APPROSSIMAZIONE SPLINE NEL METODO DI COLLOCAZIONE PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI PROBLEMI LINEARI (*)

di ALFREDO BELLEN (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *In questa Nota si considera il metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di alcune classi di problemi lineari le cui autosoluzioni sono approssimate mediante funzioni spline. È dato un teorema di rappresentazione delle funzioni spline attraverso una base per la quale il metodo risulta stabile.*

SUMMARY. - *The use of spline functions in the approximation of eigenvalues of linear problems using collocation is considered. A convenient basis for spline functions that is stable in practice is given.*

1. Premesse.

In [1], [2], [3] è presentato il metodo di collocazione per il calcolo approssimato degli autovalori di problemi lineari del tipo:

$$(1) \qquad Lu - \lambda\, Hu = 0 \qquad u \in U$$

nei seguenti casi:

a)

$$L = \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \qquad p_0(x) = 1 \qquad p_k(x) \in C^0\,[a, b]$$

(*) Pervenuto in Redazione il 16 settembre 1976.
Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

$$H=\begin{cases} r(x)\,I & I = \text{operatore identità} \\ & \qquad r(x) \neq 0 \qquad r(x) \in C^0\,]a,b[\\ r(x)\,M & M = \text{operatore integrale di nucleo } F(x,\xi) \text{ limitato su } [a,b]\times[a,b]. \end{cases}$$

U varietà lineare inclusa in $C^m\,[a,b]$ i cui elementi verificano, assieme alle loro prime $m-1$ derivate, m condizioni lineari ed omogenee ai limiti e tali che in U l'equazione $u^{(m)}=0$ ammette la sola soluzione nulla.

b) $L=I+E$

E ed H operatori compatti di $L_2\,[a,b]$ in $C^0\,[a,b]$ ed $U=L_2\,[a,b]$.

Il metodo consiste nell'approssimare le autosoluzioni di (1) con successioni di funzioni $\{P_n(x)\}_{n\in N}$ di U del tipo

$$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varphi_i(x) \qquad \varphi_i(x)\in U. \tag{2}$$

In altre parole, per ogni n si considera il problema (1) in un sottospazio $S_n\,(\subset U)$ a dimensione finita generato da $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ e si impone che il residuo

$$LP_n(x)-\lambda\,HP_n(x)$$

si annulli su n punti

$$\Omega_n=\{x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots,x_n^{(n)}\}$$

detti « punti di collocazione ». Tale condizione fornisce, per ogni n, il sistema lineare

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,[L\,\varphi_i(x_j^{(n)})-\lambda\,H\,\varphi_i(x_j^{(n)})]=0 \quad j=1,2,\dots,\text{n}$$

nelle incognite $\alpha_1\dots\alpha_n$ che risulteranno non tutte nulle se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo

$$\mathrm{Det}\,|L\,\varphi_i(x_j^{(n)})-\lambda\,H\,\varphi_i(x_j^{(n)})|=0. \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n\end{matrix} \tag{3}$$

L'equazione (3) risulta una equazione algebrica di grado n in λ se e solo se

(4) $$\mathrm{Det}\, |H\, \varphi_i\, (x_j^{(n)})| \neq 0.$$

Risolvendo l'equazione (3) si trovano, per ogni $n, \rho\,(n)$ radici reali

$$\lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_{\rho(n)}^{(n)}\,.$$

Se l'insieme $\mathcal{G}$ dei punti limite delle successioni

$$\{\lambda_i^{(n)}:\ i=1,2,\ldots,\rho\,(n)\}_{n\in N}$$

è incluso nell'insieme $\mathcal{A}$ degli autovalori di (1), allora diciamo che il metodo converge; quando $\mathcal{G}=\mathcal{A}$ allora diciamo che il metodo converge completamente.

In [1], [2], [3] è dimostrato che quando S_n è il sottospazio dei polinomi algebrici di grado al più $m+n-1$ inclusi in U, sotto opportune ipotesi sugli operatori L ed H e sulla scelta dei punti di collocazione, il metodo converge completamente.

In questo lavoro ci si propone di studiare il caso in cui le autosoluzioni sono approssimate con funzioni spline e si ricercano condizioni su queste ultime e sui punti di collocazione che ci garantiscano la convergenza e la completa convergenza del metodo.

