SUL PROLUNGAMENTO DELL'INTEGRALE (*)

di Paolo Liubicich (a Trieste) (**)

Sommario. - *Argomento di questa nota è il prolungamento dell'integrale. Si inizia con l'introdurre un nuovo tipo di convergenza, da noi chiamata convergenza σ-uniforme, e se ne dimostrano alcune utili proprietà. Utilizzando questo tipo di convergenza, si costruisce, seguendo l'indirizzo funzionale di Daniell, a partire da una assegnata classe S di funzioni reali definite su di un insieme X e da un integrale I_0 definito su S, la classe delle funzioni integrabili e il prolungamento dell'integrale iniziale. Una tale classe risulta essere chiusa rispetto alla convergenza σ-uniforme. Infine si fanno alcune considerazioni nel caso in cui X coincide con un compatto dell'asse reale.*

Summary. - *In this paper we study the extension of the integral. We introduce a new type of convergence, called σ-uniform, and we prove some useful properties. By means of this type of convergence and following the lines of the Daniell theory, we define the class of integrable functions and the extension of the integral I_0, initially defined on a given class S of real-valued functions on X. Such a class is closed with respect to the σ-uniform convergence. Some remarks are added for the case in which X is a compact set of the real line.*

Argomento di questa nota è il prolungamento dell'integrale. Si inizia con l'introdurre un nuovo tipo di convergenza, da noi chiamata convergenza σ-uniforme, e se ne dimostrano alcune utili proprietà. Utilizzando questo tipo di convergenza, si costruisce, seguendo l'indirizzo funzionale di Daniell, a partire da una assegnata classe S di funzioni reali definite su di un insieme X e da un integrale I_0 definito

(*) Pervenuto in Redazione il 19 marzo 1976.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

su S, la classe delle funzioni integrabili ed il prolungamento dell'integrale iniziale. Una tale classe risulta essere chiusa rispetto alla convergenza σ-uniforme. Infine si fanno alcune considerazioni nel caso in cui X coincide con un compatto dell'asse reale.

1. Sia S una classe di funzioni reali aventi tutte come dominio l'insieme X. Indichiamo con N l'insieme dei numeri naturali e con R l'insieme dei numeri reali. Sia S uno spazio di Riesz, cioè:

1.1. $f, g \in S, a, b \in R \Rightarrow af + bg \in S.$

1.2. $f \in S \Rightarrow |f| \in S.$

Sia definito su S un integrale di Daniell, cioè un funzionale reale I_0 tale che:

1.3. $f, g \in S, a, b \in R \Rightarrow I_0(af + bg) = a\, I_0(f) + b\, I_0(g).$

1.4. $f \in S \Rightarrow I_0(|f|) \geq 0.$

1.5. $f, \{f_n\} \in S, |f| \leq \sum_{n \in N} |f_n| \Rightarrow I_0(|f|) \leq \sum_{n \in N} I_0(|f_n|)$

ove con $\{f_n\} \in S$ indichiamo una successione di funzioni di S di indice n.

Indichiamo con S^+ la sottoclasse di S costituita da tutte e sole le funzioni non negative, con R^+ l'insieme dei numeri reali non negativi e sempre con I_0 la restrizione su S^+ dell'integrale I_0. Per la coppia (S^+, I_0) valgono, ovviamente, le seguenti proposizioni:

1.1'. $f, g \in S^+, a, b \in R^+ \Rightarrow af + bg \in S^+.$

1.2'. $f, g \in S^+ \Rightarrow |f - g| \in S^+.$

1.3'. $f, g \in S^+, a, b \in R^+ \Rightarrow I_0(af + bg) = a\, I_0(f) + b\, I_0(g).$

1.4'. $f \in S^+ \Rightarrow I_0(f) \geq 0.$

1.5'. $f, \{f_n\} \in S^+, f \leq \sum_{n \in N} f_n \Rightarrow I_0(f) \leq \sum_{n \in N} I_0(f_n).$

Indichiamo infine con $\mathcal{F}$ la classe di tutte le funzioni aventi come dominio X e come codominio R e con $\mathcal{F}^+$ la sottoclasse di $\mathcal{F}$ costituita dalle sole funzioni non negative.

2. DEFINIZIONE 2.1. Sia $f \in \mathcal{F}$. Diremo che f è σ-limitata se esistono almeno una $a \in R^+$ e una $\{f_n\} \in S^+$ tali che:

$$\sum_{n \in N} I_0(f_n) \leq a, |f| \leq \sum_{n \in N} f_n.$$

L'estremo inferiore degli $a \in R^+$ che verificano la precedente condizione verrà indicato con $||f||$.

DEFINIZIONE 2.2. Sia $f \in \mathcal{F}$. Diremo che è σ-nulla se $||f|| = 0$. Indicheremo con $\mathcal{N}$ la classe delle funzioni σ-nulle. Per la classe $\mathcal{N}$ valgono i seguenti teoremi:

2.1. *$\mathcal{N}$ è ereditaria, cioè*: $f \in \mathcal{N}, g \in \mathcal{F}, |g| \leq |f| \Rightarrow g \in \mathcal{N}$.

