ANZAHLSATZE FÜR POLYNOMFUNKTIONEN AUF VERBÄNDEN (*)

von D. DORNINGER und J. WIESENBAUER (in Wien) (**)

SOMMARIO. - *Sia $F_k(V)$ l'insieme delle funzioni k-arie del reticolo V con valori in V. Con le operazioni in $F_k(V)$ definite punto per punto $F_k(V)$ diviene un reticolo. Il sottoreticolo generato dalle proiezioni e dalle funzioni costanti si chiama il reticolo delle funzioni polinomiali k-arie.*

Per i reticoli finiti distributivi si danno in funzione del numero degli elementi di V estimi per il numero delle funzoni polinomiali k-arie su V. Per una classe di reticoli non-distributivi si da il numero esatto delle funzioni polinomiali.

SUMMARY. - *Let V be a lattice and $F_k(V)$ be the set of the mappings from V^k to V. By defining the lattice operations pointwise $F_k(V)$ becomes a lattice. The elements of the sublattice of $F_k(V)$, which is generated by the projections and the constant functions in $F_k(V)$, we shall call k-place polynomial functions.*

For finite distributive lattices V bounds depending on the order of V are given for the number of k-place polynomial functions of V, and for a subclass of non-distributive lattices the exact number of polynomial functions is determined.

Einleitung.

Sei V ein beliebiger Verband mit den Operationen $\cup$ und $\cap$ und $F_k(V)$ die Menge aller k-stelligen Funktionen auf V mit Werten in V. Durch punktweise Übertragung der Operationen von V wird $F_k(V)$ zu einem Verband. Das Erzeugnis $P_k(V)$ der k Projektionen $x_1, x_2, \dots, x_k$ und der konstanten Funktionen ist ein Unterverband von $F_k(V)$, dessen Elemente wir *k-stellige Polynomfunktionen* auf V nennen (Vgl. [2]).

(*) Pervenuto in Redazione l'8 luglio 1975.

(**) Indirizzo degli Autori: Institut für Algebra u. Math. Strukturtheorie Technische Universität Wien, Argentinierstrasse 8 - A - 1040 Wien (Austria).

Polynomfunktionen auf Verbänden wurden u. a. in den Arbeiten [1], [2], [3], [5] und [6] untersucht. Insbesondere wurden in [1] für den Fall $k=1$ Abschätzungen für die Ordnung von $P_k(V)$ für endliche Verbände V angegeben.

Im folgenden werden wir einige der in [1] gefundenen Ergebnisse auf beliebige Stelligkeiten k verallgemeinern, und wir werden für weitere Klassen von endlichen Verbänden die Anzahl ihrer Polynomfunktionen bestimmen.

§ 1. Die Stelligkeit der Polynomfunktionenalgebra.

Satz 1: *$P_{k+1}(V)$ ist isomorph zu $P_1(P_k(V))$ für beliebige Verbände V.*

Beweis: Sei $p \in P_{k+1}(V)$ und $w(a_i; x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ eine Darstellung von p als Wort in den konstanten Funktionen a_i und den Projektionen $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ aus $P_{k+1}(V)$, wofür wir im folgenden $p \sim w(a_i; x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ schreiben. Seien ferner $\overline{a_i}$ die konstanten Funktionen a_i aufgefasst als Funktionen aus $P_k(V)$, $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}$ die k Projektionen aus $P_k(V)$ und x die identische Abbildung von $P_k(V)$. Wir definieren dann eine Abbildung φ: $P_{k+1}(V) \to P_1(P_k(V))$ durch $p \sim w(a_i; x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \to \to \overline{p} \sim w(\overline{a_i}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_k}; x)$. Wie man leicht nachprüft, ist φ wohldefiniert, surjektiv und verträglich mit den Operationen $\cup$ und $\cap$. Angenommen es ist $\varphi(p) = \varphi(q)$ mit $p \sim w(a_i; x_1, \dots, x_{k+1})$ und $q \sim \sim v(b_j; x_1, \dots, x_{k+1})$, dann stellen insbesondere für jedes konstante $\overline{c} \in P_k(V)$ die Worte $w(\overline{a_i}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}; \overline{c})$ und $v(\overline{b_j}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_k}; \overline{c})$ dasselbe Element aus $P_k(V)$ dar. Daraus folgt aber $p=q$, womit gezeigt ist, dass φ ein Isomorphismus ist, q. e. d.

Wenn wir $|V|$ für die Mächtigkeit eines Verbandes V schreiben und beachten, dass nach [1] für das direkte Produkt zweier beschränkter Verbände A und B gilt $P_1(A \times B) \simeq P_1(A) \times P_1(B)$, so folgt aus Satz 1 unmittelbar

Folgerung 1: $|P_{k+1}(V)| = |P_1(P_k(V))|$.

