POLINOMI GENERATI DA SUCCESSIONI PESO E TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE DI UNA FUNZIONE IN SERIE DI TALI POLINOMI (*)

di SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Si affronta lo studio dei polinomi generati da successioni peso. Questo studio conduce, in modo naturale, alla nozione di polinomi auto-associati e associati i quali forniscono successioni utilizzabili come base per la rappresentazione delle funzioni in media quadratica. Si ritrovano, in particolare, risultati di tipo classico e risultati del tipo di quelli considerati da A. Ghizzetti e A. Ossicini.*

SUMMARY. - *The study is undertaken of polynomials generated by weight-sequences. The notion is obtained, in a natural way, of self-associated polynomials and of associated polynomials that given sequences useful as a base for square mean rappresentation of functions. As special case, classical results are obtained and also results as those considered by A. Ghizzetti and A. Ossicini.*

1. Considerazioni preliminari.

Sia $[a, b]$, $a<b$, un intervallo chiuso e limitato e sia

$$\{w_n(x)\}_N \tag{1}$$

una *successione peso* su $[a, b]$, cioè una successione di funzioni a valori reali su $[a, b]$, ivi non negative e integrabili (secondo Lebesgue)

(*) Pervenuto in Redazione il 7 maggio 1976.
Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per L'Informatica Matematica.

(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale - 57100 Livorno.

e tali che:

$$\int_a^b w_n(x)\,dx > 0, \quad \forall n \in N. \tag{2}$$

Alla (1), com'è ben noto, può associarsi, in modo univoco, una successione

$$\{P_n(x)\}_N \tag{3}$$

di polinomi algebrici in x: quella il cui termine n-esimo è costituito dal polinomio, di grado n e col coefficiente di x^n uguale ad 1[1], per il quale risulta

$$\int_a^b w_n(x)\,P_n(x)\,x^r\,dx = 0; \quad r = 0, 1, \dots, n-1 \ \text{[2]}. \tag{4}$$

Dalla (4) segue subito che:

I. Nella (3) il termine n-esimo è ortogonale, rispetto al peso $w_n(x)$, a tutti i termini che lo precedono.

II. Posto

$$c_r^{(n)} = \int_a^b w_n(x)\,x^r\,dx; \quad r = 0, 1, \dots \tag{5}$$

e detto $\Delta_j^{(n)}$ il determinante di Hankel dei primi $2j+1$ momenti rispetto al peso $w_n(x)$:

$$\Delta_j^{(n)} = \begin{vmatrix} c_0^{(n)} & c_1^{(n)} & \dots & c_j^{(n)} \\ c_1^{(n)} & c_2^{(n)} & \dots & c_{j+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{j+1}^{(n)} & c_{j+2}^{(n)} & \dots & c_{2j+1}^{(n)} \end{vmatrix} \quad (\Delta_0^{(1)} = c_0^{(1)}),$$

(1) Questa standardizzazione, pur non essendo strettamente necessaria, ci sarà, per il seguito, particolarmente comoda.

(2) È immediato osservare che due successioni peso, i cui termini corrispondenti differiscono al più per un fattore costante positivo, generano una medesima successione del tipo (3). Due successioni peso così fatte le riterremo, pertanto, tra loro indistinguibili.

risulta

$$\int_a^b w_n(x)\, P_n^2(x)\, dx = \frac{\Delta_n^{(n)}}{\Delta_{n-1}^{(n)}} \tag{6}$$

III. Se $[a, b]$ è simmetrico rispetto all'origine e se $w_n(x)$ è funzione pari, risulta

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{7}$$

Da una ben nota proprietà dei polinomi ortogonali rispetto ad un peso segue, inoltre, che:

IV. Ogni termine della (3) ha i suoi zeri tutti reali, semplici e interni ad $[a, b]$.

Per il seguito indicheremo con

$$\{P_n^w(x)\}_N \tag{8}$$

la successione dei polinomi ortogonali su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$, standardizzati, come i $P_n(x)$, col porre uguale ad 1 il coefficiente di x^n.

Si osservi che, se

$$\{\varphi_n(x)\}_N \tag{9}$$

è una successione di polinomi di 1^0 grado in x col coefficiente ρ di x tale che $|\rho| = 1$, poiché la differenza $P_n(x) - \rho\, \varphi_n(x).\ P_{n-1}(x)$, $n > 1$, riesce al più di grado $n-1$, sussiste una uguaglianza del tipo

$$P_n(x) = \varrho\varphi_n(x)\, P_{n-1}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}^{(n)}\, P_{n-k}^{W_n}(x) \qquad (P_0^{W_n}(x) = 1) \tag{10}$$

e che, essendo $P_n(x) = P_n^{W_n}(x)$, risulta

$$a_{n-k}^{(n)} = -\frac{\varrho \int_a^b w_n(x)\, \varphi_n(x)\, P_{n-1}(x)\, P_{n-k}^{W_n}(x)\, dx}{\int_a^b w_n(x)\, [P_{n-k}^{W_n}(x)]^2\, dx}. \tag{11}$$

2. Qualche osservazione relativa agli zeri.

2.1. Vale la seguente

PROPOSIZIONE. *Sia* $n>1$, $x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\dots<x_n^{(n)}$ *gli zeri di* $P_n(x)$, $x_1^{(n-1)}<x_2^{(n-1)}<\dots<x_{n-1}^{(n-1)}$ *quelli di* $P_{n-1}(x)$ *e sia* $x_0^{(n-1)}=a$, $x_n^{(n-1)}=b$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché i due polinomi* $P_n(x)$ *e* $P_{n-1}(x)$ *non abbiano zeri a comune e ciascun intervallo* $[x_r^{(n-1)}, x_{r+1}^{(n-1)}]$; $r=0,1,\dots,n-1$, *contenga uno ed un solo zero di* $P_n(x)$ *è che la successione* (1) *sia tale che, per essa, risulti*

$$P_n'(x_r^{(n)})\cdot P_{n-1}(x_r^{(n)})>0;\quad r=1,2,\dots,n. \tag{12}$$

Dimostriamo che la (12) è necessaria.