2.2. *$\mathcal{N}$ è uno spazio di Riesz.*

La dimostrazione è banale.

DEFINIZIONE 2.3. Sia $A \subset X$. Diremo che A è σ-nullo se la sua funzione caratteristica φ_A è σ-nulla. Indicheremo con $\mathcal{H}$ la classe degli insiemi σ-nulli.

Se $f \in \mathcal{F}$, poniamo $A_f = \{x: x \in X, f(x) \neq 0\}$. Sussiste allora fra le funzioni σ-nulle e gli insiemi σ-nulli la seguente relazione:

2.3. $f \in \mathcal{N} \Leftrightarrow A_f \in \mathcal{H}$.

Sia $f \in \mathcal{N}$ Fissato un $n \in N$, dalla 2.2. segue che $n|f| \in \mathcal{N}$, cioè, fissato un $\varepsilon \in R^+$,

$$n|f| \leq \sum_{r \in N} f_n^r$$

ove

$$\{f_n^r\} \in S^+ \text{ e } \sum_{r \in N} I_0(f_n^r) \leq \varepsilon/2^n.$$

La considerazione ora fatta può essere ripetuta per ciascun $n \in N$, per cui da $\varphi_{A_f} = \varphi_{A|f|} \leq \sum_{n \in N} n|f|$ risulta

$$\varphi_{A_f} \leq \sum_{n, r \in N} f_n^r \text{ e } \sum I_0(f_n^r) \leq \sum_{n \in N} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\varphi_{A_f} \in \mathcal{N}$, cioè $A \in \mathcal{H}$.

Similmente si dimostra il viceversa.

DEFINIZIONE 2.4. Siano $f, g \in \mathcal{F}$. Diremo che f e g sono σ-equivalenti (indicheremo con $f \sim g$) se $|f-g| \in \mathcal{N}$.

DEFINIZIONE 2. 5. Siano $f, \{f_n\} \in \mathcal{F}$. Diremo che $\{f_n\}$ converge quasi ovunque (1) ad f (indicheremo con $f_n \longrightarrow f$) se esiste almeno un $A \subset X$ tale che:

$$A \in \mathcal{N},\ \{f_n\} \text{ converge ad } f \text{ per ogni } x \in X-A.$$

DEFINIZIONE 2.6. (2). Siano $f, \{f_n\} \in \mathcal{F}$. Diremo che $\{f_n\}$ converge σ-uniformemente ad f (indicheremo con $f_n \Longrightarrow f$) se per ogni $\varepsilon \in R^+$ esistono almeno un $n_\varepsilon \in N$ ed una $\{g_m\} \in S^+$ tali che:

$$\sum_{m \in N} I_0(g_m) \leq \varepsilon,\ |f-f_n| \leq \sum_{m \in N} g_m \text{ per ogni } n \geq n_\varepsilon .$$

In quanto il procedimento che ci proponiamo di descrivere si basa essenzialmente sulla nozione di convergenza σ-uniforme, enunciamo ora alcune proposizioni che caratterizzano questo tipo di convergenza.

Le funzioni che considereremo nelle prossime proposizioni sono da ritenersi, sino ad avviso contrario, tutte appartenenti ad $\mathcal{F}$ e le costanti ad R.

2.4. (3). *Se $\{f_n\}$ converge σ-uniformemente ad f, allora $\{f_n\}$ converge quasi ovunque ad f.*

Fissato un $\varepsilon \in R^+$, dalla definizione 2.6. segue che

$$|f-f_n| \leq \sum_{m \in N} g_m \text{ per } n \geq n_\varepsilon$$

(1) Anche in seguito l'espressione « quasi ovunque » significherà: per tutti gli $x \in X-A$, ove $A \in \mathcal{N}$.

(2) Con questa legge di convergenza $\mathcal{F}$ non è uno spazio di convergenza: vedere [2], [4]. Tuttavia $\mathcal{F}$ è uno spazio (L) di Frechet [4] ed è chiuso rispetto alle operazioni (α), (β), (γ) definite in [2].

(3) Questa proposizione non è invertibile, a meno che non si facciano ulteriori ipotesi: 3.9'. A ciò valga il seguente esempio: sia X l'intervallo chiuso (0,1), S la classe delle funzioni continue definite su X, I_0 l'integrale di Cauchy. Consideriamo la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{per } x \leq 1/n \\ 1/x & \text{per } x > 1/n \end{cases}$$

È facile vedere che $f_n \longrightarrow 1/x$, ma non è vero che $f_n \Longrightarrow 1/x$ (2.9).

ove $\{g_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(g_m) \leq \varepsilon$. Ne deriva quindi che

$$\lim.\max.|f-f_n| \leq \Sigma\, g_m, \text{ cioè } \||\lim.\max.|f-f_n|\,\| \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\lim.\max.|f-f_n| \in \mathcal{N}$ e quindi dalla 2.3. la tesi.

