TRAIETTORIE DI CAMPI DI VETTORI DISCONTINUI (*)

di ALFREDO PUCCI (a Pisa) (**)

SOMMARIO. - *In un precedente lavoro* [4] *ho considerato sistemi differenziali con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita; nel presente lavoro riprendo la questione da un punto di vista geometrico: considero un sistema di tipo «autonomo» in cui le discontinuità ammesse per il campo di vettori assegnato sono descritte mediante una «pseudotopologia» strettamente legata allo stesso campo di vettori.*

Dimostro dapprima un teorema di esistenza di tipo locale, da cui ricavo anche un teorema globale attraverso l'impiego del lemma di Zorn; quindi espongo un teorema di unicità.

Il legame che intercorre fra la pseudotopologia ed il campo dei vettori, legame che rende più espressivo il risultato trovato, richiede un sostanziale raffinamento del procedimento dimostrativo impiegato nel lavoro [4].

SUMMARY. - *In a foregoing work I considered differential systems with the second member discontinous as regards the indeterminate; in this work I reconsider the question by a geometrical point of view. I consider a system of «autonomic» type in which the discontinuities admitted for the given vector-field, are described by a «pseudotopology» strictly connected with the same vector-field.*

First I prove an existence theorem of local type from which I derive a global theorem using Zorn's lemma; than I give a unicity-theorem.

The connection between the pseudotopology and the vector field, which illuminates more expressively the found result, requests an essential refinement of the proving method used in [4].

1. Consideriamo un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ ed un'applicazione $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $X \in \Omega$ sia $F(X) \neq 0$.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 luglio 1975.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica «L. Tonelli» - Via Derna 1 - 56100 Pisa.

Nel problema che tra poco tratteremo ci interessa considerare la continuità dell'applicazione suddetta rispetto ad una certa « pseudotopologia » introdotta tramite la stessa F. Per queso cominciamo col porre la seguente

DEFINIZIONE. Siano F un'applicazione soddisfacente alle ipotesi sopra dette, δ un numero reale tale che $0<\delta<1$ ed $\bar{Y}$ un punto di Ω. Diremo intorno conico di $\bar{Y}$, relativo ad F e di parametro δ, un insieme del tipo

$$\Lambda_\delta = V_\delta \cap U, \tag{1.1}$$

dove U è un intorno di $\bar{Y}$ nella topologia euclidea τ_E indotta da $\mathbb{R}^n$ in Ω e V_δ è così definito

$$V_\delta = \{Y\colon\ Y \in \Omega,\ (Y-\bar{Y},\ F(\bar{Y})) \geq \delta\,|Y-\bar{Y}|\cdot|F(\bar{Y})|\ \}. \tag{1.2}$$

Supponiamo ora di avere fissato δ, $(0<\delta<1)$, lo stesso per tutti i punti di Ω; se consideriamo per ogni $X \in \Omega$ la famiglia degli intorni conici $\Lambda_\delta = V_\delta \cap U$ al variare di U nella famiglia degli intorni di X nella topologia τ_E, si può facilmente constatare che in tal modo si ha una pseudotopologia [1] che indicheremo con $\tau_{F,\delta}$.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE. Se F è continua in $Y_0 \in \Omega$ rispetto a $\tau_{F,\delta}$, per ogni numero positivo $\theta<1$ esiste un intorno conico di Y_0, di parametro δ:

$$\Lambda_\delta = V_\delta \cap U, \tag{1.3}$$

tale che per $Y_1, Y_2 \in \Lambda_\delta$ si abbia

$$\frac{(F(Y_1),\ F(Y_2))}{|F(Y_1)|\cdot|F(Y_2)|} \geq \theta > 0. \tag{1.4}$$

La (1.4) si ottiene subito tenendo conto che $F(Y_0) \neq 0$, che la F è continua in Y_0 ed inoltre che la funzione

[1] Con questo termine vogliamo mettere in rilievo che questi intorni soddisfano agli ordinari assiomi tranne che l'assioma della stabilità dell'intorno (assioma V_{IV} nella presentazione di Bourbaki: Les structures fondamentales de l'analyse, livre III, Topologie générale, chapitre I. Paris, Hermann e Cie Editeurs, 1940).

$$(V, W) \to \frac{(V, W)}{|V|\,|W|}$$

è continua in ogni punto (V_0, W_0) per cui $V_0 \neq 0$, $W_0 \neq 0$.