$P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$ non abbiano zeri a comune e ciascun intervallo $[x_r^{(n-1)}, x_{r+1}^{(n-1)}]$; $r=0,1,\dots,n-1$, contenga uno ed un solo zero di $P_n(x)$. Per la IV. di 1. e a motivo della standardizzazione, risulta $P_n'(x_n^{(n)})>0$, $P_{n-1}(x_n^{(n)})>0$ e la (12) è vera per $r=n$; da ciò e da quanto supposto segue, allora, $P_n'(x_{n-1}^{(n)})<0$, $P_{n-1}(x_{n-1}^{(n)})<0$ e la (12) è vera per $r=n-1$; ... e la (12) è vera per $r=1$.

Dimostriamo che la (12) è sufficiente.

La (12) sia vera per $r=1,2,\dots,n$. Che i due polinomi $P_n(x)$ e $P_{n-1}(x)$ non abbiano zeri a comune è ovvio. Per la 2ª parte della dimostrazione essendo, come subito si osserva, $P_n'(x_r^{(n)})\cdot P_n'(x_{r+1}^{(n)})<0$; $r=1,2,\dots,n-1$ e, per la (12), $P_n'(x_r^{(n)})\cdot P_{n-1}(x_r^{(n)})>0$, $P_n'(x_{r+1}^{(n)})\cdot P_{n-1}(x_{r+1}^{(n)})>0$, è poi $P_{n-1}(x_r^{(n)})\cdot P_{n-1}(x_{rH}^{(n)})<0$, cosicché il polinomio $P_{n-1}(x)$ si annulla almeno una volta sull'intervallo $[x_r^{(n)}, x_{r+1}^{(n)}]$. Essendo gli intervalli di questo tipo in numero di $n-1$, il polinomio $P_{n-1}(x)$ si annulla, allora, in ciascuno di essi, una ed una sola volta; da ciò la tesi.

OSSERVAZIONE I. La proposizione ora dimostrata generalizza un noto risultato (3) sulla separazione degli zeri dei polinomi appartenenti ad una successione del tipo (8). Infatti, quando sia

$$w_n(x)=w(x),\quad \forall n\in N, \tag{13}$$

la (12) riesce, com'è noto, soddisfatta (4).

OSSERVAZIONE II. Segnaliamo qui un caso in cui la (12) si realizza, per ogni $n>1$, senza che la (1) sia del tipo (13).

(3) Cfr. in [1] il teorema 3.3.2, pg. 45.
(4) Cfr. in [1] il teorema 3.2.2, pg. 42.

La (9) sia scelta in modo che, per essa, il polinomio $\varphi_n(x)$ riesca positivo su $[a, b]$ per ogni n (5) e la (1) sia la successione definita ponendo

$$w_n(x) = \frac{w_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}, \qquad \forall n \in N, \tag{14}$$

essendo $w_0(x)$ un peso su $[a, b]$ comunque assegnato.

In queste circostanze, dalla (10), in virtù della (11), segue

$$P_{n-1}(x) = \frac{\overset{w_n}{P_n}(x) - a_{n-1}^{(n)} \overset{w_n}{P}_{n-1}(x)}{\varrho\, \varphi_n(x)}$$

e il 1° membro della disuguaglianza (12) assume in corrispondenza la forma

$$-\frac{1}{\varrho\varphi_n(x)} \cdot a_{n-1}^{(n)} \cdot \left[\frac{d}{dx} \overset{w_n}{P_n}(x)\right]_{x=x_r^{(n)}} \cdot \overset{w_n}{P}_{n-1}(x_r^{(n)}).$$

Essendo, per la (11),

$$a_{n-1}^{(n)} = -\frac{\varrho \displaystyle\int_a^b w_{n-1}(x) P_{n-1}(x) \overset{w_n}{P}_{n-1}(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b w_n(x) [\overset{w_n}{P}_{n-1}(x)]^2\, dx} =$$

$$= -\frac{\varrho \displaystyle\int_a^b w_{n-1}(x) P_{n-1}(x) \{ P_{n-1}(x) + [\overset{w_n}{P}_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)] \}\, dx}{\displaystyle\int_a^b w_n(x) [\overset{w_n}{P}_{n-1}(x)]^2\, dx} =$$

$$= -\varrho \cdot \frac{\displaystyle\int_a^b w_{n-1}(x) P_{n-1}^2(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b w_n(x) [\overset{w_n}{P}_{n-1}(x)]^2\, dx},$$

(5) O, più in generale, che per essa la successione (14) risulti una successione peso.

riesce

$$-\frac{1}{\varrho\varphi_n(x)}\cdot a_{n-1}^{(n)}>0, \quad \forall x\in[a,b];$$

per essere

$$\left[\frac{d}{dx}\,P_n^{w_n}(x)\right]_{x=x_r^{(n)}}\cdot P_{n-1}^{w_n}(x_r^{(n)})>0; \quad r=1,2,\dots,n \text{ (6)}$$

la condizione (12) risulta, allora, soddisfatta.

2.2. Dalle considerazioni del n° 2.1. discende subito il seguente

TEOREMA. *Sia $\varphi(x)$ un polinomio di 1° grado non negativo su $[a,b]$ e sia $w(x)$ un peso su $[a,b]$. Detti, per ogni $n>1$, $x_1<x_2<\dots$ $\dots<x_{n-1}$ gli zeri di $P_{n-1}^{w\cdot\varphi}(x)$ e posto $x_0=a$, $x_n=b$, in ogni intervallo $[x_r,x_{r+1}]$; $r=0,1,\dots,n-1$, cade uno ed un solo zero di $P_n^w(x)$.*

Di questo teorema riteniamo opportuno segnalare i due corollari seguenti che evidenziano nuove proprietà degli zeri dei polinomi di Jacobi.