2. Approssimazione spline. Teorema di rappresentazione.

Consideriamo lo spazio $\zeta_{\Delta_s}^k\,[a,b]$ delle funzioni spline $S_{\Delta_s}^k$ di grado k e nodi $\Delta_s=\{a=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_s<\xi_{s+1}=b\}$ cioè le funzioni di classe $C^{k-1}\,[a,b]$ che coincidono con un polinomio di grado al più k su ogni intervallo (ξ_{i-1},ξ_i) $i=1,\ldots,s+1$.

Quando i nodi sono fissati, $\zeta_{\Delta_s}^k\,[a,b]$ è uno spazio lineare di dimensione $s+k+1$ rappresentabile univocamente [4] attraverso la base $\{\sigma_i\}$:

$$\sigma_i\,(x)=\begin{cases}(x-\xi_i)_+^k & i=1,2,\ldots,s \ (^1)\\ x^{k+s+1-i} & i=s+1,s+2,\ldots,s+k+1\end{cases}$$

quindi

$$S_{\Delta_s}^k=\left\{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\,(x-\xi_i)_+^k+\sum_{i=0}^{k}\beta_i\,x^i:\ \alpha_i\in R,\ \beta_i\in R\right\}.$$

(1) $$(x-\xi_i)_+^k=\begin{cases}(x-\xi_i)^k & x>\xi_i\\ 0 & x\leq\xi_i\,.\end{cases}$$

Per quanto concerne la rappresentazione di funzioni di $\zeta^k_{\Delta_s}$ soddisfacenti a certe condizioni agli estremi a, b dimostriamo il seguente:

TEOREMA. *Sia U ($\subset C^{m-1}(a, b)$) l'insieme delle funzioni soddisfacenti a m ($\leq k$) condizioni ai limiti lineari omogenee sulle prime $m-1$ derivate per le quali il problema $u^{(m)}=0$ ammette solo la soluzione nulla.*

Lo spazio $\zeta^k_{\Delta_s}[a, b] \cap U$ ammette una ed una sola base del tipo

$$\varphi_i(x)=(x-\rho_i)^k_+ + p_i(x) \quad i=1,2,\dots,s+k+1-m$$

dove $p_i(x) \in \pi_{m-1}$ (2)*, $\rho_1 \dots \rho_{k+1-m}$ sono costanti scelte arbitrariamente ma tali che $\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_{k+1-m}\leq a$ e $\rho_{k+1-m+i}=\xi_i$ $i=1,\dots,s$.*

DIM. Sia $\mathcal{L}$ l'operatore lineare di C^{m-1} in R^m che esprime le m condizioni lineari ai limiti, cioè tale che $\mathcal{L}(r(x))=0$ per tutte le $r(x) \in U$. L'ipotesi su U implica che il determinante del sistema di ordine m

$$\mathcal{L}(p(x))=0 \qquad p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{m-1}x^{m-1}$$

è non nullo e quindi per ogni i esiste un unico polinomio $p_i(x) \in \pi_{m-1}$ tale che:

$$(x-\rho_i)^k_+ + p_i(x) \in U$$

cioè tale che

$$\mathcal{L}((x-\rho_i)^k_+ + p_i(x)) = \mathcal{L}((x-\rho_i)^k_+) + \mathcal{L}(p_i(x))=0.$$

Infatti la matrice del sistema lineare non omogeneo dei coefficienti di $p_i(x)$

$$\mathcal{L}(p_i(x)) = -\mathcal{L}((x-\rho_i)^k_+)$$

è non singolare.

Per verificare che le $\varphi_i(x)$ sono linearmente indipendenti nell'intervallo $[a, b]$ consideriamo l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{s+k+1-m} \gamma_i \varphi_i(x)=0. \quad \gamma_i \in R. \tag{5}$$

Nell'intervallo $[a, \rho_{k+2-m}]$, cioè in $[a, \xi_1]$, la (5) si scrive:

(2) π_{m-1} è l'insieme dei polinomi di grado al più $m-1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1-m} \gamma_i (x-\rho_i)^k + \sum_{i=1}^{s+k+1-m} \gamma_i p_i(x) = 0.$$

Applicando a quest'ultima il principio di identità dei polinomi relativamente alle potenze di x da m a k si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{k+1-m} \gamma_i \rho_i^t = 0 \qquad t=0,1,\ldots,k-m$$

che può essere verificata soltanto per $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{k+1-m}=0$.