2.5 ([4]). *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\{f_n\}$ *converga* σ*-uniformemente ad* f *è che* $\{\,|f_m-f_n|\,\}$ *converga* σ*-uniformemente a* 0 *(funzione ovunque nulla).*

Sia $f_n \Longrightarrow f$. Fissato un $\varepsilon \in R^+$, dalla definizione 2.6. segue che

$$|f-f_n| \leq \sum_{i \in N} g_i \text{ per } n \geq n_\varepsilon$$

ove $\{g_i\} \in S^+$ e $\sum_{i \in N} I_0(g_i) \leq \varepsilon/2$. In quanto $|f_m-f_n| \leq |f_m-f| + |f-f_n|$, per $m, n \geq n_\varepsilon$ risulta

$$|f_m-f_n| \leq \sum_{i \in N} 2\, g_i \text{ e } \sum_{i \in N} I_0(2\, g_i) \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la prima parte della tesi. Sia viceversa $|f_n-f_m| \Longrightarrow 0$. Fissato un $\varepsilon \in R^+$, risulta

$$|f_n-f_m| \leq \sum_{r \in N} g_r \text{ per } n, m \leq n_\varepsilon \quad (+)$$

ove $\{g_r\} \in S^+$ e $\sum_{r \in N} I_0(g_r) \leq \varepsilon/2$. Per la 2.4. esiste una $f \in \mathcal{T}$ tale che $f_m \to f$, *cioè* $\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x)$ per $x \in X-A$, ove $A \in \mathcal{N}$ Passando al limite per $m \to \infty$, dalla (+) otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{r \in N} g_r(x) \text{ per } n \geq n_\varepsilon \text{ e per } x \in X-A.$$

In quanto $A \in \mathcal{N}$, per la 2.2. esiste una $\{k_r\} \in S^+$ tale che $\sum_{n \in N} n\,\varphi_A \leq \sum_{n \in N} k_r$ e $\sum_{r \in N} I_0(k_r) \leq \varepsilon/2$. Quindi per $n \geq n_\varepsilon$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{r \in N} (g_r(x) + k_r(x)) \text{ e } \sum_{r \in N} I_0(g_r + k_r) \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $f_m \Longrightarrow f$.

([4]) $|f_m - f_n| \Longrightarrow 0$ significa: per ogni $\varepsilon \in R^+$ esistono almeno un $n_\varepsilon \in N$ e una $\{g_i\} \in S^+$ tali che $\sum_{i \in N} I_0(g_i) \leq \varepsilon$, $|f_m - f_n| \leq \sum_{i \in N} g_i$ per $m, n \geq n_\varepsilon$.

2.6. [5] *Se* $\{f_n\}$ *e* $\{g_n\}$ *convergono* σ*-uniformemente ad* f *e* g *rispettivamente, allora* $\{af_n+bg_n\}$ *converge* σ*-uniformemente ad* $af+bg$.
Poniamo $c=\max.(|a|,|b|)$. Sia $c\neq 0$, altrimenti è banale. Fissato un $\varepsilon\in R^+$, dalle ipotesi fatte segue che

$$|f-f_n| \leq \sum_{m\in N} h_m \text{ e } |g-g_n| \leq \sum_{m\in N} k_m \text{ per } n\geq n_\varepsilon$$

ove $\{h_m\},\{k_m\}\in S^+$, $\sum_{m\in N} I(h_m)\leq\varepsilon/2c$ e $\sum_{m\in N} I(k_m)\leq\varepsilon/2c$. Da $|af_n+bg_n-(af+bg)| \leq |a|\cdot|f-f_n| + |b|\cdot|g-g_n|$, per $n\geq n_\varepsilon$, risulta

$$|af_n+bg_m-(af+bg)|\leq \sum_{m\in N}(|a|\,h_m+|b|\,k_m) \text{ e } \sum_{m\in N} I(|a|\,h_m+|b|\,k_m)\leq$$
$$\leq|a|\,\varepsilon/2c+|b|\,\varepsilon/2c\leq\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

2.7. [5]. *Se* $\{f_n\}$ *converge* σ*-uniformemente ad* f*, allora* $\{|f_n|\}$ *converge* σ*-uniformemente ad* $|f|$.

Fissato un $\varepsilon\in R^+$, dalle ipotesi fatte segue che

$$|f-f_n| \leq \sum_{m\in N} g_m \text{ per } n\geq n_\varepsilon$$

ove $\{g_m\}\in S^+$ e $\sum_{m\in N} I_0(g_m) \leq \varepsilon$. Da $||f_n|-|f||\leq |f_n-f|$, per $n\geq n_\varepsilon$ risulta

$$||f_n| - |f|| \leq \sum_{m\in N} g_m.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

2.8. *Siano* $\{f_n\},\{g_n\}$ *convergenti* σ*-uniformemente ad* f *e* g *rispettivamente. Condizione necessaria e sufficiente affinché* f *e* g *siano equivalenti è che* $\{|f_n-g_n|\}$ *converga* σ*-uniformemente a* 0.