COROLLARIO I. *Detti, per ogni $n>1$, $x_1<x_2<\dots<x_{n-1}$ gli zeri del polinomio $P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x)$ di Jacobi, di ordine $n-1$ e indici $\alpha,\beta+1$ e posto $x_0=-1$, $x_n=1$, in ogni intervallo $[x_r,x_{r+1}]$; $r=0,1,\dots,n-1$, cade uno ed un solo zero del polinomio $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ di Jacobi, di ordine n e indici α e β.*

COROLLARIO II. *Detti, per ogni $n>1$, $x_1<x_2<\dots<x_{n-1}$ gli zeri del polinomio $P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)$ di Jacobi, di ordine $n-1$ e indici $\alpha+1,\beta$ e posto $x_0=-1$, $x_n=1$, in ogni intervallo $[x_r,x_{r+1}]$; $r=0,1,\dots,n-1$, cade uno ed un solo zero del polinomio $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ di Jacobi, di ordine n e indici α e β.*

2.3. Sul modo di distribuirsi, al crescere di n, degli zeri del $P_n(x)$ vale, in proposito, il seguente:

TEOREMA I. *Esistano due costanti positive λ e μ e un indice n_0 tali che*

$$(15) \qquad n>n_0 \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^b w_n(x)\,dx<\lambda \\ w_n(x)>\mu, \quad \forall x\in[a,b] \end{cases}$$

(6) Cfr. in [1] il teorema 3.2.2, pg. 42.

Detti $x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$ *gli zeri di* $P_n(x)$, *per ogni* $n > n_0$ *risulta, allora,*

$$x_{r+1}^{(n)} - x_r^{(n)} < \frac{K \cdot \log n}{n}; \qquad r = 1, 2, \dots, n-1, \tag{16}$$

essendo K una costante dipendente da λ, μ *e dagli estremi dell'intervallo* $[a, b]$.

Per la dimostrazione basta ripetere il ragionamento, in [1], a prova del teorema 6.11.1, pg. 108 e tener conto della (15).

Nell'ipotesi del teorema I vale anche un teorema dello stesso tipo di quello, ben noto, di Erdös-Turan (7); precisamente il seguente:

TEOREMA II. *Se per la* (1) *la condizione* (15) *è soddisfatta, allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 \, dx = 0, \quad \forall f(x) \in C^0 [a, b], \tag{17}$$

essendo $L_{n-1}(x)$ *il polinomio di Lagrange che interpola la* $f(x)$ *negli zeri di* $P_n(x)$.

Detta E_{n-1} la migliore uniforme approssimazione per $f(x)$, su $[a, b]$, mediante polinomi algebrici di grado non superiore ad $n-1$, risulta

$$\int_a^b w_n(x) [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 \, dx \leq 4 E^2_{n-1} \int_a^b w_n(x) \, dx \quad (8). \tag{18}$$

Dalla (18), in virtù della (15), segue, allora, la tesi.

3. I polinomi autoassociati.

3.1. Sia $\mathcal{P}_n$ l'insieme dei polinomi algebrici in x, di grado n, a coefficienti reali, standardizzati col porre uguale ad 1 il coefficiente di x^n; sia, inoltre, $w(x)$ una funzione peso su $[a, b]$ ed s un intero positivo.

Per ogni $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ la funzione $w(x) \, p_n^{2s}(x)$ è un peso su $[a, b]$ e, dunque, fissato comunque $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$, esiste uno ed un solo $q_n(x) \in \mathcal{P}_n$

(7) Cfr. [2].

(8) Cfr., ad esempio, [3], pg. 396.

per il quale risulta

$$(19) \qquad \int_a^b w(x)\, p_n^{2s}(x)\, q_n(x)\, x^r\, dx = 0; \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Detta T_n la trasformazione di $\mathcal{P}_n$ in sé che associa ad ogni polinomio $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ il polinomio $q_n(x)$ definito attraverso le (19) e posto

$$(20) \qquad F(T_n) = \{ p_n \in \mathcal{P}_n \mid T_n(p_n) = p_n \},$$

dimostriamo che:

TEOREMA. *L'insieme $F(T_n)$ è non vuoto.*

Ci riferiremo, per comodità, all'intervallo $[0, 1]$, potendoci a questo sempre ricondurci con una opportuna sostituzione lineare.

Indicata con $\alpha_k^{(p_n)}$; $k = 1, 2, \dots, n$, la somma dei prodotti k ak delle radici dell'elemento $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$, la T_n può pensarsi, anche, come una trasformazione puntuale dello spazio euclideo ad n dimensioni:

$$S_n = \{(\alpha_1^{(p_n)}, \dots, \alpha_n^{(p_n)})\}$$

in sé e, in virtù della IV di 1, posto

$$I_n = \underbrace{[0, n] \times [0, n] \times \dots \times [0, n]}_{n \text{ fattori}},$$

riesce

$$T_n(S_n) \subset I_n.$$

Essendo la T_n continua (9) e I_n compatto, per un noto teorema di Schauder (10), segue, allora, la tesi (11).

È poi facile verificare che l'insieme (20) è costituito da uno ed un sol elemento di $\mathcal{P}_n$ (12), per indicare il quale useremo il simbolo $P_{s,n}(x)$ (13).

(9) Come facilmente può osservarsi, $\alpha_k^{(q_n)}$; $k = 1, 2, \dots, n$, $q_n = T_n(p_n)$, si lascia esprimere razionalmente mediante $\alpha_1^{(p_n)}, \dots, \alpha_n^{(p_n)}$.

(10) Cfr. [4].

(11) Si riottiene, così, molto semplicemente, un risultato dovuto a A. Ossicini (Cfr. [5], pp. 216-222).

(12) Cfr. [5], pp. 214-215.

(13) Già usato in [6] per il caso $w(x) = 1$.

Il polinomio $P_{s,n}(x)$, cioè l'elemento di $\mathcal{P}_n$ per il quale risulta

$$(21) \qquad \int_a^b w(x)\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\, x^r\, dx = 0; \quad r = 0, 1, \dots, n-1,$$

lo diremo *polinomio s-autoassociato, di ordine n, rispetto al peso* $w(x)$.

3.2. Vale il seguente

TEOREMA. *Se la funzione* $w(x)$ *è monotona su* $[a, b]$, *la funzione* $\{w(x)\}^{\frac{1}{2s+2}} \, |P_{s,n}(x)|$ *assume il suo massimo, su* $[a, b]$, *per* $x=a$ *o per* $x=b$ *secondoché* $w(x)$ *è non crescente o non decrescente su* $[a, b]$.

