EINIGE BEMERKUNGEN ZUM MASS- UND KAPAZITÄTSBEGRIFF BEI CARLESON-MENGEN (*)

von HANS STEGBUCHNER (in Salzburg) (**)

SOMMARIO. - *Si assegnano delle condizioni affinché certe classi di insiemi perfetti (di tipo cantoriano) siano insiemi di Carleson. Inoltre si costruiscono degli insiemi di Carleson con finita od infinita misura α-dimensionale di Hausdorff e capacità positiva.*

SUMMARY. - *Conditions for some classes of perfect sets (of Cantor type) are given to be Carleson-sets. Carleson-sets with finite and infinite α-dimensional Hausdorff measure and positive capacity are constructed.*

Es sei $D=\{z: |z| <1\}$ die offene Kreisscheibe und $T=\{z: |z| =1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Eine abgeschlossene Teilmenge E von T mit linearem Mass Null heisst Carlesonmenge, wenn die Reihe

$$\Sigma\, l_n \log l_n \tag{1}$$

konvergiert. Dabei werde $T \backslash E$ als Vereinigung offener Kreisbögen I_n mit Länge l_n dargestellt.

Carlesonmengen spielen eine grosse Rolle bei Eindeutigkeitsproblemen holomorpher Funktionen, was in den nächsten beiden Sätzen zum Ausdruck kommt:

SATZ (siehe [2]):

« *Es sei* A_0 *die Klasse der in* D *holomorphen Funktionen* $f(z)= =a_0+a_1 z+\ldots$ *die auf* $\bar{D}=D \cup T$ *einer Lipschitzbedingung der Ordnung*

(*) Pervenuto in Redazione il 29 aprile 1975.

(**) Indirizzo dell'Autore: Math. Institut der Universität Salzburg - A-5020 Salzburg, Petersbrunnstrasse 19, Austria.

α $(0<\alpha\leqq 1)$ *gehorchen oder für die eine Abschätzung der Gestalt* $|a_n| = 0\,(n^{-p})$ *mit* $p>1$ *erfüllt ist. So ist eine abgeschlossene Nullmenge* E *von* T *genau dann Eindeutigkeitsmenge für die Funktionen aus* A_0, *wenn die Reihe* (1) *divergiert* ».

Mit anderen Worten gilt somit: « Eine abgeschlossene Teilmenge E von T mit linearem Mass Null ist genau dann Nullstellenmenge einer Funktion $f(z)\not\equiv 0$ aus A_0, wenn die Menge E eine Carlesonmenge ist ».

In [5] wurde der Begriff « Carlesonmenge » verallgemeinert. Bezeichnen wir mit $A(\omega)$ die in D holomorphen Funktionen $f(z)$, welche auf $\bar{D}$ die Funktion $\omega(\delta)$ als Stetigkeitsmodul besitzen, so nennt man eine abgeschlossene Teilmenge E von T mit linearem Mass Null « verallgemeinerte Carlesonmenge zum Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ », wenn die Reihe

$$\Sigma\, l_n \log \omega(l_n) \tag{2}$$

konvergiert. Ist $\omega(\delta)=0\,(\delta^{\alpha})$ mit $0<\alpha\leqq 1$, so stimmen verallgemeinerte Carlesonmengen und ursprüngliche Carlesonmengen überein. Dazu gilt folgender Satz:

Satz (siehe [5]):

« *Es sei* $(\omega(\delta))^N=0\,((\log\delta)^{-1})$ *mit* $N\in\mathfrak{N}$ *bel. Eine abgeschlossene Teilmenge* E *von* T *ist genau dann Nullstellenmenge einer Funktion* $f(z)\not\equiv 0$ *aus* $A(\omega)$, *wenn* E *eine verallgemeinerte Carlesonmenge zum Stetigkeitsmodul* $\omega(\delta)$ *ist* ».