2. Sia F un'applicazione definita come all'inizio del n. 1; consideriamo il seguente problema

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases}$$

dove $Y_0 \in \Omega$ è un vettore assegnato.

Per soluzione di (2.1) intendiamo una funzione $Y(t)$, a valori in $\mathbb{R}^n$, definita e continua in un intervallo $[t_0, a[$ con $a > t_0$, avente in ogni punto la derivata *destra* soddisfacente alla prima delle (2.1) ed inoltre tale da verificare la condizione $Y(t_0) = Y_0$.

3. Per quanto concerne il problema ora posto si ha il seguente

TEOREMA (di esistenza locale). Sia δ un numero reale, con $0 < \delta < 1$. Se per la F valgono le seguenti ipotesi:

a) $0 < |F| \leq m$ per ogni $Y \in \Omega$, con m costante,

b) F sia continua in Ω rispetto alla pseudotopologia $\tau_{F,\delta}$, allora è possibile determinare un $\sigma > 0$ tale che in $[t_0, t_0 + \sigma[$ esiste almeno una soluzione di (2.1).

Dimostreremo il teorema ora enunciato adoperando il metodo delle poligonali o di Cauchy.

Cominciamo con l'osservare, tenendo conto dell'ipotesi *b*), che dalla proposizione del n. 1 segue subito che fissato un $\bar{\theta} \in]\,\delta, 1\,[$ esiste in corrispondenza ad esso un intorno conico $\bar{\Lambda}_\delta = V_\delta \cap \bar{U}$ di Y_0, essendo $\bar{U}$ il disco di centro Y_0 e raggio $\bar{r}$, tale che per $Y \in \bar{\Lambda}_\delta$ risulti

$$\text{(3.1)} \qquad \frac{(F(Y), F(Y_0))}{|F(Y)| \cdot |F(Y_0)|} \geq \bar{\theta}\ \text{[2]}.$$

[2] Si osservi che al numero $\bar{\theta}$ si può associare l'intorno conico di Y_0: $\Lambda_{\bar{\theta}} = V_{\bar{\theta}} \cap \bar{U}$ con $V_{\bar{\theta}}$ definito come in (1.2). Si ha ovviamente

$$\Lambda_{\bar{\theta}} \subset \bar{\Lambda}_\delta .$$

Fissato $\sigma \in \left] 0, \frac{\bar{r}}{m} \right]$, consideriamo l'intervallo $[t_0, t_0+\sigma]$ e dividiamolo in n parti uguali mediante i punti $t_1 = t_0 + \frac{\sigma}{n}$, $t_2 = t_0 + \frac{2\sigma}{n}, \dots, t_n = t_0 + \sigma$; indichiamo poi con

$$Y = Y_n(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma,$$

la funzione lineare a tratti così definita negli intervalli della suddivisione:

$$
\begin{aligned}
&Y_{1,n}(t) = Y_0 + F(Y_0)(t - t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1,\\
&Y_{2,n}(t) = Y_{1,n}(t_1) + F(Y_{1,n}(t_1))(t - t_1), \quad t_1 \leq t \leq t_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Y_{r,n}(t) = Y_{r-1}(t_{r-1}) + F(Y_{r-1,n}(t_{r-1}))(t - t_{r-1}), \quad t_{r-1} \leq t \leq t_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Y_{n,n}(t) = Y_{n-1,n}(t_{n-1}) + F(Y_{n-1,n}(t_{n-1}))(t - t_{n-1}), \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Per il modo con cui è stata preso σ si verifica che i punti $Y_{k,n}$ appartengono tutti ad $\bar{U}$ e quindi le (3.2) hanno senso. Dalla costruzione risulta

$$Y_n(t_0) = Y_0, \tag{3.3}$$

$$|Y_n(t) - Y_n(\tilde{t})| \leq m\,|t - \tilde{t}|, \tag{3.4}$$

per ogni coppia di punti $t, \tilde{t}$ appartenenti a $[t_0, t_0+\sigma]$, e da quest'ultima disuguaglianza, posto $\tilde{t} = t_0$ e tenuto conto della (3.3) si ricava

$$|Y_n(t)| \leq |Y_0| + m\,\sigma. \tag{3.5}$$

La (3.4) ci dice che $\{Y_n(t)\}$ è un insieme equicontinuo di funzioni, mentre la (3.5) ci assicura che $\{Y_n(t)\}$ è una successione equilimitata; allora è possibile estrarre da quest'ultima una sottosuccessione $\{Y_\nu(t)\}$ (che nel seguito verrà indicata ancora con $\{Y_n(t)\}$) uniformemente convergente in $[t_0, t_0+\sigma]$ ad una funzione $Y^*(t)$ la quale ovviamente risulta essere lipschitziana.