Sia $f\sim g$. Fissato un $\varepsilon\in R^+$, risulta

$$|f-g| \leq \sum_{m\in N} p_m$$

ove $\{p_m\}\in S^+$ e $\sum_{m\in N} I_0(p_m)\leq\varepsilon/3$, e per le ipotesi fatte

$$|f-f_n| \leq \sum_{m\in N} h_m \text{ e } |g-g_n| \leq \sum_{m\in N} k_m \text{ per } n\geq n_\varepsilon$$

[5] Analoga proposizione vale per la convergenza quasi ovunque.

ove $\{h_m\}, \{k_m\} \in S^+$, $\sum_{m \in N} I_0(h_m) \leq \varepsilon/3$ e $\sum_{m \in N} I_0(k_m) \leq \varepsilon/3$. Da $|f_n - g_n| \leq$ $\leq |f + f_n| + |f - g| + |g - g_n|$, per $n \geq n_\varepsilon$, segue che

$$|f_n - g_n| \leq \sum_{m \in N} (h_m + k_m + p_m) \quad \text{e} \quad \sum_{m \in N} I(h_m + k_m + p_m) \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la prima parte della tesi.

Sia $|f_n - g_n| \Longrightarrow 0$. Fissato un $\varepsilon \in R^+$, risulta

$$|f_n - g_n| \leq \sum_{m \in N} q_m \quad \text{per } n \geq \bar{n}_\varepsilon$$

ove $\{q_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(q_m) \leq \varepsilon/3$. Da $|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g_n| + |g - g_n|$ per $n \geq \max.(n_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon)$ segue che

$$|f - g| \leq \sum_{m \in N} (h_m + k_m + q_m) \quad \text{e} \quad \sum_{m \in N} I_0(h_m + k_m + q_m) \leq \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la seconda parte della tesi.

Se ci limitiamo a considerare soltanto successioni di funzioni di S, allora dai teoremi precedenti possiamo dedurre alcuni importanti corollari.

2.5'. *Se $\{f_n\}$ converge σ-uniformemente ad f, allora*

$$\lim_{m, n \to \infty} I_0(|f_n - f_m|) = 0.$$

2.5''. *Se $\lim_{n, m \to \infty} I_0(|f_n - f_m|) = 0$, allora esistono una $f \in \mathcal{F}$ e una $\{f_r\}$ sottosuccessione di $\{f_n\}$ tali che $f_r \Longrightarrow f$.*

2.5'''. *Se nelle ipotesi della 2.5''., è possibile estrarre da $\{f_n\}$ due sottosuccessioni $\{f_r\}$, $\{f_s\}$ ed esistono due funzioni f_1, f_2 tali che $f_r \Longrightarrow f_1$ e $f_s \Longrightarrow f_2$, allora f_1 e f_2 sono equivalenti.*

2.8'. *Siano $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ convergenti σ-uniformementi ad f e g rispettivamente. Condizione necessaria e sufficiente affinché f e g siano equivalenti è che $\lim_{n, m \to \infty} I_0(|f_n - g_n|) = 0$.*

2.9. *Se $\{f_n\}$ converge σ-uniformemente ad f, allora esiste finito il limite della successione $\{I_0(f_n)\}$.*

2.10. *Se* $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ *convergono* σ*-uniformemente ad* f, *allora*

$$\lim_{n \to \infty} I_0(f_n) = \lim_{n \to \infty} I_0(g_n).$$

3. Sia $\mathcal{L}$ la sottoclasse di $\mathcal{F}$ costituita da tutte e sole le funzioni f per le quali esista almeno una $\{f_n\} \in S$ tale che $f_n \equiv\!> f$. Su $\mathcal{L}$ definiamo il seguente funzionale reale I:

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I_0(f_n), \text{ ove } \{f_n\} \in S \text{ e } f_n \equiv\!> f.$$

Le proposizioni 2.9. e 2.10. ci garantiscono l'esistenza di I e la sua indipendenza dalla particolare successione di S che lo definisce.

Per la coppia $(\mathcal{L}, I)$ valgono le seguenti proposizioni:

3.1. $f, g \in \mathcal{L}, a, b \in R \Rightarrow af + bg \in \mathcal{L}$.

3.2. $f \in \mathcal{L} \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}$.

3.3. $f, g \in \mathcal{L}$ $a, b \in R \Rightarrow I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$.

3.4. $f \in \mathcal{L} \Rightarrow I(|f|) \geq 0$.

Ed inoltre:

3.5. $f \in \mathcal{L}, \{g_m\} \in S^+, |f| \leq \sum_{m \in N} g_m \Rightarrow I(|f|) \leq \sum_{m \in N} I_0(g_m)$.