Nell'intervallo $[\rho_{k+2-m}, \rho_{k+3-m}]$ cioè $[\xi_1, \xi_2]$, la (5), tenedo conto delle ultime uguaglianze, ha la forma

$$\gamma_{k+2-m}(x-\rho_{k+2-m})^k + \sum_{i=1}^{s+k+1-m} \gamma_i p_i(x) = 0$$

da cui $\gamma_{k+2-m} = 0$. Così proseguendo fino all'ultimo intervallo $[\rho_{k+s+1-m}, \rho_{k+s+2-m}]$, cioè $[\xi_s, b]$ si ottiene

$$\gamma_i = 0 \qquad i=1,\ldots,s+k+1-m.$$

Per dimostrare che le $\varphi_i(x)$ costituiscono una base basta osservare che la dimensione di $\zeta^k_{\Delta_s} \cap U$ è $s+k+1-m$. Imponendo infatti alla generica funzione di $S^k_{\Delta_s}$ la condizione di appartenenza ad U

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i (x-\xi_i)^k_+ + \sum_{i=0}^{k} \beta_i x^i\right) = 0$$

si ottiene il sistema lineare

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i x^i\right) = -\mathcal{L}\left(\sum_{i=m}^{k} \beta_i x^i\right) - \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i (x-\xi_i)^k_+\right)$$

che è risolvibile rispetto a $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ i quali risultano determinanti come combinazioni lineari dei rimanenti α_i e β_i.

Il teorema rimane così dimostrato; si osservi che per $m=0$ esso esprime una nota proprietà sulla rappresentazione delle funzioni spline in un intervallo limitato (3).

(3) Vedi per es. [5] pag. 128.

Fissata una rappresentazione per le funzioni spline appartenenti a $\zeta^k_{\Delta_s} \cap U$, rappresentazione che indicheremo ancora con

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varphi_i(x),$$

si considera una successione $\{L_n\}_N$ di operatori d'interpolazione tali che, per ogni n, L_n associa ad ogni $f(x) \in C^0 [a, b]$ una ed una sola funzione spline $S(x) \in \zeta^k_{\Delta_s}$ che la interpola su una n-pla Ω_n di punti di $[a, b]$ e tale che

$$\lim_n \|L_n f - f\|_\infty = 0$$

ciò che equivale ad essere

$$\|L_n\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|L_n f\|_\infty \leq c \qquad \forall n. \tag{6}$$

A questo proposito la letteratura fornisce vari teoremi di convergenza di schemi interpolatori mediante funzioni spline, ne citiamo alcuni che riescono ben utilizzabili nel metodo di collocazione esposto al punto 1. Il primo si riferisce a funzioni spline linari $(k=1)$ [6].

TEOREMA 1. *Sia* $\{\Omega_n\}_N$ *una successione di insiemi di punti del tipo*:

$$\Omega_n = \{a = x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b\}$$

e $\{\Delta_n\}_N$ *una successione di insiemi di nodi del tipo*

$$\Delta_{n-2} = \Omega_n - \{x_0^{(n)}, x_n^{(n)}\}.$$

Detto L_n *l'operatore che associa ad* $f(x) \in C^0[a, b]$ *la funzione spline* $S^1_{\Delta_{n-2}}$ *che la interpola sui punti* Ω_n, *si ha*

$$\|L_n\|_\infty = 1 \qquad \forall n$$

e per $\|\Omega_n\| = \max_i |x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}| \to 0$, *si ha* $\|L_n f - f\|_\infty \to 0$.

Un teorema analogo vale nel caso di funzioni spline cubiche $(k=3)$ [6].

TEOREMA 2. *Sia* $\{\Omega_n\}_N$ *la successione di insiemi di punti del teorema precedente e sia* $\{\Delta_n\}_N$ *la successione di insiemi di nodi così* *definita*

$$\Delta_{n-4} = \Omega_n - \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)}\}.$$

Detto L_n *l'operatore che associa ad ogni* $f(x) \in C^0[a,b]$ *la funzione spline* $S^3_{\Delta_{n-4}}$ *che interpola* $f(x)$ *sui punti* Ω_n, *si ha*

$$\|L_n\|_\infty \leq 1 + \frac{5}{2} q_n^2 \qquad \forall\, n$$

dove $q_n = \dfrac{\|\Omega_n\|}{\min\limits_i |x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}|}$. *Se* $|q_n| \leq c \;\; \forall n$, *allora risulta* L_n *uniformemente limitato e per* $\|\Omega_n\| \to 0$ *si ha*

$$\|L_n f - f\|_\infty \to 0.$$

3.