Anschaulich gesprochen darf also eine Carlesonmenge in masstheoretischer Sicht nicht « allzu gross » sein (lineares Mass Null) und in geometrischer Sicht nicht « allzu verstreut » sein (Konvergenz der Reihe (1)). Betrachtet man nun das Hausdorff (bzw. Hausdorff-Besicovitch) Mass mit der massbestimmenden Funktion $h(t)$ einer Carlesonmenge E, so wird man sich genauere Aussangen über das h-Mass von E erwarten dürfen. Wie aber die anschliessenden Beispiele zeigen, darf man nicht aus der Tatsache, dass E h-Mass Null besitzt für eine massbestimmende Funktion $h(t)$, welche beliebig langsam gegen Null strebt, erwarten, dass dann E bereits eine Carlesonmenge ist. Die Konvergenz der Reihe (1) erweist sich also selbst bei « sehr dünnen » Mengen als starke Einschränkung. Jedoch ist es möglich, eine Aussage in der anderen Richtung zu machen. Strebt die massbestimmende Funktion $h(t)$ « genügend rasch » gegen Null für $t\rightarrow 0$, so ist eine Menge E positiven h-Masses sicher keine Carlesonmenge mehr.

Wir wollen folgende Bezeichnungen verwenden: Ist h eine massbestimmende Funktion, so sei mit $H_h(E)$ das Hausdorffsche Mass mit der bestimmenden Funktion $h(t)$ bezeichnet. Ist speziell $h(t) = t^\alpha$ $(\alpha > 0)$, so werden wir für das entsprechende α-dimensionale Hausdorffsche Mass auch $H_\alpha(E)$ schreiben.

Mit $C(E)$ wollen wir die logarithmische Kapazität der Menge E bezeichnen und mit $C_\alpha(E)$ die Kapazität der Ordnung α. Für Details in dieser Richtung siehe [1].

Folgende Tatsachen werden wir später verwenden:

Sind $g(t)$ und $h(t)$ zwei massbestimmende Funktionen mit $g = o(h)$ (für $t \to 0$), dann gilt:

$$\begin{gathered} H_h(E) < \infty \Rightarrow H_g(E) = 0 \\ H_g(E) > 0 \Rightarrow H_h(E) = +\infty \end{gathered} \tag{3}$$

Diese beiden Aussagen sind dabei untereinander äquivalent.

Ist E eine beschränkte Borelmenge, so gilt: $H_\alpha(E) = 0 \Rightarrow C_\alpha(E) = 0$. Ist $H_\alpha(E) > 0 \Rightarrow C_\beta(E) > 0$ für alle $\beta < \alpha$.

Mit Hilfe des nachstehenden Satzes können wir zeigen, dass es « sehr dünne » Mengen gibt, die keine Carlesonmengen sind.

SATZ (siehe [3], pp. 149):

« *Zu jeder massbestimmenden Funktion $h(t)$, für die* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{h(t)}{t} = +\infty$ *ist, existiert eine Menge $E \subseteq [0,1]$ mit $H_h(E) = 0$, sodass E keine Carlesonmenge ist* ».

Es sei hier kurz die Konstruktion der Menge E erwähnt, die sich an Carleson [2] anlehnt:

Sei E_0 eine Menge mit $H_h(E_0) = 0$. Δ sei eine abzählbare Menge aus $[0,1]$ und $[0,1] \setminus E_0 = \cup I_n$. Δ sei ferner so gewählt, dass die Reihe $\Sigma\, l_n \log \Phi(l_n) = -\infty$ ist mit $l_n = |I_n|$ und einer bestimmten Funktion $\Phi(t)$, die in Abhängigkeit eines Masses μ zu wählen ist.

Sei nun E die algebraische Summe der Mengen E_0 und Δ (E besitzt dann wieder h-Mass Null), so ist E keine Carlesonmenge. Wählt man schliesslich die Funktion $\Phi(t)$ auch noch geeignet in Abhängigkeit eines Stetigkeitsmoduls $\omega(\delta)$, so ist E keine Carlesonmenge zum Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$.

Als Folgerung dieses Satzes können wir also sagen, dass es h-Nullmengen für Funktionen $h(t)$, die beliebig langsam gegen Null streben, gibt, die aber keine Carlesonmengen sind. Nach obigen Bemerkungen gibt es daher auch Mengen E mit $C(E)=0$ und $C\ (E)=0$ mit $0<\alpha<1$. Speziell gibt es zu jedem α mit $0<\alpha<1$ α-dimensionale Nullmengen, welche keine Carlesonmengen sind.

Als Umkehrung werden wir nun aber Carlesonmengen E konstruieren, welche unendliches logarithmisches Mass (d. h. h--Mass mit $h(t)=\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}$ und unendliches α-dimensionales Mass $(0<\alpha<1)$ besitzen.