Sia $\sum_{m \in N} I_0(g_m) < +\infty$ (+), altrimenti è banale. Da $f \in \mathcal{L}$ segue che $|f_n| \equiv\!> |f|$ ove $\{f_n\} \in S$, cioè, fissato un $\varepsilon \in R^+$,

$$||f_n| - |f|| \leq \sum_{m \in N} h_m \text{ per } n \geq n_\varepsilon$$

ove $\{h_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(h_m) \leq \varepsilon/2$. Da (+), per $n \geq \bar{n}_\varepsilon$, segue $\sum_{m > n} I_0(g_m) < \varepsilon/2$, posto $k_n = \sum_{m=1}^{n} g_m$, da $||f| - |f_n| \wedge k_n| \leq ||f| - |f_n|| + \sum_{m > n} g_m$ risulta

$$||f| - |f_n| \wedge k_n| \leq \sum_{m \in N} h_m + \sum_{m > n} g_m \text{ per } n \geq \max.(n_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon)$$

cioè $|f_n| \wedge k_n \equiv\!> |f|$. Infine da $I_0(|f_n| \wedge k_n) \leq I_0(k_n) \leq \sum_{m \in N} I_0(g_m)$, passando al limite per $n \to \infty$, segue la tesi.

Appare infine evidente che $\mathcal{L} \supset S$ e che $I \equiv I_0$ su S, cioè $(\mathcal{L}, I)$ costituisce un ampiamento di (S, I_0) (6).

L'insieme $\mathcal{L}$ è stato da noi definito come la chiusura, rispetto alla convergenza σ-uniforme, dell'insieme S. Vogliamo ora far vedere che questo procedimento non può essere riapplicato ad $\mathcal{L}$ e cioè:

3.6. *Se* $\{f_n\}$ *converge* σ*-uniformemente ad* f *e* $\{f_n\} \in \mathcal{L}$ *allora* $f \in \mathcal{L}$ *e* $I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n)$.

Fissato un $t \in N$, risulta

$$|f - f_n| \leq \sum_{m \in N} g^t_m \text{ da un certo } n \text{ in poi} \qquad (+)$$

ove $\{g^t_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(g^t_m) \leq 1/2^{t+2}$. Indicato con $\bar{n}(t)$ il minimo di tali n, consideriamo $f_{\bar{n}} \in \mathcal{L}$. Esiste una $\{f^r_{\bar{n}}\} \in S$ tale che $f_{\bar{n}} \Longrightarrow f_{\bar{n}}$, cioè

$$|f_{\bar{n}} - f^r_{\bar{n}}| \leq \sum_{m \in N} h^t_m \text{ da un certo } r \text{ in poi}$$

ove $\{h^t_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(h^t_m) \leq 1/2^{t+2}$. Indicato con $\bar{r}(t, \bar{n}(t))$ il minimo di tali r, consideriamo $f^{\bar{r}}_{\bar{n}} \in S^+$. In questo modo otteniamo, per ogni $t \in N$, una funzione $f^{\bar{r}}_{\bar{n}} \in S$ che, dipendendo solamente da t, indichiamo semplicemente con p_t; risulta inoltre

$$|p_t - f| \leq |p_t - f_{\bar{n}}| + |f_{\bar{n}} - f| \leq \sum_{m \in N} (g^t_m + h^t_m) =$$

$$= \sum_{m \in N} k^t_m \text{ e } \sum_{m \in N} I_0(k^t_m) \leq 1/2^{t+1}.$$

Preso un $s \in N$, per $t \geq s$ sarà

$$|p_t - f| \leq \sum_{t \geq s} \sum_{m \in N} k^t_m \text{ e } \sum_{t \geq s} \sum_{m \in N} I_0(k^t_m) \leq \sum_{t \geq s} 1/2^{t+1} = 1/2^s.$$

Dall'arbitrarietà di s segue che $p_t \Longrightarrow f$, cioè $f \in \mathcal{L}$.

Infine da $|I(f) - I(f_n)| \leq I(|f - f_n|)$ e da $(+)$, per la 3.5., risulta $|I(f) - I(f_n)| \leq 1/2^{t+2}$ per $n \geq \bar{n}$.

(6) Siccome trattiamo il problema del prolungamento dell'integrale da un punto di vista astratto, non possiamo fare alcuna affermazione circa l'effettivo ampliamento della classe S.

Dall'arbitrarietà di t segue che $\lim_{n \to \infty} I(f_n) = I(f)$.

Dal fondamentale teorema 3.6. possiamo dedurre alcune importanti proposizioni che caratterizzano $(\mathcal{L}, I)$.

3.7. *Se* $\{f_n\} \in \mathcal{L}$ e $\lim_{m, n \to \infty} I(|f_m - f_n|) = 0$, *allora esistono una* $f \in \mathcal{L}$ *e una* $\{f_r\}$ *sottosuccessione di* $\{f_n\}$ *tali che* $\{f_r\}$ *converge* σ*-uniformemente ad* f *e* $\lim_{n \to \infty} I(f_n) = \lim_{r \to \infty} I(f_r) = I(f)$.