Supporremo $w(x)$ non decrescente su $[a, b]$ (se $w(x)$ è non crescente il teorema si dimostra in modo perfettamente analogo).

Poniamo

$$H(x) = w(b)\, P_{s,n}^{2s+2}(b) - w(x)\, P_{s,n}^{2s+2}(x)$$

e indichiamo con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ gli zeri di $P_{s,n}(x)$.

Dalla formula di integrazione per parti ([14]) discende l'identità

$$(22) \qquad H(x) = \int_x^b P_{s,n}^{2s+2}(t)\, d\, w(t) + (2s+2) \int_x^b w(t)\, P_{s,n}^{2s+1}(t)\, P'_{s,n}(t)\, dt$$

e da questa, per la (21), la

$$(23) \qquad H(x) = \int_x^b P_{s,n}^{2s+2}(t)\, d\, w(t) - (2s+2) \int_a^x w(t)\, P_{s,n}^{2s+1}(t)\, P'_{s,n}(t)\, dt.$$

Essendo

$$P_{s,n}^{2s+1}(t)\, P'_{s,n}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [x_n, b]$$

$$P_{s,n}^{2s+1}(t)\, P'_{s,n}(t) \leq 0, \quad \forall t \in [a, x_1],$$

per la non decrescenza di $w(x)$, dalle (22) e (23) segue:

$$H(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, x_1] \cup [x_n, b].$$

([14]) Integrazione intesa nel senso di Lebesgue-Stieltjes.

Dimostriamo che, anche se è $n>1$, risulta $H(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Fissato comunque r nell'insieme $\{1,2,\dots,n-1\}$, il polinomio

$$\widetilde{P}_{s,n-r}(x)\,\frac{P_{s,n}(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_r)}$$

è s-autoassociato rispetto al peso

$$\widetilde{w}(x)=w(x)\,[(x-x_1)\dots(x-x_r)]^{2s+2};$$

si ha, infatti, per la (21),

$$\int_a^b \widetilde{w}(x)\,\widetilde{P}^{2s+1}_{s,n-r}(x)\,u_{n-r-1}(x)\,dx=\int_a^b w(x)\,P^{2s+1}_{s,n}(x)\,u_{n-1}(x)\,dx=0 \quad (^{15}).$$

Poiché $\widetilde{w}(x)$ è non decrescente su $[x_r,b]$, per quanto prima dimostrato, risulta

$$H(x)=\widetilde{w}(b)\,\widetilde{P}^{2s+2}_{s,n-r}(b)-\widetilde{w}(x)\,\widetilde{P}^{2s+2}_{s,n-r}(x)\geq 0,\quad \forall x\in[x_r,x_{r+1}],$$

qualunque sia r e, dunque, riesce $H(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$.
Da ciò segue subito la tesi ([16]).

4. I polinomi associati

4.1. Poniamo ora

$$F(T_n^2)=\{p_n\in\mathcal{P}_n \mid T_n(T_n(p_n))=p_n\} \tag{24}$$

e dimostriamo che:

TEOREMA. *L'insieme* $F(T_n^2)-F(T_n)$ *è non vuoto.*
Come nella dimostrazione del teorema del n^0 3.1., ci riferiremo anche qui, per comodità, all'intervallo $[0,1]$.

([15]) Qui e nel seguito $u_k(x)$ ha il significato di polinomio algebrico in x di grado non superiore a k.

([16]) Il teorema ora dimostrato è la naturale estensione di un teorema di G. Szegö (cfr. [1], teorema 7.2, pg. 158) e contiene, come caso particolare un risultato dovuto a A. Ghizzetti e A. Ossicini (cfr. [6], pp. 22-24).

Dimostrare il teorema equivale a dimostrare l'esistenza in $\mathcal{P}_n$ di due elementi

$$p_n(x)=x^n-\alpha_1^{(p_n)}x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\alpha_n^{(p_n)},$$

$$q_n(x)=x^n-\alpha_1^{(q_n)}x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\alpha_n^{(q_n)}$$

tra loro distinti e tali che, posto

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\quad \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),$$

$$\Phi_r(\alpha;\beta)=\int_0^1 w(x)\,[x^n-\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\alpha_n]^{2s}\cdot$$

$$\cdot\,[x^n-\beta_1 x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\beta_n]\,x^r\,dx;\quad r=0,1,\ldots,n-1,$$

per essi risulti

$$\text{(25)}\qquad \Phi_r(\alpha^{(p_n)};\alpha^{(q_n)})=0,\quad \Phi_r(\alpha^{(q_n)};\alpha^{(p_n)})=0;\quad r=0,1,\ldots,n-1.$$

Dimostriamo, dunque, che le $2n$ ipersuperficie algebriche di S_{2n}

$$\text{(26)}\qquad \Phi_r(\alpha;\beta)=0,\quad \Phi_r(\beta;\alpha)=0;\quad r=0,1,\ldots,n-1,$$

ammettono almeno una intersezione reale $(\alpha^{(p_n)};\alpha^{(q_n)})$ [17], con $\alpha^{(p_n)}\neq\alpha^{(q_n)}$.

Essendo, per ogni r,

$$\frac{\partial\Phi_r(\alpha;\beta)}{\partial\beta_n}=(-1)^n\int_0^1 w(x)\,[x^n-\alpha_1 x^{u-1}+\ldots+(-1)^n\alpha_n]^{2s}\,x^r\,dx\neq 0$$

$$\frac{\partial\Phi_r(\beta;\alpha)}{\partial\alpha_n}=(-1)^n\int_0^1 w(x)[x^n-\beta_1 x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\,\beta_n]^{2s}\,x^r\,dx\neq 0,$$

ciascuna delle ipersuperficie (26) è priva di punti multipli; pertanto, posto

$$\Phi(\alpha;\beta)=\prod_{r=0}^{n-1}\Phi_r(\alpha;\beta),$$

[17] Dalle (25), in virtù della IV di 1, segue necessariamente $(\alpha^{(p_n)};\alpha^{(q_n)})\in$ $\in I_n\times I_n$.