4. Il nostro scopo è ora quello di dimosrare che $Y^*(t)$, con $t_0 \leq t < t_0+\sigma$, è una soluzione del problema (2.1) nel senso detto nel n. 2. Per questo, una volta osservato che dalla (3.3) si ottiene $Y^*(t_0)=Y_0$, basterà provare che, considerato un qualunque $\bar{t} \in [t_0, t_0+\sigma[$, per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $\lambda>0$ tale che per $0<h\leq\lambda$, si abbia

$$\left| \frac{1}{h}(Y^*(\bar{t}+h)-Y^*(\bar{t}))-F(Y^*(\bar{t}))\right| \leq \varepsilon \tag{4.1}$$

Per giungere a quest'ultimo risultato ci serviremo dei seguenti lemmi

LEMMA 1. Se $Y=Y_n(t)$ con $t_0\leq t\leq t_0+\sigma$ è una qualunque delle poligonali considerate nel n. 3, si ha

$$(Y_n(t)-Y_0, F(Y_0))\geq\bar{\theta}\,|Y_n(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|, \tag{4.2}$$

cioè tutte le poligonali suddette appartengono all'intorno conico $V_{\bar{\theta}}$ di Y_0, di parametro $\bar{\theta}>\delta$. (cfr. n. 3, nota (2)).

DIM. Prendiamo la poligonale $Y=Y_n(t)$ e consideriamone i lati, che hanno per equazioni le (3.2). Proviamo la (4.2) procedendo induttivamente rispetto al numero dei lati.

Per il primo lato, tenendo presente che $0<\bar{\theta}<1$ si ha

$$(Y_{1,n}(t)-Y_0,\ F(Y_0))=(F(Y_0),\ F(Y_0))\,(t-t_0)=\ |F(Y_0)|^2\,(t-t_0)=$$

$$=|F(Y_0)|\cdot|F(Y_0)|\,(t-t_0)\geq\bar{\theta}\,|Y_{1,n}(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|$$

con $t_0\leq t\leq t_1$, cioè

$$(Y_{1,n}(t)-Y_0,\ F(Y_0))\geq\bar{\theta}\,|Y_{1,n}(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|\ (t_0\leq t\leq t_1).$$

Supponiamo ora che il lato k-esimo appartenga a $\Lambda_{\bar{\theta}}$ verifichiamo che anche il lato $k+1$-esimo vi appartiene, cioè:

$$\begin{cases}(Y_{k,n}(t)-Y_0,\ F(Y_0))\geq\bar{\theta}\,|\,Y_{k,n}(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0| \\ \qquad\qquad t_{k-1}\leq t\leq t_k\end{cases}$$

implica che è

$$\begin{cases}(Y_{k+1,n}(t)-Y_0,\ F(Y_0))\geq\bar{\theta}\,|Y_{k+1,n}(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)| \\ \qquad\qquad t_k\leq t\leq t_{k+1}.\end{cases}$$

Si ha infatti:

$$(Y_{k+1,n}(t)-Y_0,\ F(Y_0))=(Y_{k,n}(t_k)+F(Y_{k,n}(t_k))(t-t_k)-Y_0,\ F(Y_0))=$$

$$=(Y_{k,n}(t_k)-Y_0,\ F(Y_0))+(F(Y_{k,n}(t_k)),\ F(Y_0))(t-t_k)\geq$$

$$\geq\overline{\theta}\,|Y_{k,n}(t_k)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|+\overline{\theta}\,|F(Y_{k,n}(t_k))|\cdot|F(Y_0)|\,(t-t_k)\geq$$

$$\geq\overline{\theta}\,|Y_{k+1,n}(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)| \text{ con } t_k\leq t\leq t_{k+1}.$$

OSSERVAZIONE. Dalla (4.2) si ottiene subito

$$(4.3)\qquad (Y^*(t)-Y_0,\ F(Y_0))\geq\overline{\theta}\,|Y^*(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|$$

con $t_0\leq t\leq t_0+\sigma$, cioè la curva $Y=Y^*(t)$ è contenuta nell'intorno conico $\Lambda_{\overline{\theta}}$ di Y_0 e perciò è anche contenuta nell'intorno $\overline{\Lambda}_\delta$ (3) (cfr. nota (2)).

