ALCUNE PROPRIETÀ DI UNA SUPERFICIE IMMERSA IN UNO SPAZIO DI HILBERT (*)

di Mihai Dediu (a Bucarest), Renzo Caddeo (a Cagliari)
e Sofia Dediu (a Bucarest) (**)

Sommario. - *Si danno alcune proprietà di una superficie immersa in uno spazio di Hilbert.*

Summary. - *We give some properties of a surface immersed in a Hilbert space.*

Consideriamo lo spazio euclideo reale R^2 e un aperto $D \subset R^2$, definito come segue:

$$D = \{(u^1, u^2) \in R^2 / \|u\|^2 < 1\}, \quad (\|u\|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2).$$

Sia H uno spazio di Hilbert reale e consideriamo la applicazione

$$h: D \to H$$

di componenti $(h^1, h^2, \ldots, h^n, \ldots)$ definite come segue:

$$h^{2n-1}(u^1, u^2) + i\, h^{2n}(u^1, u^2) = \frac{1}{\sqrt{n}} (u^1 + i\, u^2)^n, \tag{1}$$

dove $n \in N$ (N insieme dei naturali) e $i = \sqrt{-1}$.

Nello spazio di Hilbert H, le (1) definiscono una superficie S bidimensionale, che dipende dai parametri u^1 e u^2, e le cui equazioni parametriche sono date dalle (1).

(*) Pervenuto in Redazione il 20 febbraio 1976.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica di Bucarest - Strada Academiei 14 - 70000 Bucarest 1 (Romania); Istituto di Matematica dell'Università di Cagliari - Via Ospedale 72 - Cagliari (Italia).

Questa superficie ha molti applicazioni ([1], [2], [3]).

PROPOSIZIONE 1. *L'applicazione h definita dalle* (1) *è una iniezione.*

Siano $U(u^1, u^2)$ e $V(v^1, v^2)$ due punti distinti in D. Allora si ha $u^1 \neq v^1$ oppure $u^2 \neq v^2$. Applicando la funzione h a U e V si ha

$$h(u^1, u^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(u^1 + iu^2)^n\right)_{n \in N} =$$

$$= \left(u^1 + iu^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(u^1 + iu^2)^2, \frac{1}{\sqrt{3}}(u^1 + iu^2)^3, \ldots\right)$$

e

$$h(v^1, v^2) = \left(v^1 + iv^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(v^1 + iv^2)^2, \ldots\right).$$

Osserviamo che per $n=1$ si ha

$$h^1(u^1, u^2) = u^1, \quad h^2(u^1, u^2) = u^2$$

e similmente

$$h^1(v^1, v^2) = v^1, \quad h^2(v^1, v^2) = v^2.$$

Se $u^1 \neq v^1$ allora $h^1(u^1, u^2) \neq h^1(v^1, v^2)$.
Se $u^2 \neq v^2$ allora $h^2(u^1, u^2) \neq h^2(v^1, v^2)$.
In entrambi i casi $h(u^1, u^2) \neq h(v^1, v^2)$. c. d. d.

PROPOSIZIONE 2. *L'applicazione h è una immersione.*

È sufficiente dimostrare che

$$\text{rango} \left(\frac{\partial h^i}{\partial u^j}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots \\ j=1,2}} = 2.$$

Si ha

$$\frac{\partial h^1}{\partial u^1} = 1; \quad \frac{\partial h^1}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial u^1} = 0; \quad \frac{\partial h^2}{\partial u^2} = 1.$$

Si vede subito che la matrice $\left(\frac{\partial h^i}{\partial u^j}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots \\ j=1,2}}$, quando vi si sostituiscono questi valori, è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

e che quindi ha rango 2. c. d. d.

PROPOSIZIONE 3. *L'applicazione h è una carta* [1] *della superficie S.*

Infatti, tenendo conto delle proposizioni 1 e 2, osservando che h è definita su un aperto $D \subset R^2$ con valori in H; che l'immagine di h è la superficie S, cioè

$$\mathrm{Im}\,(h) = h\,(D) = S,$$

e che h è di classe C^∞, risulta che h è una carta della superficie S. c. d. d.