le loro eventuali intersezioni sono date da tutti e soli i punti multipli per l'ipersuperficie

$$\Phi(\alpha;\beta)\cdot\Phi(\beta;\alpha)=0,$$

cioè da tutti e soli i punti per i quali è verificato il sistema

$$(27)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi(\alpha;\beta)}{\partial\alpha_k}\cdot\Phi(\beta;\alpha)+\dfrac{\partial\Phi(\beta;\alpha)}{\partial\alpha_k}\cdot\Phi(\alpha;\beta)=0 & (k=1,2,\dots,n)\\[2ex] \dfrac{\partial\Phi(\alpha;\beta)}{\partial\beta_k}\cdot\Phi(\beta;\alpha)+\dfrac{\partial\Phi(\beta;\alpha)}{\partial\beta_k}\cdot\Phi(\alpha;\beta)=0 & (k=1,2,\dots,n)\\[2ex] \Phi(\alpha;\beta)\cdot\Phi(\beta;\alpha)=0. \end{cases}$$

Si controlla subito che, fissato comunque r, se $(\alpha^{(p_n)};\alpha^{(q_n)})$ è una soluzione reale del sistema

$$(28)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi_r(\alpha;\beta)}{\partial\alpha_k}=0\ (k=1,2,\dots,n)\\[2ex] \Phi_r(\alpha;\beta)=0,\end{cases}$$

$(\alpha^{(p_n)};\alpha^{(q_n)})$ è una soluzione reale del sistema (27) ([18]) e risulta $\alpha^{(p_n)}\neq\alpha^{(q_n)}$ ([19]).

Il sistema (28), con la convenzione $\beta_0=1$ e posto

$$(29)\quad\begin{cases}a_{h,k}(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 w(x)\,[x^n-\alpha_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n\alpha_n]^{2s-1}\,x^{2n+r-h-k}\,dx\\[2ex] b_h(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 w(x)\,[x^n-\alpha_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n\alpha_n]^{2s}\,x^{n+r-h}\,dx,\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}h=0,1,\dots,n\\ k=1,2,\dots,n\end{pmatrix}$$

([18]) Si tenga presente che le n equazioni che figurano nella 2ª riga di (27) si ottengono da quelle della 1ª riga scambiando tra loro i vettori α e β e che, con tale scambio, l'ultima equazione del medesimo sistema si muta in sé.

([19]) Essendo

$$\frac{\partial\Phi_r(\alpha;\beta)}{\partial\alpha_k}=(-1)^k.\,2s\int_0^1 w(x)\,[x^n-\alpha_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n\alpha_n]^{2s-1}\cdot$$
$$\cdot[x^n-\beta_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n\beta_n]\,x^{n+r-k}\,dx,$$

è, infatti,

$$\left[\frac{\partial\Phi_r(\alpha;\beta)}{\partial\alpha_k}\right]_{(\alpha;\alpha)}\neq 0,\qquad\forall(\alpha;\alpha)\in S_{2n}.$$

si lascia scrivere nella forma

$$(30)\qquad \begin{cases} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h a_{h,k}(\alpha)\, \beta_h = 0 \quad (k=1,2,\dots,n) \\ \sum_{h=0}^{n} (-1)^h b_h(\alpha)\, \beta_h = 0\,. \end{cases}$$

È allora immediato constatare che i vettori di S_{2n} soluzioni di (28) sono in corrispondenza univoca con i vettori di S_n soluzioni dell'equazione

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} a_{nn}(\alpha) & a_{n-1,n}(\alpha) & \dots\, a_{0,n}(\alpha) \\ a_{n,n-1}(\alpha) & a_{n-1,n-1}(\alpha) & \dots\, a_{0,n-1}(\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}(\alpha) & a_{n-1,1}(\alpha) & \dots\, a_{0,1}(\alpha) \\ b_n(\alpha) & b_{n-1}(\alpha) & \dots\, b_0(\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

il cui 1° membro differisce al più per il segno dal discriminante del sistema (30).

Per quanto precede non resta, dunque, altro da dimostrare che la funzione $D(\alpha)$ si annulla almeno una volta in I_n.

Osserviamo subito che nell'origine $D(\alpha)$ assume valore positivo; dalle (29), calcolate per $\alpha=(0,\dots,0)$, segue infatti che $D(0)$ coincide con il determinante di Hankel dei primi $2n+1$ momenti rispetto al peso $w(x)\cdot x^{(2s-1)n+r}$.

Indichiamo ora con $x^n - \alpha_1^* x^{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_n^*$ il polinomio s-autoassociato, di ordine n, rispetto al peso $w(x)$ e con α^* il vettore (di I_n) di componenti $\alpha_1^*,\dots,\alpha_n^*$. Valendo, con la convenzione $\alpha_0=1$, $\forall \alpha \in S_n$, le identità

$$(31)\qquad \sum_{h=0}^{n} (-1)^h a_{h,k}(\alpha)\cdot \alpha_h = b_k(\alpha) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

ed essendo

$$(32)\qquad \Phi_r(\alpha^*;\alpha^*) = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h b_h(\alpha^*)\cdot \alpha_h^* = 0,$$

posto

$$A(\alpha^*) = \begin{bmatrix} a_{n,n}(\alpha^*) & a_{n-1,n}(\alpha^*) \dots a_{1,n}(\alpha^*) \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{n,1}(\alpha^*) & a_{n-1,1}(\alpha^*) \dots a_{1,1}(\alpha^*) \end{bmatrix},$$

riesce

$$D(\alpha^*) = \left| \begin{array}{c:c} A(\alpha^*) & \begin{matrix} b_n(\alpha^*) \\ \vdots \\ b_1(\alpha^*) \end{matrix} \\ \hdashline b_n(\alpha^*) \dots b_1(\alpha^*) & 0 \end{array} \right| \text{ [20] } .$$

Detti c_i, $i=0, 1, \dots,$ i momenti rispetto al peso

$$w(x)\,[x^n - \alpha_1^*\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n\, \alpha_n^*]^{2s-2} \cdot x^{n+r},$$

risulta

$$a_{h,k}(\alpha^*) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \alpha_j^*\, c_{2n-h-k-j}\,.$$

Ne segue, come facilmente può verificarsi, che $A(\alpha^*)$ e la matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \dots c_{n-1} \\ c_1 & c_2 \dots c_n \\ \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ c_{n-1} & c_n \dots c_{2n-2} \end{bmatrix}$$

hanno la stessa aggiunta $\tilde{C}$.