Als erstes Beispiel wählen wir eine Verallgemeinerung der Cantormenge:

Sei $p_0=1, p_1, p_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit $p_\nu>p>1$ für $\nu=1,2,\ldots$. Von Einheitsintervall $E(p_0)=[0,1]$ entfernen wir nun ein offenes Teilintervall B_1^0 der Länge $1-1/p_1$ so, dass an beiden Enden von $E(p_0)$ je ein abgeschlossenes Intervall $G_\nu^1(\nu=1,2)$ mit Länge $1/2p_1$ übrig bleibt. Sei $E(p_0\,p_1)=G_1^1\cup G_2^1$.

Diesen Prozess setzen wir nun mit jeder Komponente G_ν^1 von $E(p_0\,p_1)$ fort: Wir entfernen von jedem G_ν^1 ein offenes Teilintervall B_ν^1 so, dass an beiden Enden eines jeden G_ν^1 zwei abgeschlossene Intervalle $G_\mu^2(\mu=1,2,3,4=2^2)$ mit gleicher Länge $1/2^2\,p_1\,p_2$ übrig bleiben. Sei wieder $E(p_0\,p_1\,p_2)=\bigcup_{\mu=1}^{4} G_\mu^2$.

Nach n Schritten erhalten wir so eine abgeschlossene Menge $E(p_0\,p_1\ldots p_n)$ welche aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Komponenten $G_\nu^n(\nu=1,2,\ldots,2^n)$ besteht, jede mit Länge $1/2^n\,p_1\ldots p_n$. Die Gesamtlänge von $E(p_0\,p_1\ldots p_n)$ ist somit $(p_1\,p_2\ldots p_n)^{-1}$.

Sei nun $E=\bigcap_{k=1}^{\infty} E(p_0\,p_1\ldots p_k)$. E ist dann eine abgeschlossene, nirgends dichte, perfekte Menge, welche die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Da E durch das Mengensystem $E(p_0\,p_1\ldots p_n)$ mit Gesamtlänge $(p_1\,p_2\ldots p_n)^{-1}$ überdeckt wird und $(p_1\,p_2\ldots p_n)^{-1}<p^{-n}$ ist, ist daher E eine Menge von linearem Mass Null.

Es sei nun $\widetilde{E}=e^{iE}=\{z\colon z=e^{ix}, x\,\varepsilon\,E\}$. Das Komplement $T\backslash\widetilde{E}$ setzt sich dann aus offenen Kreisbögen $\widetilde{B}_0^0=\{e^{it}\colon 1<t<2\pi\}, \widetilde{B}_\nu^k=e^{iB_\nu^k}$ zusammen: k aus N, $\nu=1,2,\ldots,2^{k-1}$. Die Längen dieser Kreisbögen seien mit $l_0^0=2\pi-1$ und $l_\nu^k=\left(1-\frac{1}{p_k}\right)/(2^{k-1}\,p_1\,p_2\ldots p_{k-1})$ bezeichnet.

Bilden wir damit nun die entsprechende Reihe (1), so erhalten wir

$$\Sigma\, l_j \log\frac{1}{l_j}=(2\pi-1)\log\frac{1}{2\pi-1}+\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\cdot r_k\log\frac{1}{r_k}$$

$$\text{mit} \quad r_k = \frac{1}{2^{k-1} \cdot p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Auf Grund der Monotonieeigenschaften von $x \log \frac{1}{x}$ für hinreichend kleines x erhalten wir somit:

$$\Sigma\, l_j \log \frac{1}{l_j} \leqq \text{const.} + \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} p^{1-k} \log (2p)^{k-1} =$$

$$= \text{const.} + \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{p^k} < \infty.$$

Damit ist $\widetilde{E}$ eine Carlesonmenge.

Es sei nun $t_n = (2^n p_1 \dots p_n)^{-1}$ und $n(t)$ eine stetige monoton fallende Funktion von t, für die $n(t_k) = k$ und $\frac{dn}{dt} \geqq -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\log 2p}$ gilt.

(Z. B. kann man $n(t) = k + \log \frac{t_k}{t} / \log \frac{t_k}{t_{k+1}}$ für $t_k > t > t_{k+1}$ wählen).