3.8 *Se* $\{f_n\} \in \mathcal{L}, \{f_n\}$ *converge quasi ovunque non decrescendo ad* f *e* $\{I(f_n)\}$ *è superiormente limitata, allora* $f \in \mathcal{L}$ *e* $\lim_{n \to \infty} I(f_n) = I(f)$.

3.9. *Se* $\{f_n\} \in \mathcal{L}, \{f_n\}$ *converge quasi ovunque ad* f *e* $|f_n| \leq g$ *per ogni* $n \in N$ *e quasi ovunque, ove* $g \in \mathcal{L}$ *e* $g \geq 0$, *allora* $f \in \mathcal{L}$ *e* $\lim_{n \to \infty} I(f_n) = = I(f)$.

L'ultima proposizione enunciata, con l'aggiunta dell'ipotesi della funzione maggiorante $g \in \mathcal{L}$, rappresenta l'inversa della 2.4. Ma se, viceversa, $f_n \Longrightarrow f$, ove $\{f_n\} \in \mathcal{L}$ e $f \in \mathcal{L}$, allora, fissato un $\varepsilon \in R^+$, risutla $|f - f_n| \leq \sum_{m \in N} g_m$ per $n \geq n_\varepsilon$, ove $\{g_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(g_m) \leq \varepsilon$. Sarà quindi, per ogni $n \in N$ e quasi ovunque,

$$|f_n| \leq (|f_1| \vee |f_2| \vee \ldots \vee |f_{n_\varepsilon}|) \vee (|f| + \sum_{m \in N} g_m) = g \in \mathcal{L} \text{ e } g \geq 0.$$

Possiamo allora enunciare la seguente proposizione:

3.9'. *Sia* $\{f_n\} \in \mathcal{L}$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\{f_n\}$ *converga* σ*-uniformemente ad* f *è che* $\{f_n\}$ *converga quasi ovunque ad* f *e* $\{|f_n|\}$ *sia quasi ovunque maggiorata da una funzione non negativa di* $\mathcal{L}$.

4. Sia $\mathcal{M}^+$ la sottoclasse di $\mathcal{F}^+$ costituita da tutte e sole le funzioni f per le quali esista almeno una $\{f_n\} \in S^+$ tale che $f_n \to f$. Sia $\mathcal{L}^+$ la sottoclasse di $\mathcal{L}$ costituita dalle sole funzioni non negative.

Dimostriamo alcune proposizioni.

4.1. *Se* $\{f_n\} \in \mathcal{L}^+$ *ed* $\{f_n\}$ *converge quasi ovunque ad* f, *allora* $f \in \mathcal{M}^+$

Fissato un $n \in N$, esiste una $\{f^r_n\} \in S$ tale che $f^r_n \Longrightarrow f_n$, cioè

$$|f^r_n - f_n| \leq \sum_{m \in N} g^n_m \text{ da un certo } r \text{ in poi} \qquad (+)$$

ove $\{g^n_m\} \in S^+$ e $\sum_{m \in N} I_0(g^n_m) \leq 1/2^n$. Indicato con $\bar{r}(n)$ il minimo di tali r, consideriamo $f_n^{\bar{r}(n)}$. Otteniamo in questo modo, per ogni $n \in N$, una funzione $f_n^{\bar{r}(n)} \in S^+$ che, dipendendo solamente da n, indichiamo semplicemente con p_n. Da (+) risulta $I(|f_n - p_n|) \leq 1/2^n$, cioè $\lim_{n \to \infty} I(|f_n - p_n|) = 0$ e quindi, per la 3.7., esiste una $\{|f_t - p_t|\}$ sottosuccessione di $\{|f_n - p_n|\}$ tale che $|f_t - p_t| \to 0$. Consideriamo infine $\{p_t\}$: da $|f - p_t| \leq |f - f_t| + |f_t - p_t|$ segue che $p_t \to f$, cioè la tesi.

4.2. *Se $f \in \mathcal{M}^+$, allora esiste una $\{h_n\} \in \mathcal{L}^+$ tale che $\{h_n\}$ converge quasi ovunque non decrescendo ad f.*

Sia $\{f_n\} \in S^+$ e $f_n \to f$. Posto $h_n = \lim_{m \to \infty} (f_n \wedge f_{n+1} \wedge \dots \wedge f_{n+m})$, $\{h_n\} \in \mathcal{L}^+$ per la 3.8. e $h_n \nearrow f$ (7).

4.3. *Se $f \in \mathcal{M}^+$, allora $f \wedge g \in \mathcal{L}^+$ per ogni $g \in \mathcal{L}^+$*

Sia $\{f_n\} \in S^+$ e $f_n \to f$. $\{f_n \wedge g\} \in \mathcal{L}^+$, $f_n \wedge g \leq g$ e $f_n \wedge g \to f \wedge g$. Dalla 3.9.segue a tesi.