Ricordiamo che l'equazione (1), tipo *a*) risulta equivalente all'equazione

$$(I+T)\, u^{(m)} - \lambda\, \widetilde{K}\, u^{(m)} = 0 \qquad \widetilde{K} = H \circ K \tag{7}$$

dove K e T sono operatori integrali di nucleo rispettivamente $G(x,\xi)$ (funzione di Green relativa all'operatore $Au = u^{(m)}$, $u \in U$) e

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(x) \frac{d^{m-i}\, G(x,\xi)}{dx^{m-i}}.$$

L'equazione (7) può essere considerata in vari spazi. Se, come in [1] e [2], T e $\widetilde{K}$ sono operatori compatti di $L_2[a,b]$ in $C^0[a,b]$, a maggior ragione sono compatti in $C^0[a,b]$ per cui, a seguito della (6), risulta (4)

$$\lim_n \|(I - L_n)\widetilde{K}\|_\infty = \lim_n \|(I - L_n)\, T\|_\infty = 0. \tag{8}$$

Quando l'equazione $Lu = f$ ammette, per ogni $f \in C^0[a,b]$, una ed una sola funzione in U (ciò che implica essere $I+T$ dotato di inverso continuo), l'equazione

$$(I + L_n T)\, P_n^{(m)} = L_n f \tag{9}$$

(4) Cfr. [7], Lemma 15.4 pag. 212.

è risolubile univocamente per tutti gli n da un certo n_0 in poi ([5]) il che è equivalente ad essere risolubile per ogni $n > n_0$ il sistema lineare

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^{n} L\,\varphi_k\,(x_h^{(n)})\,\alpha_k = f\,(x_h^{(n)}) \qquad h=1,2,\dots,n$$

È opportuno rilevare che l'equazione tra (9) e (10) si ha nel caso che l'operatore L_n sia iniettivo. In queste condizioni risulta infine $I+L_n T$ dotato di inverso uniformemente limitato.

LEMMA 1. *Supponiamo che per ogni $f \in C^0[a,b]$ l'equazione $Lu=f$ ammetta in U una ed una sola soluzione. Sia $\varepsilon_n(x)$ una successione di funzioni continue in $[a,b]$ tali che $\|\varepsilon_n\|_\infty \to 0$. Detta Q_n la funzione spline appartenente a $\zeta^{m+1}_{\Delta_{n-2}} \cap U$, con Ω_n e Δ_{n-2} fissati come nel teorema 1 in numero sufficientemente alto da avere*

$$(11) \qquad L\,Q_n = \varepsilon_n \qquad su\ \Omega_n,$$

risulta

$$\lim_n \|Q_n\|_\infty = 0.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $Q_n(x)$ esiste ed è unica. Per il teorema del n°2 essa sarà del tipo

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,[(x-\rho_i)_+^{1+m} + p_i(x)]$$

$p_i(x) \in \pi^{m-1}$, $\rho_1 < \rho_2 < a$. Quindi la funzione spline $Q_n^{(m)}$ appartiene a $\zeta^1_{\Delta_{n-2}}[a,b]$ e, prendendo l'operatore L_n definito nel teorema 1, l'equazione (11) risulta equivalente a

$$(I+L_n T)\,Q_n^{(m)} = L_n\,\varepsilon_n$$

che, tenuto conto della nota (5), risulta risolubile univocamente da

([5]) Ciò è vero quando per ogni n la funzione spline $P_n^{(m)}$ appartiene ad un sottospazio di dimensione n ($\zeta^k_{\Delta_s}$ $s=n-k-1$) tale che la successione $\{\zeta^k_{\Delta_s}\}_{s \in N}$ è definitivamente densa in $C^0[a,b]$. Cioè $\forall f \in C^0[a,b]\ \lim_{s\to\infty} d(f, \zeta^k_{\Delta_s}) = 0$. Tali sono ad esempio $\zeta^1_{\Delta_{n-2}}$ e $\zeta^3_{\Delta_{n-4}}$ dei teoremi 1 e 2. Cfr. [7] Teorema 15.3 pag. 210.