Folgerung 2: *Für das direkte Produkt $A \times B$ der (beschränkten) Verbände A und B gilt $|P_k(A \times B)| = |P_k(A)|\,|P_k(B)|$ für alle Stelligkeiten k.*

§ 2. Polynomfunktionen auf distributiven Verbänden.

Wir schreiben $\leq$ für die verbandstheoretische Inklusion und $<$, falls die Inklusion echt ist.

Satz 2: *Die Anzahl der Polynomfunktionen in einer Variablen auf einen endlichen distributiven Verband V ist gleich der Anzahl der Retraktionen von V, deren Retrakte konvexe Teilverbände von V sind.*

Beweis: Nach [4] erhält man alle Polynomfunktionen auf einem endlichen distributiven Verband, und zwar jede genau einmal, indem man alle Polynomfunktionen $\varphi_{ab}=(x\cap a)\cup b$ mit $a\geq b$ bildet. Man rechnet sofort nach, dass φ_{ab} ein Verbandsendomorphismus, $\varphi^2_{ab}=\varphi_{ab}$ und $\varphi_{ab}(V)$ das Intervall $[b,a]$ von V ist.

Sei nun umgekehrt φ eine Retraktion, also ein Endomorphismus von V mit $\varphi^2=\varphi$, und $\varphi(V)$ ein konvexer Teilverband von V. Ist a das grösste und b das kleinste Element von $\varphi(V)$ und $x\in V$ beliebig, so gilt $b\leq\varphi(x)\leq a$ und daher $\varphi(b)\leq\varphi(x)\leq\varphi(a)$, woraus $\varphi((x\cap a)\cup b)=$ $=\varphi(x)$ folgt. Da $\varphi(V)$ konvex ist, gilt $(x\cap a)\cup b\in\varphi(V)$ und daher ist $\varphi(x)=(x\cap a)\cup b$, q. e. d.

Satz 3: *Ist V_n ein distributiver Verband der Ordnung n, so gilt* $|P_2(V_n)|\leq\frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)$, *und diese Schranke ist scharf; sie wird angenommen, falls V_n eine Kette der Ordnung n ist.*

Beweis: Da, wie oben ausgeführt, $(x\cap a)\cup b$ mit $a\geq b, a, b\in V_n$, ein Normalformensystem für $P_1(V_n)$ bildet, erhält man nach Satz 1 sämtliche Polynomfunktionen aus $P_2(V_n)$, und zwar jede genau einmal, indem man alle Polynomfunktionen der Gestalt $(x_1\cap x_2\cap a)\cup(x_1\cap c)\cup$ $\cup(x_2\cap b)\cup d$ mit $a\geq b,\ a\geq c,\ b\geq d,\ c\geq d\ (a, b, c, d\in V_n)$ bildet (Vgl. hierzu [4]).

Sei nun $R=\{(a, b, c, d)\in V_n^4\mid a\geq b,\ a\geq c,\ b\geq d,\ c\geq d\}$. Man kann dann auf Grund der verschiedenen möglichen Lagen von a, b, c, d in V_n unschwer folgende Abschätzungen herleiten:

$$|\{(a, b, c, d)\in R\mid a, b, c, d \text{ paarweise verschieden}\}|\leq 2\left(\frac{n!}{(n-4)!\,4!}\right)$$

$$\{(a, b, c, d)\in R\mid a=b=c=d\}|\leq n$$

$|\{(a, b, c, d) \in R \mid$ genau 3 von den Elementen a, b, c, d sind einander bleich$\}| \leq 2\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$

$|\{(a, b, c, d) \in R \mid$ genau 3 von den Elementen a, b, c, d sind paarweise verschieden$\}| \leq 5 \frac{n!}{(n-3)!\,3!}$

$|\{(a, b, c, d) \in R \mid$ genau 2 von den Elementen a, b, c, d sind verschieden, aber keine 3 sind einander gleich$\}| \leq 2\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$.

Damit erhält man $|P_2(V_n)| = |R| \leq \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3) + n + n(n-1) + \frac{5}{6} n(n-1)(n-2) + n(n-1) = \frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)$. Dass schliesslich obige Schranken für Ketten der Ordnung n angenommen werden, ist unmittelbar einzusehen.