4.4. *Se $\{f_n\} \in \mathcal{M}^+$ e $\{f_n\}$ converge quasi ovunque non crescendo ad f, allora $f \in \mathcal{M}^+$.*

Sia $\{f_1^n\} \in S^+$ e $f_1^n \to f_1$. $\{f_1^n \wedge f_n\} \in \mathcal{L}^+$ per la 4.3. e $f_1^n \wedge f_n \to f$. Dalla 4.1. segue la tesi.

4.5. *Se $\{f_n\} \in \mathcal{M}^+$ e $\{f_n\}$ converge quasi ovunque non decrescendo ad f, allora $f \in \mathcal{M}^+$.*

Sia $\{f_n^r\} \in \mathcal{L}^+$ e $f_n^r \nearrow f_n$ per ogni $n \in N$ (4.2.). Posto $k_n = (f_1^n \vee f_2^n \vee \dots$ $\dots \vee f_n^n)$, $\{k_n\} \in \mathcal{L}^+$ e $k_n \to f$. Dalla 4.1. segue la tesi.

Possiamo ora dimosrare che lo spazio $\mathcal{M}^+$ è chiuso rispetto alla convergenza quasi ovunque e cioè:

4.6. *Se $\{f_n\} \in \mathcal{M}^+$ e $\{f_n\}$ converge quasi ovunque ad f, allora $f \in \mathcal{M}^+$.*

Posto $h_n = \lim_{m \to \infty} (f_n \wedge f_{n+1} \wedge \dots\ f_{n+m})$, $\{h_n\} \in \mathcal{M}^+$ per la 4.4. e $h_n \nearrow f$. Dalla 4.5. segue la tesi.

Sia $\mathcal{M}$ la sottoclasse di $\mathcal{F}$ costituita da tutte e sole le funzioni f tali che $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+$ (8).

(7) $h_n \nearrow f$ indica convergenza quasi ovunque e non decrescente.

(8) $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -(f \wedge 0)$.

L'insieme $\mathcal{M}$, spazio delle funzioni misurabili, è uno spazio di Riesz (2.6. e 2.7.), è chiuso rispetto alla convergenza quasi ovunque (4.6.) e contiene l'insieme $\mathcal{L}$ (2.4.).

5. Vogliamo ora esaminare il caso in cui lo spazio sostegno X coincide con un compatto dell'asse reale, allo scopo di caratterizzare con delle opportune nozioni di convergenza ognuno dei tre classici tipi d'integrali ivi definiti: integrale di Cauchy, di Riemann, di Lebesgue. Sia dunque X un compatto di R, S l'insieme delle funzioni continue ivi definite, I_0 l'integrale di Cauchy.

Siano f, $\{f_n\} \in \mathcal{F}$. Diciamo che $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f se per ogni $\varepsilon \in R^+$ esiste almeno un $n_\varepsilon \in N$ tale che $|f-f_n| \leq \varepsilon$ per $n \geq n_\varepsilon$.

Se indichiamo con K^+ la sottoclasse di S^+ costituita dalle sole funzioni costanti, allora la definizione di convergenza uniforme è equivalente alla seguente definizione:
per ogni $\varepsilon \in R^+$ esistono almeno un $n_\varepsilon \in N$ ed una $g \in K^+$ tali che $I_0(g) \leq \varepsilon$ e $|f-f_n| \leq g$ per $n \geq n_\varepsilon$.

In quanto K^+ è un sottoinsieme di S^+, appare naturale generalizzare il concetto di convergenza uniforme nei seguenti due modi:

DEFINIZIONE 5.1. Siano f, $\{f_n\} \in \mathcal{F}$. Diremo che $\{f_n\}$ converge S-uniformemente ad se per ogni $\varepsilon \in R^+$ esistono almeno un $n_\varepsilon \in N$ ed una $g \in S^+$ tali che:

$$I_0(g) \leq \varepsilon \text{ e } |f-f_n| \leq g \text{ per } n \geq n_\varepsilon.$$

DEFINIZIONE 5.2. Siano f, $\{f_n\} \in \mathcal{F}$. Diremo che $\{f_n\}$ converge σ-uniformemente ad f se per ogni $\varepsilon \in R^+$ esistono almeno un $n_\varepsilon \in N$ ed una $\{g_m\} \in S^+$ tali che:

$$\sum_{m \in N} I_0(g_m) \leq \varepsilon \text{ e } |f-f_n| \leq \sum_{m \in N} g_m \text{ per } n \geq n_\varepsilon.$$

È noto che per la coppia (S, I_0) valgono gli assiomi 1.1. 1.2., 1.3., 1.4., 1.5. ed inoltre

C. 1. $\{f_n\} \in S,\ f_n \Longrightarrow f \Rightarrow f \in S,\ I_0(f) = \lim\limits_{n \to \infty} I(f_n)$.

Possiamo quindi applicare a (S, I) il procedimento di prolungamento dianzi descritto servendoci delle due nozioni di convergenza S-uniforme e σ-uniforme.