Mit der Funktion $n(t)$ definiert man dann die Funktion $h(t) = = 2^{-n(t)}$. In [4], pp. 154 wird dann gezeigt, dass die oben konstruierte Menge E positives endliches h-Mass besitzt: $0 < H_h(E) < \infty$.

Konstruiert man umgekehrt die Menge E so (wieder nach obigem Konstruktionsprinzip), dass $h(t) = \left(\log \frac{1}{t} \log_2 \frac{1}{t} \dots \log_s \frac{1}{t}\right)^{-1}$ wird ($\log_s x$ sei dabei der s-fach iterierte Logarithmus, $s > 1$ ganz), so besitzt E harmonisches Mass Null (und damit auch logarithmische Kapazität Null), endliches positives h-Mass und unendliches logarithmisches Mass.

Als zweites Beispiel betrachten wir nun eine Menge E, die mit einer Verallgemeinerung des obigen Konstruktionsprinzipes zu erhalten ist:

Sei dazu $n_0 = 1, n_1, n_2, \dots$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_i \geqq 2$ für $i \geqq 1$ und $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots$ eine Folge monoton abnehmender, positiver Zahlen, welche der Ungleichung

$$2 n_\nu r_\nu < r_{\nu-1} \tag{4}$$

genügen.

Wir gehen wiederum vom Einheitsintervall $E(n_0, r_0) = [0, 1]$ aus und entfernen davon $n_1 - 1$ gleich grosse offene Intervalle der Länge $\frac{r_0 - n_1 r_1}{n_1 - 1}$ so, dass insgesamt n_1 abgeschlossene Intervalle $G_\nu^1 (\nu = 1, \dots, n_1)$

mit gleicher Länge r_1 übrig bleiben. Sei $E(n_0 n_1, r_0 r_1) = \bigcup_{\nu=1}^{n_1} G_\nu^1$. Mit jedem G_ν^1 wird nun dieser Prozess wiederholt mti n_2 und r_2. Nach k Schritten erhalten wir daher eine abgeschlossene Menge $E(n_0 n_1 \ldots \ldots n_k, r_0 r_1 r_2 \ldots r_k)$, welche aus $n_1 n_2 \ldots n_k$ abgeschlossenen disjunkten Komponenten mit Länge r_k zusammengesetz ist.

Sei nun wieder $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(n_0 n_1 \ldots n_k, r_0 r_1 \ldots r_k)$. E ist dann wieder eine abgeschlossene perfekte Menge. Wie man sofort sieht, bildet das Mengensystem $E(n_0 n_1 \ldots n_k, r_0 r_1 \ldots r_k)$ eine Überdeckung von E mit totaler Länge $n_1 n_2 \ldots n_k r_k$. Wegen (4) ergibt sich daraus, dass $n_1 n_2 \ldots \ldots n_k r_k < 2^{-k}$ ist, woraus wieder folgt, dass E lebesguesches Mass Null hat.

BEHAUPTUNG:

Es sei E wie oben konstruiert. Die Folge der r_k bildet dann notwendiger Weise eine konvexe Folge, d. h. es gilt

$$2r_k \leqq r_{k-1} + r_{k+1}.$$

Gilt zusätzlich, dass die Folge s_k ebenfalls konvex ist mit $s_k = \log r_k$, so ist E eine Carlesonmenge.

Um diese Behauptung zu zeigen, benötigen wir vorerst eine weitere Charakterisierung von Carlesonmengen, wie sie in [3] und [6] angegeben werden.

LEMMA (siehe [3] p. 148 oder [6]):

Es bedeute $N_\varepsilon(E)$ die Minimalzahl von Mengen in einer Überdeckung von E durch Mengen, deren Durchmesser kleiner oder gleich 2ε ist. Die Menge E ist dann und nur dann eine Carlesonmenge, wenn das Integral

$$\int_0^1 N_t(E)\, dt \tag{5}$$

endlich ist.