n_0 in poi. Determinato univocamente $Q_n^{(m)}$, si ha

$$Q_n^{(m)} = (I + L_n T)^{-1} L_n \varepsilon_n$$

e quindi

$$\|Q_n^{(m)}\|_\infty \leq \|(I + L_n T)^{-1}\|_\infty \, \|L_n\|_\infty \, \|\varepsilon_n\|_\infty \to 0.$$

Tenuto conto infine che $Q_n = \widetilde{K} Q_n^{(m)}$, si ha $\lim\limits_n \|Q_n\|_\infty = 0$.

In maniera analoga si dimostra il seguente:

LEMMA 2. *Nelle stesse condizioni del lemma* 1 *sia* Q_n *la funzione spline appartenente a* $\zeta_{\Delta_{n-4}}^{3+m} \cap U$, *con* Ω_n *e* Δ_{n-4} *fissati come nel teorema* 2 *in numero sufficientemente alto da avere*

$$L\, Q_n = \varepsilon_n \quad su \quad \Omega_n.$$

Risulta allora:

$$\lim_n \|Q_n\|_\infty = 0.$$

4. Teoremi di convergenza.

Nella risoluzione del problema (1) - a) applicando il metodo di collocazione e approssimando le soluzioni con funzioni spline del tipo indicato nel lemma 1) o nel lemma 2), valgono i seguenti teoremi di convergenza.

TEOREMA A. *Se per ogni* $f \in C^0\,[a, b]$ *l'equazione* $Lu = f$ *ammette in* U *una ed una sola soluzione, il metodo di collocazione converge.*

La dimostrazione è quella del teorema 1 in [1] dove le funzioni $\varphi_i(x)$ sono quelle indicate all'inizio di questo numero. Basta osservare che anche il sistema di funzioni spline $\varphi_1 \dots \varphi_n$ può essere ortonormalizzato in $L_2\,[a, b]$ nel sistema $\psi_1 \dots \psi_n$ e che, come abbiamo già osservato, gli spazi generati dalle $\varphi_1^{(m)} \dots \varphi_n^{(m)}$, e quindi da $\psi_1^{(m)} \dots \psi_n^{(m)}$ costituiscono una successione definitivamente densa in $C^0\,[a, b]$.

TEOREMA B. *Se oltre all'ipotesi del teorema* A *accade che la funzione* $r(x)\, S(x, \xi)$ [6] *è limitata sul quadrato* $[a, b] \times [a, b]$, *allora il metodo di collocazione converge completamente.*

[6] $$S(x, \xi) = \begin{cases} G(x, \xi) & \text{se} \quad H = r(x)\, I \\ F(x, \xi) & \text{se} \quad H = r(x)\, M. \end{cases}$$

Valendo le ipotesi del teorema precedente, basterà dimostrare che $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$. Sia $\lambda^* \in \mathcal{I}$ e sia $\{\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)}\}_{s \in N}$ tale che $\lim\limits_{s \to \infty} \lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)} = \lambda^*$ a cui si associa la successione di funzioni spline $\{P_{n_s}\}_{s \in N}$ del tipo indicato all'inizio di questo numero che risolvono il sistema

$$L P_{n_s} - \lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)} r P_{n_s} = 0 \quad \text{su} \quad \Omega_{n_s} .$$

Si può sempre scegliere la successione in modo che sia

$$\| P_{n_s}^{(m)} \|_\infty = 1 \quad \text{per ogni } s.$$

Posto

$$Q_{n_s} = \frac{\lambda^*}{\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)}} P_{n_s} ,$$

si ha

(12) $$L\, Q_{n_s}(x) - \lambda^* r(x)\, Q_{n_s}(x) = \varepsilon_{n_s}(x) \quad \text{su} \quad \Omega_{n_s}$$

dove

(13) $$\varepsilon_{n_s}(x) = (\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)} - \lambda^*)\, r(x)\, Q_{n_s}(x).$$

Per il modo in cui è stato definito Q_{n_s} si ha inoltre

(14) $$\| Q_{n_s}^{(m)} \|_\infty = \left| \frac{\lambda^*}{\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)}} \right| .$$