Nel secondo caso otteniamo la classe $\mathcal{L}$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue e l'integrale di Lebesgue I. Per $(\mathcal{L},I)$ vale, tra l'altro, la seguente proposizione

L. 1. $\{f_n\}\epsilon\mathcal{L},\ f_n \Longrightarrow f \Rightarrow f\epsilon\mathcal{L}, I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

Nel primo caso otteniamo una classe $\mathcal{R}$ di funzioni reali e un funzionale reale I, per i quali valgono le proposizioni 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5. ed inoltre risulta $\mathcal{R} \supset S$ e $I=I_0$ su S.

Facciamo ora vedere che $\mathcal{R}$ coicide con la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann e che I coincide con l'integrale di Riemann. A tal proposito diamo la seguente definizione: diciamo che una $f\epsilon\mathcal{F}$ è integrabile secondo Riemann se per ogni $\varepsilon\epsilon R^+$ esiste almeno una coppia di funzioni (h, k) tali che: $h, k\epsilon S$, $h\leq f\leq k$, $I_0(k)-I_0(h)\leq\varepsilon$. Chiameremo integrale di f l'elemento separatore della coppia di classi contigue $(\{I_0(p)\}, \{I_0(q)\})$ ove $p, q\epsilon S$ e $p\leq f\leq q$.

Sia f integrabile secondo Riemann. Per ogni $n\epsilon N$ risulta $h_n\leq f\leq k_n$ ove $h_n, k_n\epsilon S$ e $I_0(k_n)-I_0(h_n)\leq 1/n$. Consideriamo le seguenti due successioni di funzioni: $\overline{h}_n=(h_1\vee h_2\vee\ldots\vee h_n)$, $\overline{k}_n=(k_1\wedge k_2\wedge\ldots\wedge k_n)\cdot\{\overline{h}_n\}$ è non decrescente, $\{\overline{k}_n\}$ è non crescente e, per ogni $n\epsilon N$, risulta ancora $\overline{h}_n\leq f\leq\overline{k}_n$ e $I_0(\overline{k}_n)-I_0(\overline{h}_n)\leq 1/n$. Da $|f-\overline{h}_n| \leq \overline{k}_{\overline{n}} - \overline{h}_{\overline{n}}$ per $n\geq\overline{n}$, ove $\overline{k}_{\overline{n}} - \overline{h}_{\overline{n}}\ \epsilon S^+$ e $I(\overline{k}_{\overline{n}})-I(\overline{h}_{\overline{n}})=\overline{I}(\overline{k}_{\overline{n}}-\overline{h}_{\overline{n}})\leq 1/\overline{n}$, segue che $\overline{h}_n \Longrightarrow f$, cioè $f\epsilon\mathcal{R}$.

Sia $f\epsilon\mathcal{R}$. Esiste una $\{f_n\}\epsilon S$ tale che $f_n\Longrightarrow f$, cioè $|f-f_n| \leq g$ per $n\geq n_\varepsilon$ ove $g\epsilon S^+$ e $I_0(g)\leq\varepsilon/2$, cioè $f_n-g\leq f\leq f_n+g$, ove f_n-g, $f_n+g\epsilon S$ e $I_0(f_n+g)-I_0(f_n-g)\leq\varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue che f è integrabile secondo Riemann.

Infine l'uguaglianza degli integrali si dimostra facilmente: basta tener conto del fatto che essi coincidono su S.

Per $(\mathcal{R}, I)$ vale la seguente proposizione:

R. 1. $\{f_n\}\epsilon\mathcal{R},\ f_n\Longrightarrow f\Rightarrow f\epsilon\mathcal{R}, I(f)=\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

Fissato un $\varepsilon\epsilon R^+$, risulta $|f-f_n| \leq g$ per $n\geq n_\varepsilon$, ove $g\epsilon S^+$ e $I_0(g)<\varepsilon/4$. Fissato un $\overline{n}\geq n_\varepsilon$, esiste una $\{f_{\overline{n}}^m\}\epsilon S$ tale che $f_{\overline{n}}^m \Longrightarrow f_{\overline{n}}$, cioè $|f_{\overline{n}}^m-f_{\overline{n}}|\leq$ $\leq q$ per $m\geq m_\varepsilon$, ove $q\epsilon S^+$ e $I_0(q)\leq\varepsilon/4$. Fissato un $\overline{m}\geq m_\varepsilon$, poniamo $h=f_{\overline{n}}^{\overline{m}}-g-q$ e $k=f_{\overline{n}}^{\overline{m}}+g+q$; risulta $h\leq f\leq k$, $h, k\epsilon S$ e $I(k)-I(h)\leq$ $\leq\varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε e dal teorema precedente segue la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. J. DANIELL: *A general form of integral.* Ann. Math. 19 (1917-18).

[2] M. DOLCHER: *Topologie e strutture di convergenza.* Annali della Scuola Normale di Pisa. Serie III Vol. XIV Fasc. I (1960).

[3] M. H. STONE: *Notes on integration.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 34 (1948).

[4] P. URYSOHN: *Sur les classes (L) de M. Frechet.* L'Enseign. Math. 25 (1926).