Essendo la forma quadratica

$$x\, C\, x_{-1} \text{ [21]}$$

[20] Basta sostituire qui, ordinatamente, agli elementi dell'ultima colonna le combinazioni lineari indicate ai primi membri delle (31) e (32), le prime calcolate per $\alpha = \alpha^*$ e tener conto della regola che fornisce lo sviluppo di un determinante ad elementi polinomiali.

[21] $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_{-1} trasposto di x.

definita positiva (22) e quindi definita positiva la forma quadratica ag-

$$x\,\widetilde{C}\,x_{-1} = -\left|\begin{array}{c:c} A\,(\alpha^*) & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \\ \hdashline x_1 \ldots x_n & 0 \end{array}\right|,$$

risulta, allora, $D\,(\alpha^*) < 0$.

La funzione $D\,(\alpha)$ assume valori di segno opposto in punti distinti di I_n e, pertanto, vale la tesi.

Ad ogni $p_n\,(x) \in F\,(T_n^2) - F\,(T_n)$ resta biunivocamente associato, in $\mathcal{P}_n$, uno ed un sol polinomio $q_n\,(x) \neq p_n\,(x)$; quello per il quale risulta

$$T_n\,(p_n) = q_n,\; T_n\,(q_n) = p_n\,. \tag{33}$$

Due polinomi siffatti li diremo *polinomi s-associati, di ordine n, rispetto al peso* $w\,(x)$ e li indicheremo con i simboli

$$p_{s,n}\,(x), \quad q_{s,n}\,(x).$$

4.2. Quando sia $s=1$, la conoscenza degli zeri del polinomio

$$P_{2n}^{w}\,(x)$$

permette di determinare subito

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

coppie di polinomi 1-associati, di ordine n, rispetto al peso $w\,(x)$. Dette

$$(x_1^{(p_1,n)}, \ldots, x_n^{(p_1,n)}),\;\; (x_1^{(q_1,n)}, \ldots, x_n^{(q_1,n)})$$

due n-uple di zeri di $P_{2n}^{w}\,(x)$, comunque scelte purché disgiunte, i due polinomi

$$p_{1,n}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(p_1,n)}),\;\; q_{1,n}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(q_1,n)}),$$

(22) Cfr. [1], pg. 26.

oltre ad appartenere a $\mathcal{P}_n$, verificano, infatti, le (33).

Risulta, invero,

$$\int_a^b w(x) p_{1,n}^2(x)\, q_{1,n}(x)\, u_{n-1}(x)\, dx = \int_a^b w(x) p_{1,n}(x)\, P_{2n}^w(x)\, u_{n-1}(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b w(x)\, P_{2n}^w(x)\, u_{2n-1}(x)\, dx = 0,$$

$$\int_a^b w(x)\, q_{1,n}^2(x) p_{1,n}(x)\, u_{n-1}(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, q_{1,n}(x)\, P_{2n}^w(x)\, u_{n-1}(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b w(x)\, P_{2n}^w(x)\, u_{2n-1}(x)\, dx = 0.$$

5. Su un nuovo tipo di sviluppo di una funzione in serie di polinomi.

5.1. Sia $L_{2,w}[a, b]$ lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile su $[a, b]$ rispetto al peso $w(x)$. Fissato un sistema di polinomi:

$$\{p_n(x)\}_{N_0} (p_0 = 1;\ p_n(x) \in \mathcal{P}_n,\ \forall n \in \mathrm{N}), \tag{34}$$

un intero positivo s e posto

$$q_0 = 1;\ q_n(x) = T_n(p_n),\quad \forall n \in N,$$

qualunque sia la funzione $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$, il sistema lineare

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_k^{2s} q_k, q_n)\, c_k = (f, q_n)\quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{35}$$ [23],

di infinite equazioni nelle infinite incognite $c_0, c_1, \ldots$, riesce univocamente risolubile.

[23] $(\cdot, \cdot)$ indica il prodotto scalare in $L_{2,w}[a, b]$.

Essendo, in virtù della I del n⁰ 1,

(36) $$(p_k^{2s}\, q_k,\, q_n)=0, \quad \forall k>\mathrm{n},$$

il sistema (35) si riduce, infatti, al sistema

(37) $$\sum_{k=0}^{n} (p_k^{2s}\, q_k,\, q_n)\, c_k=(f,\, q_n) \quad (n=0,\, 1,\, \ldots),$$

la cui matrice è di tipo triangolare inferiore ad elementi principali:

$$(p_0^{2s}\, q_0,\, q_0)=\int_a^b w(x)\, dx; \quad (p_n^{2s}\, q_n,\, q_n)=\frac{\Delta_n^{(n)}}{\Delta_{n-1}^{(n)}}, \quad \forall n \in N \ (^{24}),$$

tutti positivi.

Ad ogni $f(x) \in L_{2,w}\, [a,\, b]$ può, pertanto, collegarsi la serie

(38) $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, p_k^{2s}(x)\, q_k(x) \quad (^{25}),$$

che diremo la *s-serie della $f(x)$ rispetto al peso $w(x)$ ed al sistema* (34).

I numeri $c_0, c_1, \ldots,$ definiti per ricorrenza attraverso le (37), li diremo, a loro volta, gli *s-coefficienti della $f(x)$ rispetto al peso $w(x)$ ed al sistema* (34).

Quando sia $p_n(x) \in F(T_n)$, $\forall n \in N$, la (38), che in tal caso ha la forma

(39) $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, P_{s,\,k}^{2s+1}(x),$$

la diremo la *serie s-autoassociata, rispetto al peso $w(x)$, della funzione $f(x)$*; in particolare, per $a=-1$, $b=1$ e $w(x)=1$, la (39) si riduce ad una serie già considerata da A. Ghizzetti e A. Ossicini ([26]) e da questi Autori denominata la s-serie di Legendre della $f(x)$.