Man überlegt sich nun leicht, dass das Mengensystem $E(n_0 n_1 \ldots \ldots n_k, r_0 r_1 \ldots r_k)$ eine minimale $r_k/2$-Überdeckung bildet. Es ist somit

$$N_{r_k/2}(E) = n_1 n_2 \ldots n_k .$$

Damit erhalten wir nun die Abschätzung

$$\int_0^1 N_{t/2}(E)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{r_k}^{r_{k-1}} N_{t/2}(E)\,dt \leqq \sum_{k=1}^{\infty} (r_{k-1} - r_k)\cdot N_{r_k/2}(E) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (r_{k-1} - r_k)\, n_1\, n_2 \ldots n_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Auf Grund der Konvexität der Folge der $s_k = \log r_k$ erhalten wir

$$\frac{r_k}{r_{k+1}} \leqq \frac{r_{k-1}}{r_k} \implies \frac{r_k}{r_{k+1}} \cdot \frac{r_k - r_{k+1}}{r_{k-1} - r_k} \leqq 1$$

und damit schliesslich die Abschätzung:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = n_{k+1} \cdot \frac{r_k - r_{k+1}}{r_{k-1} - r_k} \leqq \frac{r_k}{2 r_{k+1}} \cdot \frac{r_k - r_{k+1}}{r_{k-1} - r_k} \leqq \frac{1}{2} < 1.$$

Wegen (5) ist daher E eine Carlesonmenge.

Bermerkung: Die Konvexität der Folge $\{\log r_k\}$ ist jedoch keine notwendige Bedingung dafür, dass E eine Carlesonmenge ist, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$\text{Sei } n_k = k \text{ und } r_k = \frac{a^k}{k!\,2^{k+1}} \text{ mit } 0 < a < 1.$$

Nach [4], p. 126 gilt nun, dass E positives harmonisches Mass (und damit auch positive logarithmische Kapazität) besitzt, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log 1/r_k}{n_1\, n_2 \ldots n_k} \tag{6}$$

konvergiert. Dies ist für die eben angegebene Folge der n_k und r_k erfüllt, wie man sofort nachprüft.

Wir werden nun Mengen E angeben, die ebenfalls unter die oben konstruierten Mengen $E(n_0\, n_1 \ldots n_k,\ r_0\, r_1 \ldots r_k)$ fallen und für die die Konvergenz der Reihe (6) auch notwendig dafür ist, dass E positives harmonisches Mass besitzt.

BEHAUPTUNG:

Gegeben sei eine Folge $\{n_k\}$ von natürlichen Zahlen grösser gleich 2 und eine Folge nicht negativer Zahlen r_k, welche der Bedingung (4) genügen. Ferner sollen die r_k noch zusätzlich einer

Wachstumsbedingung unterworfen sein:

$$(r_k)^{1-\varepsilon} \geqq r_{k-1} \text{ für alle } k \geqq k_0 \text{ mit } \varepsilon > 0 \text{ bel.}$$

Konstruieren wir nun die Menge E wie oben, so besitzt E genau dann positives harmonisches Mass (und damit positive logarithmische Kapazität), wenn die Reihe (6) konvergiert.

Wegen [4] p. 126 brauchen wir nur noch eine Richtung beweisen. Wir wollen dazu annehmen, dass (6) divergiert. Aus der oben angeführten Wachstumsbedingung ergibt sich sofort die Existenz einer positiven Konstanten, sodass $\log r_{k-1} - \log r_k \geqq \text{const.} \log 1/r_k$ gilt. Damit erhalten wir nun

$$\int_0^1 \frac{dt}{t \cdot N_t(E)} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} (n_1 n_2 \dots n_k)^{-1} \cdot \int_{r_k}^{r_{k-1}} \frac{dt}{t} \geqq \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log 1/r_k}{n_1 n_2 \dots n_k} = \infty$$

Wegen [1], p. 30 müsste dann aber E logarithmische Kapazität Null haben, was einen Widerspruch bedeutet.

Als Beispiel einer Folge r_k, welche die oben angeführten Wachstumsbedingungen erfüllt, kann man a^{2^k} mit $0<a<1$ wählen. Ist $n_k = 2^{k-1}$, so prüft man leicht nach, dass E eine Carlesonmenge ist.