Scriviamo (12) nella maniera equivalente

(15) $$(I + L_{n_s} T)\, Q_{n_s}^{(m)} - \lambda^* L_{n_s} r \tilde{K} Q_{n_s}^{(m)} = L_{n_s} \varepsilon_{n_s} .$$

Per la limitatezza uniforme di $Q_{n_s}^{(m)}$ in $C^0[a, b]$ e quindi anche in $L_2[a, b]$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{Q_{n_s^*}^{(m)}\}_{s \in N}$ debolmente convergente in $L_2[a, b]$ e poiché gli operatori integrali $r\tilde{K}$ e T sono compatti come operatori di $L_2[a, b]$ in $C^0[a, b]$, allora le successioni $\{r\tilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)}\}_{s \in N}$ e $\{T Q_{n_s^*}^{(m)}\}_{s \in N}$ convergono fortemente in $C^0[a, b]$, cioè esistono due funzioni continue f e g tali che

(16) $$\lim_s \| r \tilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - f \|_\infty = 0 \qquad \lim_s \| T Q_{n_s^*}^{(m)} - g \|_\infty = 0.$$

Essendo poi

$$\| L_{n_s^*} r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - f \|_\infty = \| L_{n_s^*} r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} + r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - f \|_\infty \leq$$

$$\leq \| (I - L_{n_s^*}) r \widetilde{K} \|_\infty \| Q_{n_s^*}^{(m)} \|_\infty + \| r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - f \|_\infty$$

e

$$\| L_{n_s^*} T Q_{n_s^*}^{(m)} - g \|_\infty = \| L_{n_s^*} T Q_{n_s^*}^{(m)} - T Q_{n_s^*}^{(m)} + T Q_{n_s^*}^{(m)} - g \|_\infty \leq$$

$$\leq \| (I - L_{n_s^*}) T \|_\infty \| Q_{n_s^*}^{(m)} \|_\infty + \| T Q_{n_s^*}^{(m)} - g \|_\infty$$

per le (16) e per le (8) si ha

$$\lim_s \| L_{n_s^*} r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} - f \|_\infty = 0 \qquad \lim_s \| L_{n_s^*} T Q_{n_s^*}^{(m)} - g \|_\infty = 0. \tag{17}$$

Poiché $Q_{n_s^*} = \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)}$, la (13) diventa

$$\varepsilon_{n_s^*}(x) = (\lambda_{i_{n_s^*}}^{(n_s^*)} - \lambda^*) \, r(x) \, \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)}(x)$$

e per le ipotesi fatte sulla successione $\{\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)}\}_{s \in N}$ e per la compattezza di $r\widetilde{K}$ si ha

$$\lim_s \| \varepsilon_{n_s} \|_\infty = 0.$$

Per la (15) e la (6) si ha inoltre

$$\| Q_{n_s^*}^{(m)} + L_{n_s^*} T Q_{n_s^*}^{(m)} - \lambda^* L_{n_s^*} r \widetilde{K} Q_{n_s^*}^{(m)} \|_\infty \leq \| L_{n_s^*} \|_\infty \| \varepsilon_{n_s^*} \|_\infty \to 0$$

$$\text{per} \quad s \to \infty$$

che, in virtù delle (17), ci consente di concludere che esiste una funzione continua ν tale che

$$\lim_s \| Q_{n_s^*}^{(m)} - \nu \|_\infty = 0. \tag{18}$$

La funzione ν, che risulta non nulla dato che, per la (14), è $\lim_s \|Q_{n_s}^{(m)}\|_\infty = 1$, per la continuità di $r\widetilde{K}$ e di T risolve l'equazione

(7) con $\lambda=\lambda^*$

$$(I+T)\,v-\lambda^*\,r\,\widetilde{K}\,v=0 \tag{19}$$

e quindi, per il modo in cui sono stati definiti $\widetilde{K}$ e T, la funzione u^* di U

$$u^*=Kv=\int_a^b G(x,\xi)\,v(\xi)\,d\xi \tag{20}$$

risolve il problema (1) per $\lambda=\lambda^*$

$$Lu^*-\lambda^*\,ru^*=0 \quad u^*\in U.$$

Poiché vale l'ipotesi del teorema precedente, $v\neq 0$ implica $(I+T)\neq 0$ e, per la (19) e (20), sarà $u^*\neq 0$ e quindi $\lambda^*\in\mathcal{A}$.