LEMMA 2. Sia $\overline{t}$ un qualunque punto di $[t_0, t_0+\sigma[$ e γ un numero tale che $0<\gamma\leq t_0+\sigma-\overline{t}$, allora per $t\in]\overline{t}, \overline{t}+\gamma]$, si ha:

$$(4.4)\qquad (Y^*(t)-Y^*(\overline{t}),\ F(\overline{t})))>\delta\,|Y^*(t)-Y^*(\overline{t})|\cdot|F(Y^*(\overline{t}))|,$$

cioè la curva $Y=Y^*(t)$, per $\overline{t}\leq t\leq\overline{t}+\gamma$ è contenuta nell'intorno conico Λ^*_δ di $Y^*(\overline{t})$: $\Lambda^*_\delta=V^*_\delta\cap U^*$, dove V^*_δ è l'insieme del tipo (1.2) relativo al punto $Y^*(\overline{t})$ ed U^* è il disco di centro $Y^*(\overline{t})$ e raggio $m\gamma$.

DIM. Consideriamo la poligonale $Y=Y_n(t)$ $(t_0\leq t\leq t_0+\sigma)$ (cfr. n. 3) e siano rispettivamente t_k e t_{k+j} i due vertici della corrispondente suddivisione di $[t_0, t_0+\sigma]$ che precedono immediatamente i punti $\overline{t}$ e $t\in]\overline{t}, \overline{t}+\gamma]$. Tenendo presente il n. 3 e la (4.2) si ha successivamente:

$$(Y_n(t)-Y_n(\overline{t}),\ F(Y^*(\overline{t})))=(Y_n(t)-Y_n(t_{k+j})+Y_n(t_{k+j})-Y(t_{k+j-1})+$$

$$+Y_n(t_{k+j-1})-\ldots+Y_n(t_{k+1})-Y_n(\overline{t}),\ F(Y^*(\overline{t})))=$$

(3) Più precisamente si ha che per $t\in]\,t_0, t_0+\sigma\,[$ ogni punto di $Y=Y^*(t)$ è interno a $\overline{\Lambda}_\delta$. Infatti basta osservare che dalla (4.3), tenendo conto che è $0<\delta<\overline{\theta}<1$, segue, per $t\in]t_0, t_0+\sigma[$, $(Y^*(t)-Y_0,\ F(Y_0))>\delta\,|Y^*(t)-Y_0|\cdot|F(Y_0)|$.

$$=(F(Y_n(t_{k+j})),\ F(Y^*(\bar{t})))(t-t_{k+j})+$$

$$(F(Y_n(t_{k+j-1})),\ F(Y^*(\bar{t})))(t_{k+j}-t_{k+j-1})+\ldots$$

$$\ldots+(F(Y_n(t_k)),\ F(Y^*(\bar{t})))(t_{k+1}-\bar{t})\geq$$

$$\geq\bar{\theta}\,|F(Y^*(\bar{t}))|\,\{|Y_n(t)-Y_n(t_{k+j})|+|Y_n(t_{k+j})-$$

$$-Y_n(t_{k+j-1})|+\ldots+|Y_n(t_{k+1})-Y_n(\bar{t})|\}\geq\bar{\theta}\,|F(Y^*(\bar{t}))|\cdot|Y_n(t)-Y_n(\bar{t})|;$$

si ottiene quindi

$$(Y_n(t)-Y_n(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))\geq\bar{\theta}\,|Y_n(t)-Y_n(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|$$

con $\bar{t}\leq t\leq\bar{t}+\gamma$, e da quest'ultima, passando al limite per $n\rightarrow+\infty$, tenendo conto che è $0<\delta<\bar{\theta}$, si ricava la (4.4).

Lemma 3. Se $[\bar{t},\bar{t}+\gamma]$ è l'intervallo considerato nel lemma precedente, preso η, con $0<\eta<\gamma$, esiste un indice $\bar{n}$ tale che per $n\geq\bar{n}$ e per $t\in[\bar{t}+\eta,\bar{t}+\gamma]$ si abbia:

$$(4.5)\qquad (Y_n(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))>\delta\,|Y_n(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|,$$

cioè, a partire da un certo indice, tutte le poligonali appartengono a Λ_δ^*, quando $t\in[\bar{t}+\eta,\ \bar{t}+\gamma]$.