Wird werden nun im nächsten Schritt Carlesonmengen konstruieren, deren α-dimensionales Hausdorffmass unedlich ist für $0<\alpha<1$ bel. Sei dazu $0=\eta_1<\eta_2<\dots<\eta_{\nu-1}<\eta_\nu=1-\zeta$ mit einem $\zeta>0$, das gleichzeitig folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\zeta<\eta_2,\ \zeta<\eta_3-\eta_2, \dots, \zeta<\eta_\nu-\eta_{\nu-1}.$$

Wir definieren nun eine Abbildung $\nu(j)$: $[0,1] \rightarrow E(j)$ durch

$$\nu(j)(x) = x \cdot \zeta + n_j \quad \text{für} \quad j=1,2,\dots,\nu.$$

Die $E(j)$ sind dann abgeschlossene disjunkte Intervalle der Länge ζ. Die abgeschlossenen Intervalle $E(i_1, i_2, \dots, i_k)$ definiert man nun als Bild des Einheitsintervalles $[0,1]$ bei der Hintereinanderausführung der Abbildungen $\nu(i_j)$:

$$E(i_1, i_2, \dots, i_k) = \nu(i_1)\, \nu(i_2) \dots \nu(i_k)\, [0,1].$$

Sei nun $E^{(k)} = \bigcup\limits_{\substack{1 \leqq i_j \leqq \nu \\ j=1,\dots,k}} E(i_1, \dots, i_k)$.

$E^{(k)}$ besteht dann aus ν^k abgeschlossenen disjunkten Intervallen der Länge ζ^k.

Sei schliesslich $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$.

Die Menge E wird gewöhnlich als homogene perfekte Menge vom Typ (ν, ζ) bezeichnet.

Das Lebesguesche Mass von E ist wiederum Null, da ja das System der $E^{(k)}$ eine Überdeckung von E mit Länge $(\nu\xi)^k$ bildet. Nach Voraussetzung ist aber $\nu\zeta < 1$, sodass also die Gesamtlänge der Überdeckungsmengen für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Für die homogenen perfekten Mengen vom Typ (ν, ζ) gilt nun die interessante Tatsache, dass für $\nu\,\zeta^{\alpha} = 1$, d. h. für $\alpha = \dfrac{\log \nu}{-\log \zeta}$ gilt: $0 < H_{\alpha}(E) < \infty$.

Bemerkung: Ist $\nu\,\zeta_{\alpha} \neq 1$, so kann das α-dimensionale Hausdorffmass von E nur Null oder unendlich sein.

Man überlegt sich wieder ohne grosse Mühe, dass $N_{\varepsilon}(E) = \nu^k$ ist für $\varepsilon = \dfrac{\zeta k}{2}$ und $k \geqq 1$ bel.

Wie oben leitet man daraus wieder ab

$$\int_0^1 N_{t/2}(E)\,dt = \sum_k \int_{\zeta^k}^{\zeta^{k-1}} N_{t/2}(E)\,dt \leqq \sum_k (\zeta^{k-1} - \zeta^k)\, N_{\varepsilon}(E) =$$

$$= (1 - \zeta) \cdot \sum_k \zeta^{k-1} \cdot \nu^k < \infty.$$

Daraus folgt aber, dass alle homogenen perfekten Mengen vom Typ (ν, ζ) Carlesonmengen sind.

Es sei num $0 < \alpha < 1$ bel. gewählt und wir wählen dann ein β mit $\alpha < \beta < 1$.

Bemerkung: Gibt man β und ν bel. vor, so ist ζ durch die Gleichung $\nu\,\zeta^{\alpha} = 1$ eindeutig bestimmt. Wie man leicht nachrechnet ist $\nu\,\zeta < 1$ ebenfalls erfüllt, sodass stets $\eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}$ so gewählt werden können, dass die für ζ geforderten Ungleichungen erfüllt sind.

Es sei nun $\nu\,\zeta^{\beta} = 1$; die homogene perfekte Menge vom Typ (ν, ζ) besitzt somit endliches positives β-dimensionales Hausdorffmass. Wegen $t^{\beta} = o(t^{\alpha})$ folgt nun aus (3), das $H_{\alpha}(E) = \infty$ ist.

Wir haben somit ein Verfahren kennengelernt, zu jedem α aus $(0, 1)$ eine Carlesonmenge zu konstruieren, die unendliches α-dimensionales Mass besitzt. Carlesonmengen können somit in masstheoretischer

Sicht relativ « grosse » Mengen sein. Man könnte nun vermuten, dass man zu jeder massbestimmenden Funktion $h(t)$, für die

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = \infty$$

gilt, eine Carlesonmenge positiven h-Masses finden kann. Im nächsten Satz wird aber gezeigt, dass dies nicht der Fall ist.