PROPOSIZIONE 4. *Il coefficiente di Gauss g_{11} della superficie S è dato dalla formula*

$$g_{11} = \frac{1}{(1 - \| u \|^2)^2}\,. \tag{2}$$

Dimostrazione. Utilizzando la formula

$$g_{ab} = \left(\frac{\partial h}{\partial u^a}, \frac{\partial h}{\partial u^b} \right) \tag{3}$$

dove indichiamo con (,) il prodotto scalare e a e b sono indici, si ha

$$g_{11} = \left(\frac{\partial h}{\partial u^1}, \frac{\partial h}{\partial u^1} \right) = \left\| \frac{\partial h}{\partial u^1} \right\|^2. \tag{3'}$$

In primo luogo abbiamo

$$\frac{\partial\,(h^{2n-1} + ih^{2n})}{\partial u^1} = \sqrt{n}\,(u^1 + iu^2)^{n-1}$$

$$\frac{\partial\,(h^{2n-1} - ih^{2n})}{\partial u^1} = \sqrt{n}\,(u^1 - iu^2)^{n-1}\,.$$

Facendo il prodotto, otteniamo

$$\left(\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h^{2n}}{\partial u^1} \right)^2 = n\,(\,\| u \|^2\,)^{n-1}\,.$$

Per ottenere g_{11} dobbiamo calcolare la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(\,\|u\|^2)^{n-1}. \tag{4}$$

Tenendo conto del fatto che il punto $(u^1, u^2) \in D$, cioè

$$\|u\|^2 < 1,$$

risulta evidente che la serie precedente (4) converge e che la somma di questa serie è data da

$$\frac{1}{(1 - \| u \|^2)^2} \text{. c. d. d.}$$

PROPOSIZIONE 5. *Il coefficiente di Gauss g_{22} della superficie S è uguale a g_{11}. (Cioè $g_{11} = g_{22}$).*

Dobbiamo calcolare

$$g_{22} = \left\| \frac{\partial h}{\partial u^2} \right\|^2 .$$

Si ha che

$$\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^2} + i\,\frac{\partial h^{2n}}{\partial u^2} = \sqrt{n}\; i\,(u^1 + iu^2)^{n-1}$$

e

$$\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^2} - i\,\frac{\partial h^{2n}}{\partial u^2} = -\sqrt{n}\; i\,(u^1 - iu^2)^{n-1} .$$

Moltiplicando tra loro si ha

$$\left(\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h^{2n}}{\partial u^2}\right)^2 = n\,(\,\| u \|^2\,)^{n-1}$$

e quindi

$$g_{22} = g_{11} = \frac{1}{(1 - \| u \|^2\,)^2} \cdot$$

PROPOSIZIONE 6. *I coefficienti di Gauss g_{12} e g_{21} della superficie S sono nulli.*

Si ha $g_{12} = g_{21} = \left(\dfrac{\partial h}{\partial u^1}, \dfrac{\partial h}{\partial u^2}\right)$. Effettuando i calcoli otteniamo

$$\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^2} + \frac{\partial h^{2n}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial h^{2n}}{\partial u^2} +$$

$$+ i \left(\frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial h^{2n}}{\partial u^2} - \frac{\partial h^{2n}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial h^{2n-1}}{\partial u^2} \right) = ni (\| u \|^2)^{n-1} .$$

Essendo nulla la parte reale si ha che $g_{12}=g_{21}=0$. c. d. d.

PROPOSIZIONE 7. *I coefficienti di Gauss della superficie S sono dati dalla formula generale*

$$g_{ab} = \frac{\delta_b^a}{(1 - \| u \|^2)^2} . \tag{5}$$

La (5) risulta subito dalle proposizioni 4, 5 e 6.

BIBLIOGRAFIA

[1] MIHAI DEDIU, RENZO CADDEO e SOFIA DEDIU, *La connessione di Levi-Civita di una superficie immersa in uno spazio di Hilbert,* (in corso di stampa).

[2] RAUCH H. E., *Geodesics and curvature in differential geometry in the large,* New York, 1959.

[3] STERNBERG S., *Lectures in differential geometry,* Prentice Hall, N. J. 1964.