the boundedness of solutions of ordinary differential equations*, Funkcialaj. Ekvácioj, 9 (1966), 23-26.

[5] W. A. STAIKOS, *A note on the boundedness of solutions of ordinary differential equations*, Boll. U. M. I., Vol. II, (1968), 256-261.

[6] W. A. STAIKOS, *A correction to: A note on the boundedness of solutions of ordinary differential equations*, Boll. U. M. I., Vol. VI (1968), 730.

[7] R. CONTI, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. U. M. I., XXII (1967), 135-178.

[8] A. E. TAYLOR, *Introduction to functional analysis*, John Wiley Sons, Inc., (1967).

[9] N. BOURBAKI, *Integration*, chapitre 4, Hermann, Paris, (1965).

[10] T. L. SAATY, *Modern non linear equations*, Mc Graw-Hill, Inc, New York, (1967).

[11] P. FALB - J. L. DE JONG, *Some Successive Approximation Methods in Control and Oscillation Theory*, Academic Press, New York and London, (1969).