Quando sia, poi, $p_n(x) \in F(T_n^2)-F(T_n)$, $\forall n \in N$, la (38), che in tal caso scriveremo nella forma

(40) $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, p_{s,\,k}^{2s}(x)\, q_{s,k}(x),$$

la diremo *serie s-associata, rispetto al peso $w(x)$, della $f(x)$*.

([24]) Cfr. la (6).

([25]) Per $s=0$ tale serie coincide con lo sviluppo della $f(x)$ in serie di polinomi ortogonali rispetto al peso $w(x)$.

([26]) Cfr. [6], pg. 25.

5.2. Sono di facile verifica i teoremi seguenti.

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ *sia su* $[a, b]$ *quasi ovunque nulla (q. o. n.) è che gli s-coefficienti della* $f(x)$ ([27]) *siano tutti nulli.*

La condizione è necessaria. Infatti, se $f(x)$ è su $[a, b]$ q. o. n., $\forall n \in N_0$ riesce $(f, q_n) = 0$; da ciò e dall'essere il sistema lineare (35) univocamente risolubile segue, allora, $c_n = 0$, $\forall n \in N_0$.

La condizione è sufficiente. Infatti, se $\forall n \in N_0$ è $c_n = 0$, dal sistema lineare (37) segue $(f, q_n) = 0$, $\forall n \in N_0$; da ciò e dall'essere $\{q_n(x)\}_{N_0}$ un sistema segue, allora, che $f(x)$ è su $[a, b]$ q. o. n.

TEOREMA II. *Se la serie* (38) *converge* ([28]), *allora essa è la s-serie della funzione limite.*

Sia $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ tale che, per essa, risulti

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k p_k^{2s} q_k - f \right\|_{L_{2,w}} = 0.$$

Dimostrare la tesi significa dimostrare che, fissato comunque $r \in N_0$, riesce

$$\sum_{k=0}^{r} (p_k^{2s} q_k, q_r) c_k = (f, q_r),$$

ovvero, essendo $\forall n > r$, in virtù della (36),

$$\sum_{k=0}^{n} (p_k^{2s} q_k, q_r) c_k = \sum_{k=0}^{r} (p_k^{2s} q_k, q_r) c_k,$$

che riesce

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (p_k^{2s} q_k, q_r) c_k = (f, q_r)$$

cioè

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k p_k^{2s} q_k - f, q_r \right) = 0.$$

Ma quest'ultima uguaglianza è conseguenza immediata dell'ipotesi; si ha infatti

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n} c_k p_k^{2s} q_k - f, q_r \right) \right| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k p_k^{2s} q_k - f \right\|_{L_{2,w}} \cdot \| q_r \|_{L_{2,w}}.$$

([27]) Ora e nel seguito, quando non ci sia possibilità di equivoco, sottintenderemo «rispetto al peso $w(x)$ ed al sistema (34)».

([28]) Nella metrica di $L_{2,w}[a, b]$.

TEOREMA III. *Se esistono due numeri reali positivi α e β tali che $1/\alpha+1/\beta=1$ ed un numero reale positivo σ per i quali le due condizioni*

$$1)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left((\|p_k\|_{C^0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\beta}<+\infty\left(\frac{\Delta_0^{(0)}}{\Delta_{-1}^{(0)}}=\int_a^b w(x)\,dx\right)$$

$$2)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left|\left((\|p_k\|_{C^0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{-\sigma}c_k\right|^{\alpha}<+\infty$$

sono verificate, allora la (38) *è la s-serie di una funzione* $f(x)\in L_{2,w}[a,b]$ *alla quale essa converge.*

Per il teorema II basterà dimostrare che le condizioni 1) e 2) implicano la convergenza della serie (38).

Per ogni coppia di interi m, n $(0\leq m<n)$ risulta

$$\left\|\sum_{k=m}^{n}c_k\,p_k^{2s}\,q_k\right\|_{L_{2,w}}\leq\sum_{k=m}^{n}\left((\|p_k\|_{C^0}^{2s})\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot|c_k|,$$

dalla quale, per la disuguaglianza di Hölder, segue

$$\left\|\sum_{k=m}^{n}c_k\,p_k^{2s}\,q_k\right\|_{L_{2,w}}\leq\sum_{k=m}^{n}\left((\|p_k\|_{C^0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{-\sigma}\cdot\|c_k\|\cdot$$
$$\left((\|p_k\|_{C_0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{\frac{1}{2}+\sigma}\cdot\leq$$
$$\leq\left(\sum_{k=m}^{n}\left|\left((\|p_k\|_{C^0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{-\sigma}\cdot c_k\right|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\left(\sum_{k=m}^{n}\left((\|p_k\|_{C_0})^{2s}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Valendo la 1), posto

$$M=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left((\|p_k\|_{C_0})^{2s}\cdot\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

riesce dunque

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} e_k\, p_k^{2s}\, q_k \right\|_{L2,w} \leq M \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} \left| \left((\| p_k \|_{\sigma_0})^{2s} \cdot \frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} \right)^{-\sigma} \cdot c_k \right|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Da ciò, in virtù della 2), segue allora, che la serie (38), nello spazio (completo) $L_{2,w}\,[a, b]$, verifica la condizione di Cauchy; di qui la tesi.

Se accanto agli s-coefficienti di $f(x) \in L_{2,w}\,[a, b]$, consideriamo i numeri c_k^* definiti attraverso la posizione

$$(41) \qquad c_k^* = \left((\| p_k \|_{\sigma_0})^{2s} \cdot \frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} \right)^{-1} \cdot c_k, \quad k \in N_0 ,$$

numeri che potremo ben dire *s-coefficienti normalizzati della* $f(x)$, dal teorema III discende subito che:

COROLLARIO. *Se le due condizioni*

$$1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left((\| p_k \|_{\sigma_0})^{2s} \cdot \frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} \right)^{3} < +\infty$$

$$2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{*2} < +\infty$$

sono verificate, allora i numeri c_k^* *sono gli s-coefficienti normalizzati di una* $f(x) \in L_{2,w}\,[a, b]$ *alla quale la serie* (38) *converge* ([29]).