Beachten wir nun, dass für einen distributiven Verband V_n der Ordnung n auf Grund des oben zitierten Normalformensystems für $P_1(V_n)$ gilt $|P_1(V_n)| \leq \frac{n}{2}(n+1)$ (Vgl. hierzu [1]), und berücksichtigen wir die eben gefundene Abschätzung aus Satz 3, so folgt aus Satz 1 unmittelbar

Satz 4: *Ist V_n ein distributiver Verband der Ordnung n, so gilt: $|P_k(V_n)| \leq S(k, n)$, wobei $S(k, n)$ rekursiv definiert ist durch $S(k, n) = \frac{1}{12}(S(k-2, n) + 2)(S(k-2, n) + 1)^2 S(k-2, n)$ für gerades k, $S(k,n) = \frac{1}{2}(S(k-1,n)(S(k-1,n)+1)$ für ungerades k und $S(0,n) = 0$.*

Wir wollen nun noch Schranken für die Anzahl der 1-stelligen Polynomfunktionen auf distributiven Verbänden angeben, falls die Ordnung und die Länge des Verbandes bekannt ist.

Satz 5: *Sei V_{nl} ein distributiver Verband der Ordnung n und der Länge l. Es gilt dann $|P_1(V_{nl})| \leq \min(3^l, z)$ mit $z = \frac{1}{2}(2n(n-1) + l(l-1) + 2)$.*

Beweis: Wir teilen die Elemente von V_{nl} nach iher Länge ein und unterscheiden Elemente gleicher Länge h durch einen Index i, der von 1 bis i_h laufe. b_{hi} sei unter den Elementen der Länge h das *i-te.*

Gilt nun $a > b_{\bar{h}\bar{i}}$ für $a \in V_{nl}$, so folgt auf Grund des Kettensatzes für modulare Verbände $a \neq b_{hi}$ für alle $h \leq \bar{h}$. Daher ist die Anzahl der $a \in V_{nl}$ mit $a \geq b_{\bar{h}\bar{i}}$ höchstens $n+1-\sum_{h=0}^{\bar{h}} i_h$, und daher gilt für die Anzahl N aller Paare $(a, b) \in V_{nl}$ mit $a \geq b$, welche nach obigem gleich $|P_1(V_{nl})|$ ist, $N \leq \sum_{\bar{h}=0}^{l} i_{\bar{h}}\,(n+1-\sum_{h=0}^{\bar{h}} i_h) = n\,(n+1) - \sum_{\bar{h}=0}^{l} (i_{\bar{h}} \sum_{h=0}^{\bar{h}} i_h) \leq$
$\leq n\,(n+1) - 2n + 1 - \frac{l}{2}(l-1) = z.$

Da V_{nl} subdirektes Produkt von l Ketten K_2 der Ordnung 2 ist und $|P_1(K_2)| = 3$ gilt, so ist nach Folgerung 2 von Satz 1 auch $|P_1(V_{nl})| \leq 3^l$, q. e. d.

§ 3. Polynomfunktionen auf einer Klasse von nichtdistributiven Verbänden.

Gemäss Satz 1 kann man sich bei der Untersuchung der k-stelligen Polynomfunktionenverbände $P_k(V)$ auf 1-stellige Polynomfunktionenverbände beschränken, sofern die Struktur von $P_{k-l}(V)$ für $1 \leq l \leq k-1$ bekannt ist. Für nichtdistributive Verbände ist jedoch auch eine Berechnung von $|P_1(V)|$ schon sehr schwierig. Als Beispiel betrachten wir Verbände, welche, anschaulich gesprochen, aus $s \geq 2$ Ketten beliebiger endlicher Länge bestehen, die sich nur im Null- und Einselement des Verbandes treffen.

Satz 6: *Sei V ein Verband mit den Elementen $0, 1, a^{(1)}, \ldots, a^{(1)}_{n_1}$, $a^{(2)}_1, \ldots, a^{(2)}_{n_2}$, $\ldots$, $a^{(s)}_1$, $\ldots$, $a^{(s)}_{n_s}$, sodass die Verbandshalbordnung gegeben ist durch:*

$$0 < a^{(1)}_1 < a^{(1)}_2 < \ldots < a^{(1)}_{n_1} < 1$$

$$0 < a^{(2)}_1 < a^{(2)}_2 < \ldots < a^{(2)}_{n_2} < 1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$0 < a^{(s)}_1 < a^{(s)}_2 < \ldots < a^{(s)}_{n_s} < 1.$$