5. Approssimazione delle autosoluzioni.

Per il modo in cui è stata definita la funzione $Q_{n_s}(x)$ e per la (18) riesce $\lim_s \|P^{(m)}_{n^*_s}-v\|_\infty=0$ e quindi, per la (20),

$$\lim_s \|P^{(m)}_{n^*_s}-u^{*(m)}\|_\infty=0.$$

Tenuto poi conto che per ogni $u\in U$

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,u^{(m)}(\xi)\,d\xi$$

si ha

$$\|P^{(m-k)}_{n^*_s}-u^{*(m-k)}\|_\infty\leq\int_a^b\left|\frac{\partial^{m-k}G(x,\xi)}{\partial x^{m-k}}\right|d\xi\cdot\|P^{(m)}_{n^*_s}-u^{*(m)}\|_\infty$$

e quindi

$$\lim_s \|P^{(m-k)}_{n^*_s}-u^{*(m-k)}\|_\infty=0 \qquad k=1,2,\dots,m.$$

Si osserva dunque che approssimando le autofunzioni del problema (1) - a) con particolari funzioni spline, anziché con polinomi algebrici, si ottiene in più la convergenza uniforme su $[a, b]$ anche della derivata m-esima di $P_{n_s}^*$ alla derivata m-esima dell'autofunzione u^*.

Ciò è vero più in generale per ogni proiezione L_n tale che

$$\lim_n \|L_n f - f\|_\infty = 0.$$

6. Approssimazione numerica degli autovalori.

Per quanto riguarda l'approssimazione numerica degli autovalori, il metodo è stato provato sul problema differenziale del IV ordine

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^3 \dfrac{d^2u}{dx^2}\right] - \lambda\left(1-\dfrac{x}{2}\right)u = 0 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

già trattato in [1], approssimando le soluzioni con funzioni spline cubiche. Si osserva che le successioni $\{\lambda_{i_{n_s}}^{(n_s)}\}_s$ convergono agli autovalori λ_i più lentamente rispetto al caso dell'approssimazione polinomiale, ma d'altra parte per ogni n, dette $\lambda_1^{(n)} \dots \lambda_{e_n}^{(n)}$ le soluzioni della equazione di collocazione (3), gli errori $|\lambda_i - \lambda_i^{(n)}|$ subiscono, al crescere di i, una caduta di precisione meno sensibile.

Nella seguente tabella sono riportate le prime 6 radici dell'equazione di collocazione ottenuta per $n=8$ nel caso polinomiale (I) e nel caso spline (II), i valori esatti (7) dei primi 6 autovalori di (21) e gli errori percentuali nei due casi.

I	50,71638	838,012	4211,40	13484	32165	99800
II	50,71730	837,836	4213,16	13220	32591	76514
autov.	50,71623	838,209	4222,25	13306	32432	67185
$\%-I$	0,00029	0,023	0,257	1,34	0,82	48,7
$\%-II$	0,00211	0,044	0,215	0,64	0,49	13,9

(7) Sono considerati esatti i valori ottenuti in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BELLEN - S. GUERRA, *Il metodo di collocazione e il calcolo degli autovalori di problemi diff. lineari ordinari. Teoremi di convergenza e applicazioni.* Atti Sem. Mat. e Fis. Univ. Modena. Vol. XXIII 205-221 (1974).

[2] A. BELLEN - S. GUERRA, *Teoremi di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di equazioni integro-differenziali lineari ordinarie.* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. Vol. VI fasc. II (1974).

[3] A. BELLEN - S. GUERRA, *Un teorema di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di equazioni funzionali lineari.* Rend. Ist. Matem. Univ. di Trieste. Vol. VII fasc. I (1975).

[4] I. J. SHOEMBERG - A. WHITNEY, *On Polya frequency functions III. The positivity of translation determinants whith an application to the interpolation problem by spline curves.* Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953) 246-259.

[5] J. R. RICE, *The approximation of functions.* Addison-Wesley Publ. Co. 1969.

[6] C . R. DE BOOR, *The method of projections as applied to the numerical solution of two point boundary value problems using cubic splines.* Ph. D. Thesis, University of Michigan. Ann. Arbor Mich. 1966.

[7] M. A. KRASNOSEL' SKII E ALTRI, *Approximate solution of operator equations.* Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, 1972.