Dim. Siccome si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(Y_n(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))=(Y^*(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t}))),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\delta\,|Y_n(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|=\delta\,|Y^*(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|,$$

uniformemente in $[\bar{t}+\eta,\bar{t}+\gamma]$, per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $\bar{n}$ tale che per $n\geq\bar{n}$ e per $t\in[\bar{t}+\eta,\bar{t}+\gamma]$ risulti

$$(Y_n(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))\geq(Y^*(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))-\varepsilon,$$

$$\delta\,|Y_n(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|\leq\delta\,|Y^*(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|+\varepsilon.$$

Ne segue che se ε è tale da aversi

$$(Y^*(t)-Y^*(\bar{t}),\ F(Y^*(\bar{t})))-\varepsilon>\delta\,|Y^*(t)-Y^*(\bar{t})|\cdot|F(Y^*(\bar{t}))|+\varepsilon,$$

(e ciò è possibile per la (4.4)) si ottiene subito la (4.5).

LEMMA 4. Sia $\bar{t}$ un qualunque punto di $[t_0, t_0+\sigma[$. Per ogni $\varepsilon>0$ esistono un intorno conico $\tilde{\Lambda}_\delta$ di $Y^*(\bar{t})$ ed un $\gamma\in]0, t_0+\sigma-\bar{t}]$ tali che se $Y_n(\xi)$, con $\xi\in]\bar{t}, \bar{t}+\gamma[$, è un vertice della poligonale $Y=Y_n(t)$ contenuto in $\tilde{\Lambda}_\delta$ ed η è un qualunque punto di $]\xi, \bar{t}+\gamma]$, risulti

$$\left|\frac{1}{\eta-\xi}(Y_n(\eta)-Y_n(\xi))-F(Y^*(\bar{t}))\right|\leq\varepsilon. \tag{4.6}$$

DIM. Poiché F è continua in $Y^*(\bar{t})$ rispetto a $\tau_{F,\delta}$, in corrispondenza di ogni $\varepsilon>0$ esiste un intorno conico $\tilde{\Lambda}_\delta=V_\delta\cap\tilde{U}$ di $Y^*(\bar{t})$ con V_δ insieme del tipo (1.2) (relativo ad $Y^*(\bar{t})$) ed $\tilde{U}$ disco di centro $Y^*(\bar{t})$ e raggio $\tilde{r}$, tale che per $Y\in\tilde{\Lambda}_\delta$ si abbia

$$|F(Y)-F(Y^*(\bar{t}))|\leq\varepsilon.$$

D'altra parte, com'è facile constatare, (cfr. nota (3)) si può supporre che sia $\tilde{\Lambda}_\delta\subset\bar{\Lambda}_\delta$ con $\tilde{r}\leq m(t_0+\sigma-\bar{t})$; posto quindi $\gamma=\dfrac{\tilde{r}}{m}$, risulta $\bar{t}+\gamma\leq t_0+\sigma$, da cui, tenuto conto del lemma 2, segue che è $Y^*(t)\in\tilde{\Lambda}_\delta$ per $t\in[\bar{t}, \bar{t}+\gamma]$.

Ora se $Y_n(\xi)$ è un vertice della poligonale $Y=Y_n(t)$ $(t_0\leq t\leq t_0+\sigma)$ contenuto in $\tilde{\Lambda}_\delta$, a causa del lemma 3 segue $Y_n(t)\in\tilde{\Lambda}_\delta$ per $\xi\leq t\leq\bar{t}+\gamma$; perciò appartengono a $\tilde{\Lambda}_\delta$ anche tutti gli estremi sinistri dei lati di tale poligonale che si proiettono su $[\xi, \bar{t}+\gamma]$. Dalle precedenti considerazioni segue facilmente la (4.6).

5. Concludiamo la dimostrazione del nostro teorema. Tenendo conto del fatto che le $Y_n(t)$ sono uniformemente lipschitziane, la relazione (4.6) vale anche se ξ non è vertice della poligonale $Y_n(t)$. Passando al limite per $n\to\infty$ si ha

$$\left|\frac{1}{\eta-\xi}(Y^*(\eta)-Y^*(\xi))-F(Y^*(\bar{t}))\right|\leq\varepsilon,$$

da cui facendo tendere ξ a $\bar{t}$ e ponendo $h=\eta-\bar{t}$ si ottiene la (4.1) con $0<h\leq\gamma$.