Es gilt dann für $s \geq 2$

$$|\, P_1(V) \,| = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \left[\binom{k+1}{2} k^{s-1} (n_i - k + 1) + \right.$$

$$+ 2\left(\binom{k+1}{2} + 1 - \delta\right)((1-\delta)\,k+1)^{s-1}\Big] +$$

$$+ \prod_{i=1}^{s}\left(\binom{n_i+1}{2} + (1-\delta)\,(n-n_i)\right) + 2,$$

wobei $\delta=1$ *für* $s=2$ *und* $\delta=0$ *für* $s>2$ *zu setzen ist.*

Beweis: *Sei* $A^{(i)} := \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}\}$ für $1 \leq i \leq s$. Jede Funktion $f \in F_1(V)$ ist dann durch $f(0)$, $f(1)$ und die Restriktionen $f^{(j)} := f \mid A^{(j)}$ $(1 \leq j \leq s)$ vollständig gegeben. Besonders wichtig für das folgende sind die auf $A^{(j)}$ definierten Funktionen $(x \cup a_{i_1}^{(j)}) \cap a_{i_2}^{(j)}$ $(1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n_j,\ 1 \leq j \leq s)$, welche wir daher abkürzenden mit $f_{i_1 i_2}^{(j)}$ bezeichnen.

Auf Grund der Rechengesetze in V folgt nun leicht, dass $f \in F_1(V)$ genau dann eine Polynomfunktion ist, wenn es eine der im folgenden aufgezählten (sich gegenseitig ausschliessenden) Bedingungen erfüllt:

(a) $f(0), f(1) \in A^{(k)}$ für ein $k \in \{1, 2, \dots, s\}$

$j \neq k$: $f^{(j)} = c_j$ mit $c_j \in [f(0), f(1)]$

$j = k$: $f^{(j)} = f_{i_1 i_2}^{(k)}$ mit $[a_{i_1}^{(k)}, a_{i_2}^{(k)}] \subseteq [f(0), f(1)]$

(b) $f(0)=0$, $f(1) \in A^{(k)}$ für ein $k \in \{1, 2, \dots, s\}$

$j \neq k$: $f^{(j)} = 0$ (oder c mit $c \in [a_1^{(k)}, f(1)]$ für $s>2$)

$j = k$: $f^{(j)} = f_{i_1 i_2}^{(k)}$ mit $[a_{i_1}^{(k)}, a_{i_2}^{(k)}] \subseteq [a_1^{(k)}, f(1)]$ (oder 0 für $s>2$)

(c) $f(0) \in A^{(k)}$ für ein $k \in \{1, 2, \dots, s\}$, $f(1)=1$

$j \neq k$: $f^{(j)} = 1$ (oder c mit $c \in [f(0), a_{n_k}^{(k)}]$ für $s>2$)

$j = k$: $f^{(j)} = f_{i_1 i_2}^{(k)}$ mit $[a_{i_1}^{(k)}, a_{i_2}^{(k)}] \subseteq [f(0), a_{n_k}^{(k)}]$ (oder 1 für $s>2$)

(d) $f(0)=0$, $f(1)=1$

$f^{(j)} = f_{i_1 i_2}^{(j)}$ mit $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n_j$ (oder c mit $c \in V - A^{(j)}$ für $s>2$) für alle $j \in \{1, 2, \dots, s\}$

(e) $f=0$ oder $f=1$.

Die durch (a) - (e) definierten Funktionenmengen haben auf Grund einfacher kombinatorischer Überlegungen folgende Anzahlen von Elementen (δ hat dabei die in Satz angegebene Bedeutung):

(*a*) $\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \binom{k+1}{2} k^{s-1} (n_i - k + 1)$

(*b*) $\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} \left(\binom{k+1}{2} + \delta\right) (\delta k + 1)^{s-1}$

(*c*) Wie (*b*)

(*d*) $\prod_{i=1}^{s} \left(\binom{n_i+1}{2} + \delta (n - n_i)\right)$

(*e*) 2.

Durch Summation ergibt sich schliesslich die im Satz angegebene Formel für $|P_1(V)|$, q. e. d.

LITERATUR

[1] DORNINGER D., *Über die Anzahl von Polynomen und Polynomfunktionen auf endlichen Verbänden.* J. Reine Angew. Math. 273, 199-205 (1975).

[2] DORNINGER D., *Über die Wortlänge von Polynomfunktionen auf Verbänden.* Monatsh. Math. 77, 97-104 (1973).

[3] DORNINGER D. und J. WIESENBAUER, *Über den Grad von Polynomfunktionen auf Verbänden.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 42, 147-153 (1974).

[4] LAUSCH H. und W. NÖBAUER, *Algebra of Polynomials.* North Holland, Amsterdam, London (1974).

[5] MITSCH H., *Über Polynome und Polynomfunktionen auf Verbänden.* Monatsh. Math. 74, 239-243 (1970).

[6] SCHWEIGERT D., *Über endliche, ordnungspolynomvollständige Verbände.* Monatsh. Math. 78, 68-76 (1974).