SATZ:

« Es sei $\omega(t)$ eine differenzierbare Funktion, die fast überall mit dem Stetigkeitsmodul $\tilde{\omega}(t)$ einer gewissen Funktionenklasse $A(\tilde{\omega})$ übereinstimmt. Weiters sei E eine Menge positiven h-Masses. Ist dann nachstehendes Integral $+\infty$, so ist E sicher keine Carlesonmenge zum Stetigkeitsmodul $\tilde{\omega}(\delta)$ »

(7) $$\int_0^1 \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)\,h(t)}\,dt.$$

COROLLAR:

« Eine Nullmenge E mit positiven h-Mass ist sicher Eindeutigkeitsmenge für die Funktionenklasse $A(\tilde{\omega})$, wenn das Integral (7) *divergiert ».*

BEWEIS: Es sei $\{U_i\}_\varepsilon$ eine Überdeckung von E durch Mengen mit Durchmesser kleiner oder gleich 2ε. Auf Grund der Monotonieeigenschaften der massbestimmenden Funktion $h(t)$ gilt somit

$$\inf \sum_i h(d(U_i)) \leqq \inf \Sigma\, h(2\varepsilon).$$

Das Infimum auf der rechten Seite ist jedoch gleich $N_\varepsilon(E) \cdot h(2\varepsilon)$. Nach Voraussetzung gilt nun

$$0 < \text{const.} \leqq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \sum_i h(d(U_i)) \leqq \lim_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon(E) \cdot h(2\varepsilon),$$

woraus für hinreichend kleine t die Abschätzung

$$\frac{1}{h(t)} \leqq \text{const.}\, N_{t/2}(E)$$

folgt. Damit erhalten wir aber

$$\int_0 t \cdot N_{t/2}(E)\, d \log \tilde{\omega}(t) = \int_0 \frac{t \cdot \omega'(t)\, N_{t/2}(E)}{\omega(t)}\, dt \geqq$$

$$\geqq \text{const.} \int_0 \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)\, h(t)}\, dt = \infty.$$

Nun folgt aber aus der Divergenz von $\int t \cdot N_{t/2}(E)\, d \log \tilde{\omega}(t)$ nach [5], dass E keine Carlesonmenge zum Stetigkeitsmodul $\tilde{\omega}(\delta)$ ist. Als Folgerung erhält man sofort, dass E Eindeutigkeitsmenge für die Funktionenklasse $A(\tilde{\omega})$ ist.

Wählen wir speziell $\tilde{\omega}(t) = 0(t^{\alpha})$ mit $0 < \alpha \leqq 1$, so erhalten wir als Spezialfall von (7):

Divergiert das Integral $\int \frac{dt}{h(t)}$ und besitzt E positives h-Mass, so ist E Eindeutigkeitsmenge für die Funktionenklasse A_0, d. h: E kann keine Carlesonmenge sein.

Wählen wir nun speziell $h(t) = t \cdot \log \frac{1}{t} \ldots \log_s \frac{1}{t}$, wobei wir mit $\log_s x$ den s-fach iterierten Logarithmus bezeichnen wollen, so divergiert $\int \frac{h(t)}{dt}$ und wir erhalten:

Es gibt keine Carlesonmengen mit positiven h-Mass für die Funktionen

$$h(t) = t \cdot \log \frac{1}{t} \ldots \log_s \frac{1}{t}$$

für alle s aus $\mathfrak{N}$, aber es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ Carlesonmengen mit unendlichem h-Mass für $h(t) = t^{1-\varepsilon}$.

LITERATURHINWEISE

[1] CARLESON, L.: *Selected problems on Exceptional Sets.* Van Nostrand Math. Studies, Princeton 1967.

[2] CARLESON, L.: *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle.* Acta Mathematica 87 (1952), pp. 325-345.

[3] KAHANE, J. P.: *Series de Fourier absolument convergentes.* Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete Bd. 50, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[4] NEVANLINNA, R.: *Analytic Functions.* Grundlehren der math. Wiss. Bd. 162, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[5] STEGBUCHNER, H.: *Nullstellen analytischer Funktionen und verallgemeinerte Carlesonmengen I und II.* Sitzungsber. der österr. Akad. d. Wiss., math. naturw. Kl., in Druck.

[6] ZINTERHOF, P.: *Über das Verhalten der Kolmogorov'schen ε-Invarianten bei Carlesonmengen.* Nicht veröffentlicht.