5.3. Pensiamo, ora, i polinomi dei due sistemi $\{p_n(x)\}_{N_0}$, $\{q_n(x)\}_{N_0}$ standardizzati col porre

$$(42) \qquad \|p_n\|_{\sigma_0} = \|q_n\|_{\sigma_0} = 1, \quad \forall n \in N,$$

e dimostriamo che, valendo le (42), sussiste il seguente

LEMMA. *Se la funzione* $w(x)$ *è su* $[a, b]$ *a variazione limitata, allora esiste una costante positiva assoluta L per la quale risulta*

([29]) Questo corollario può interpretarsi come un tentativo di estensione del classico teorema di Fischer-Ritz, valido per gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

$$(43) \qquad \frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} \leq \frac{L + 2s \left| \int_a^b w(x)\, p_k^{2s-1}(x)\, q_k^2(x)\, u_{k-1}(x)\, dx \right|}{1 + (2s+2)\, k}, \qquad \forall\, k \in N,$$

essendo $u_{k-1}(x)$ *un opportuno polinomio in* x *di grado non superiore a* $k-1$.

Dalla identità

$$\int_a^b w(x)\, p_k^{2s}(x)\, q_k^2(x)\, dx =$$

$$= [x\, w(x)\, p_k^{2s}(x)\, q_k^2(x)]_a^b - \int_a^b x d\, [w(x)\, p_k^{2s}(x)\, q_k^2(x)],$$

essendo, $\forall k \in N$,

$$x\, p_k'(x) = k\, p_k(x) + u_{k-1}(x), \quad x\, q_k'(x) = k\, q_k(x) + u_{k-1}(x),$$

in virtù della (4) e della (6), segue

$$\frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} = \frac{[xw(x)\, p_k^{2s}(x)\, q_k^2(x)]_a^b - \int_a^b x\, p_k^{2s}(x)\, q_k^2(x)\, dw(x) -}{1 + (2s+2)\, k} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\, 2s \int_a^b w(x)\, p_k^{2s-1}(x)\, q_k^2(x)\, u_{k-1}(x)\, dx}{1 + (2s+2)\, k}.$$

Le posizioni (42) garantiscono, allora, la tesi.

Osserviamo, infine, che, quando il sistema (34) sia:

(*a*) Il sistema dei polinomi s-autoassociati rispetto al peso $w(x)$ oppure

(*b*) Un sistema di polinomi 1-associati rispetto al peso $w(x)$, il teorema III del n^0 5.2. e il relativo corollario possono ulteriormente determinarsi.

Infatti, supposto $p_k(x) \in F(T_k)$, $\forall k \in N$, in virtù della (21), riesce

$$\int_a^b w(x)\, p_k^{2s-1}(x)\, q_k^2(x)\, u_{k-1}(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, P_{s,k}^{2s+1}(x)\, u_{k-1}(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

e, supposto, con $s=1$, $p_k(x) \in F(T_k^2) - F(T_k)$, $\forall k \in N$, in virtù della (4), riesce ancora

$$\int_a^b w(x)\, p_k^{2s-1}(x)\, q_k^2(x)\, u_{k-1}(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, q^2_{1,k}(x)\, p_{1,k}\, u_{k-1}(x)\, d\mathrm{x} = 0$$

e, conseguentemente, tanto nel caso (*a*) quanto nel caso (*b*), la (43) si riduce alla

$$\text{(44)} \qquad \frac{\Delta_k^{(k)}}{\Delta_{k-1}^{(k)}} \leq \frac{L}{1\,(2s+2)\,k}, \qquad \forall\, k \in N.$$

La 1) del teorema III del n^0 5.2, risulta, allora, verificata con $\beta \geq 2$ e risulta, poi, ovviamente, verificata la 1) del relativo corollario.

Si può, pertanto, concludere con i teoremi seguenti:

TEOREMA III$_{(a)}$. *Se esistono due numeri reali positivi σ ed α, $\alpha \leq 2$,, tali che, per essi, la condizione*

$$\text{(45)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left| [1+(2s+2)\,k]^{\sigma}\, c_k \right|^{\alpha} < +\infty$$

è verificata, allora la (39) *è la serie s-autoassociata di una funzione $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ alla quale essa converge.*

TEOREMA III$_{(b)}$. *Se esistono due numeri reali positivi σ ed α, $\alpha \leq 2$, tali che, per essi, la condizione*

$$\text{(46)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left|(1+4k)^{\sigma}\, c_k\right|^{\alpha} < +\infty$$

è verificata, allora la (40), *con $s=1$, è una serie 1-associata di una funzione $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ alla quale essa converge.*

Sempre in virtù della (44), dai teoremi III$_{(a)}$ e III$_{(b)}$ seguono, poi, i corollari seguenti:

COROLLARIO (a). *Se per la successione di reali* $\{c_k\}_{N_0}$ *la condizione*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c_k}{\int_a^b w(x)\, P_{s,k}^{2s+2}(x)\, dx}\right)^2 < +\infty \tag{47}$$

è verificata, allora la (39) *è la serie s-autoassociata di una funzione* $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ *alla quale essa converge.*

COROLLARIO (b). *Se per la successione di reali* $\{c_k\}_{N_0}$ *la condizione*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c_k}{\int_a^b w(x)\, p_{1,k}^2(x)\, q_{1,k}^2(x)\, dx}\right)^2 < +\infty \tag{48}$$

è verificata, allora la (40), *con* $s=1$, *è una serie* 1*-associata di una funzione* $f(x) \in L_{2,w}[a, b]$ *alla quale essa converge.*

BIBLIOGRAFIA

[1] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials,* Am. Math. Soc. Colloquium Publications, XXIII (1939).

[2] P. ERDÖS - P. TURAN, *On Interpolation,* I. Ann. of Math., 38, pp. 142-155 (1937).

[3] I. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie,* Akademie - Verlag - Berlin (1955).

[4] J. SCHAUDER, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen,* Studia Math., 2, pp. 171-180 (1930).

[5] A. OSSICINI, *Costruzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano,* Ann. di Mat. pura e appl., LXXII (1966).

[6] A. GHIZZETTI - A. OSSICINI, *Su un nuovo tipo di sviluppo di una funzione in serie di polinomi,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., XLIII., pp. 21-29 (1967).