BEMERKUNGEN ÜBER FIXPUNKTMENGEN SCHLICHTER FUNKTIONEN (*)

von KARL DOPPEL, HELMUT KÖDITZ
und STEFFEN TIMMANN (in Hannover) (**)

SOMMARIO. - *Per una funzione schlicht f non identica di classe S indichi F_f l'insieme dei punti fissi. Si pone il problema di caratterizzare F_f. Si osserva, al proposito che*

1. *F_f non può acccumularsi su tutto il bordo del disco unitario D.*
2. *Dato un insieme di Carleson sul bordo di D, esiste una funzione schlicht $f \in S$ tale che F_f si proietti su un sottoinsieme denso di E.*

Infine viene assegnata una rappresentazione integrale di tipo Herglotz per una certa classe di funzioni in S aventi «molti» punti fissi.

SUMMARY. - *For a schlicht function $f \neq id$ of class S let F_f denote its set of fixpoints. The problem is to characterize the set F_f. Two remarks are given:*

1. *F_f cannot cluster at the whole boundary of the unit disc D.*
2. *Given a Carleson-set E on the boundary of D, there exists a schlicht function $f \in S$ such that F_f projects on a dense subset of E.*

Finally an integral representation of Herglotz-type is given for a certain class of functions in S having «many» fixpoints.

1. EINLEITUNG:

Fixpunkte schlichter Funktionen wurden bereits von mehreren Autoren untersucht. In [6] bemerkte H. Hornich, dass es zu endlich vielen Punkten z_k aus dem Einheitskreis D eine schlichte Funktion $f(z) \neq z$ gilbt mit $f(z_k) = z_k$. P. Zinterhof konstruierte in [8] schlichte

(*) Pervenuto in Redazione il 15 aprile 1976.

Diese Arbeit entstand während eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft - Dr. Richard Merton Fond - finanzierten Gastaufenthaltes des erstgenannten Autors an der Technischen Universität Hannover.

(**) Indirizzo degli Autori: Institut für Mathematik - Technische Universität - Welfengengarten, 1 - D 3 Hannover, BRD - (Germania).

Funktionen mit unendlich vielen Fixpunkten, die sich nicht-tangential gegen endlich viele Punkte $e^{i\theta}$ auf dem Einheitskreisrand ∂D häufen. Im folgenden soll u. a. gezeigt werden, dass jede Blaschke Folge $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $(k \in \mathfrak{N})$, Fixpunktpunktmenge einer schlichten Funktion $f(z) \neq z$ ist, wenn nur die abgeschlossene Hülle $\overline{\{e^{i\theta_k}\}}$ eine Carleson Menge ist.

2. Eine Folge $\{z_k\}_{k \in \mathfrak{N}}$ $z_k \in D$, heisst Blaschke Folge, wenn gilt

$$\Sigma (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Bemerkung: *Ist $f \neq id$ eine in D schlichte Funktion, so bilden die Fixpunkte von f eine Blaschke Folge, da $f(z) - z$ beschränktartig ist.*

Satz 1: Die Fixpunkte einer in D schlichten und holomorphen Funktion $f \neq id$ häufen sich nicht gegen den gesamten Einheitskreisrand ∂D.

Beweis: Ist F_f die Fixpunktmenge einer solchen Funktion f und gilt $\overline{F_f} \supset \partial D$, so folgt $|f(z)| < 1$ für alle $z \in D$. Das Lemma von Schwarz-Pick zeigt nun, dass keine durch 1 beschränkte holomorphe Funktion in D mehr als einen Fixpunkt haben kann, was $\overline{F_f} \supset \partial D$ widerspricht.

3. Zur Konstruktion von holomorphen und schlichten Funktionen mit möglichst vielen Fixpunkten verwenden wir einen ähnlichen Ansatz wie H. Hornich und P. Zinterhof: Setzt man

$$(1) \qquad f(z) = z + cg(z), \ g \text{ holomorph in } D, \ c \in \mathbb{C}$$

so sind die Nullstellen von g genau die Fixpunkte von f. Ist ausserdem g' in D beschränkt, so kann c so klein gewählt werden, dass f in D schlicht ist. Ist zusätzlich auch g'' in D beschränkt, so ist (1) für hinreichend kleine $|c|$ sogar konvex. Denn wegen

$$\sup_{z \in D} \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| = \sup_{z \in D} \left| \frac{z\, c\, g''(z)}{1 + cg'(z)} \right| \leq \frac{|c| \sup |g''(z)|}{1 - |c| \sup |g'(z)|},$$

gilt bei beschränktem $g''(z)$ und genügend kleinem $|c|$:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq -\sup\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| > -1,$$

d. h. f ist konvex (vergl. [7], S. 44).

Mit dem Ansatz (1) wird das Problem also zurückgeführt auf die Konstruktion holomorpher Funktionen mit beschränkter Ableitung und möglichst vielen Nullstellen in D.

Funktionen mit beschränkter Ableitung sind aber auf ∂D noch stetig und erfüllen dort eine Lipschitzbedingung. Von derartigen Funktionen zeigte A. Beurling [1], dass die Nullstellen sich nur gegen eine Carleson Menge auf ∂D häufen können. Dabei heisst nach [2] eine abgeschlossene Menge $E \subset \partial D$ vom Mass 0 Carleson Menge, wenn für die Längen ε_n der offenen Komplementärbögen gilt:

$$\Sigma\, \varepsilon_n\, ln\, \varepsilon_n > -\infty .$$

Daher erhält man mit dem obigen Ansatz (1) nur schlichte Funktionen $f+id$, deren Fixpunkte eine Blaschke Folge bilden, die sich höchstens gegen eine Carleson Menge häuft.