6. Esistenza di soluzioni in senso globale.

Dall'osservazione che segue il lemma 1 del n. 4, risulta che la funzione $Y^*(t)$, soluzione del problema (2.1) nell'intervallo $[t_0, t_0+\sigma[$ è tale che il punto $Y^*(t)$, per $t\in[t_0, t_0+\sigma]$, appartiene a $\bar{\Lambda}_\delta$ e quindi ad Ω; allora, per il teorema di esistenza locale (n. 3) possiamo prolungare la soluzione $Y^*(t)$ a destra di $t_0+\sigma$.

Consideriamo ora l'insieme delle soluzioni del problema (2.1) ed introduciamo in tale insieme una relazione di ordine ($<$) nel modo seguente. Siano $Y(t)$ e $Z(t)$ due soluzioni definite rispettivamente in $[t_0, t_y]$ ed in $[t_0, t_z]$; diremo che $Y<Z$ se $t_z\geq t_y$, essendo le funzioni coincidenti in $[t_0, t_y]$.

Un noto teorema ci assicura che in ogni insieme totalmente ordinato esitono catene non ampliabili, possiamo perciò affermare che nel suddetto insieme di soluzioni esiste una catena non prolungabile rispetto alla relazione $<$ ora introdotta.

Diciamo $\{Y_j\}$ tale catena e poniamo $T=U\,[t_0, t_{y_j}]$; detta inoltre $Y(t)$ la soluzione avente il comune valore delle funzioni che formano la catena, se T è chiuso ed è $b=\sup t_{y_j}$ esiste $Y(b)$, se invece T è aperto facciamo vedere che esiste finito il $\lim\limits_{t\to b-} Y(t)$.

Infatti, poiché $Y(t)$ è lipschitziana (cfr. n. 3) si ha: per ogni $\varepsilon>0$, considerato l'intorno sinistro di b: $\left]b-\frac{\varepsilon}{m}, b\right[$, per ogni coppia di punti appartenenti a detto intorno, risulta

$$|Y(t_2)-Y(t_1)|\leq m\,|t_2-t_1|\leq m\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon,$$

e questo significa, per il teor. di Cauchy che esiste finito il $\lim\limits_{t\to b-} Y(t)$; diciamo l tale limite.

Se T è chiuso si ha $Y(b)\in\partial\Omega$; infatti se fosse $Y(b)\in\Omega$, applicando il teorema del n. 3, si potrebbe prolungare la soluzione $Y(t)$ a destra di b, ma ciò è assurdo perché $[t_0, b]$ è l'intervallo massimale su cui è definita la $Y(t)$.

Se T è aperto si vede analogamente che $l\in\partial\Omega$.

Da quanto precede risulta che la soluzione considerata è prolungabile fino alla frontiera di Ω.

7. Unicità della soluzione del problema (2.1).

Se oltre alle ipotesi contenute nell'enunciato del teorema di esistenza locale del n. 3 aggiungiamo la seguente:

Ogni punto di Ω ha un intorno conico di parametro δ in cui F è di classe C^1, allora la soluzione in grande del problema (2.1) è unica.

DIM. Intanto possiamo dire, in base al noto teorema, che esiste una sola soluzione « in piccolo » a destra di ogni $t \in [t_0, b[$.

Siano $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$ due soluzioni definite su $[t_0, b[$ e sia $[t_0, c]$, con $t_0 < c < b$, l'intervallo sul quale è $Y_1(t) = Y_2(t)$, mentre per $c < t < b$ si abbia $Y_1(t) \neq Y_2(t)$.

Ora al punto $Y(c)$ corrisponde un intorno conico, di parametro δ, nel quale F è di classe C^1 e quindi la soluzione $Y_1(t)$ è prolungabile alla destra di c in modo unico.

Da ciò si ricava che è $Y_1(t) = Y_2(t)$ per $t \in [t_0, b[$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous right-hand side.* Am. Math. Soc. Trans. Vol. 42.

[2] V. M. MATROSOV, *On differential equations and inequalities with discontinuous right-hand sides.* Differential equations, Faraday Press - Vol.3 n^0 3 (traduzione dal russo).

[3] A. CAMBINI, S. QUERCI, *Equazioni differenziali del primo ordine con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste - Vol. I, fasc. (1969) pp. 89-97.

[4] A. PUCCI, *Sistemi di equazioni differenziali con secondo membro discontinuo rispetto all'incognita.* Rendiconti Ist. di Matem. Univ. Trieste. Vol. III, fasc. I (1971).