Andererseits können wir nun zeigen:

Satz 2: Ist $\{r_k e^{i\theta}\}_{k\in\mathfrak{N}}$ eine Blaschke Folge in D, derart, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{\{e^{i\theta_k}\}}$ eine Carleson Menge ist, so gibt es eine schlichte konvexe Funktion $f+id$ in D mit genau den Fixpunkten $r_k e^{i\theta_k}$.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe eines Resultats von J. G. Caughran [3] . Bezeichnet man mit A^∞ die Klasse der in D holomorphen Funktionen mit beschränkten Ableitungen beliebig hoher Ordnung, so gilt: Zu jeder Blaschke Folge $\{r_k e^{i\theta_k}\}_{k\in\mathfrak{N}}$ von Satz 2 existiert eine Funktion $g \in A^\infty$ mit genau den Nullstellen $r_k e^{i\theta_k}$, $k \in \mathfrak{N}$. Mit dieser Funktion g bilden wir dann gemäss (1) die ebenfalls in A^∞ liegende Funktion f, welche für alle hinreichend kleinen c eine in D konvexe Funktion darstellt mit genau den Fixpunkten $r_k e^{i\theta_k}$, $k \in \mathfrak{N}$.

Bemerkung: Ursprünglich haben die Autoren ein ähnliches Ergebnis durch Konstruktion geeigneter Blaschke Produkte bewiesen. Allerdings lagen die so erhaltenen Funktionen nur in der Klasse A^1, d. h. wiesen in D nur beschränkte erste Ableitungen auf. Herrn H. S. Shapiro verdanken wir den Hinweis auf die Arbeit von J. G. Gaughran.

Da es Carleson Mengen positiver Kapazität gibt, — z. B. das Bild der Cantorschen 1/3 - Menge unter der Abbildung $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$ —

können sich nach Satz 2 die Fixpunkte schlichter Funktionen $f \neq id$ gegen abgeschlossene Mengen auf ∂D mit positiver Kapazität häufen. Offen bleibt u. a. die Frage, ob sich die Fixpunkte auch gegen einen echten Bogen oder wenigstens gegen eine Menge positiven Masses häufen können.

4. Zum Abschluss soll noch eine Integraldarstellung fixpunktreicher Funktionen gegeben werden:

Satz 3: Ist die Blaschke Folge $\{r_k e^{i\theta_k}\}_{k \in \mathfrak{N}}$ gemäss Satz 2 gegeben, so existiert eine monoton wachsende Funktion $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$, derart, dass die durch

$$f'(z) = \exp\left[2 \int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it})^{-1} \, d\gamma(t)\right]$$

definierte Funktion f in D schlicht und konvex ist mit genau den Fixpunkten $r_k e^{i\theta_k}$, $k \in \mathfrak{N}$.

Zum Beweis brauchen wir nur noch zu beachten, dass nach dem Herglotzschen Lemma [5] jede in D holomorphe Funktion $p(z) = 1 + c_1 z + \dots$ mit $\operatorname{Re} p(z) > 0$ die Darstellung

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \, d\gamma(t) \qquad z \in D \tag{2}$$

besitzt, wobei $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eine geeignete monoton wachsende Funktion mit $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 1$ ist. Ist nun f eine konvexe Funktion mit den Fixpunkten $\{r_k e^{i\theta_k}\}_{k \in \mathfrak{N}}$, so kann man $p(z) = 1 + z \dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ in der Form (2) darstellen.

Also folgt:

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \, d\gamma(t) \qquad z \in D$$

und daraus

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1 - ze^{-it}} \, d\gamma(t)$$

sowie

$$\log f'(z) = 2 \int_0^{2\pi} \log \left(\frac{1}{1 - ze^{-it}} \right) d\gamma(t)$$

woraus sich mit Satz 2 unmittelbar die Behauptung ergibt. Man vergleiche dazu auch [4].

LITERATUR

[1] BEURLING A.: *Ensembles exceptionels,* Acta Math. 72 (1939), 1-13.

[2] CARLESON L.: *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle,* Acta Math. 87 (1952), 325-345.

[3] CAUGHRAN J. G.: *Zeros of Analytic Functions with Infinitely Differentiable Boundary Values,* Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 700-704.

[4] DOPPEL K.: *Zu einem Banachraum analytischer Funktionen* (wird erscheinen).

[5] HERGLOTZ G.: *Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis,* Ber. Verl. Sachs. Akad. Wiss Leipzig (1911), 501-511.

[6] HORNICH H.: *Über die Fixpunkte der schlichten Funktionen,* Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste Vol. II, fasc. I (1970), 54-58.

[7] POMMERENKE CH.: *Univalent Functions,* Studia Mathematica, Vandenhoeck und Rupprecht, Göttingen 1975.

[8] ZINTERHOF P.: *Konstruktion von schlichten Funktionen mit unendlich vielen Fixpunkten,* Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste Vol. III, fasc. II, (1971), 125-134.