LIMITATEZZA E CONTINUITÀ DELLE SOLUZIONI DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI FUNZIONALI (*)

di STEFANIA PAGANONI MARZEGALLI (a Milano) (**)

SOMMARIO. - *Si considera l'equazione funzionale* $a(x, y) f(x) + b(x, y) g(y) = h[F(x, y)]$ *e si danno condizioni atte a garantire la continuità di* g *a partire dalla limitatezza di* f.

SUMMARY. - *We consider the functional equation* $a(x, y) f(x) + b(x, y) g(y) = h[F(x, y)]$ *and we give some conditions under which the boundedness of* f *implies the continuity of* g.

1. Introduzione.

Siano: X e Y spazi topologici, R campo reale, f: $X \to R$, g: $Y \to R$, F: $X \times Y \to R$, h: $R \to R$ e si consideri l'equazione funzionale

$$f(x) + g(y) = h[F(x, y)]. \tag{1}$$

Vale il seguente

TEOREMA (C. T. Ng [3]). *Se X è connesso e localmente connesso, F è continua in ciascuna delle sue variabili, f non è costante ed è localmente limitata superiormente (o inferiormente) in ogni punto di X, allora g è continua su Y.*

Nella dimostrazione di questo teorema gioca un ruolo determinante il fatto che F sia a valori reali; in tal caso è infatti possibile sfruttare proprietà topologiche legate alla struttura d'ordine esistente in R.

(*) Pervenuto in Redazione l'8 luglio 1975.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica F. Enriques - Università degli Studi di Milano - Via C. Saldini 50 - 20133 Milano.

In questa Nota si estende, fra l'altro, il teorema precedente al caso più generale in cui F è a valori in uno spazio topologico Z e ad un'equazione più generale della (1) (Teor. 3).

Si prende inoltre in considerazione il caso in cui f, g e h siano a valori in uno spazio vettoriale topologico W. Dopo aver osservato (par. 4) che in questo caso la locale limitatezza di f non implica, in generale, la sua continuità nella topologia di W, si dimostra (utilizzando il Teor. 1) che se f è localmente limitata, allora essa è continua nella topologia debole di W (Teor. 4).

NOTAZIONI. Qui e nel seguito:

1^0) X, Y, Z siano spazi topologici, R il campo reale;

2^0) a: $X \times Y \rightarrow R$, b: $X \times Y \rightarrow R$, F: $X \times Y \rightarrow Z$;

3^0) F_x e F^y siano rispettivamente le x-sezioni e le y-sezioni della funzione F, cioè:

$$F_x \colon Y \rightarrow Z \quad \text{definita da} \quad F_x(y) = F(x, y)$$

$$F^y \colon X \rightarrow Z \quad \text{definita da} \quad F^y(x) = F(x, y);$$

4^0) Per ogni insieme A, A^0 sia l'interno di A.

2. Caso in cui f è localmente limitata.

TEOREMA 1. *Siano* f: $X \rightarrow R$, g: $Y \rightarrow R$, h: $Z \rightarrow R$ *e si consideri l'equazione funzionale*

$$a(x, y) f(x) + b(x, y) g(y) = h[F(x, y)]. \tag{2}$$

Si supponga che:

i) *per ogni* $x \in X$, F_x *sia continua*

ii) *per ogni* $y \in Y$, *esista* $x = x(y)$ *tale che, per ogni intorno* $U(x)$, *sia* $(F^y(U(x)))^0 \neq \emptyset$

iii) f *sia localmente limitata in ogni punto di* X

iv) a *e* b *siano funzioni continue in* $X \times Y$

v) *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$ *sia* $b(x, y) \neq 0$.

Allora g *è continua su* Y.

OSSERVAZIONI. I) Nel Teorema 1 si può attenuare l'ipotesi v) pur di rafforzare l'ipotesi ii). Precisamente, se $b(\bar{x}, \bar{y})=0$ senza che $b(x, \bar{y})$ sia identicamente nulla, basta aggiungere all'ipotesi ii) la seguente

ii bis) Se $y=\bar{y}$, per ogni $x \in X$ e per ogni intorno $U(x)$, sia $(F^{\bar{y}}(U(x)))^0 \neq \varnothing$ (1).

Se invece per $y=\bar{y}$ si ha $b(x, \bar{y})=0$ identicamente rispetto ad x, non è possibile dedurre la continuità di $g(y)$ in $\bar{y}$. In tal caso infatti l'equazione (2) diviene, per $y=\bar{y}$,

$$a(x, \bar{y})\, f(x)=h\,[F(x, \bar{y})]$$

e non fornisce più alcun vincolo sulla $g(y)$ nel punto $\bar{y}$.

II) Si supponga che, oltre alle ipotesi del Teorema 1, siano soddisfatte anche quelle che si ottengono dalle i) e ii) scambiando il ruolo delle variabili x e y e che, inoltre, sia $a(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$. Allora, anche f è necessariamente continua (2).

3. Caso in cui f è unilateralmente limitata.

Se, invece di supporre la limitatezza bilaterale di f, ci si limita alla sua limitatezza unilaterale, allora è ancora possibile garantire la continuità di g pur di rafforzare le ipotesi su F. Valgono infatti i seguenti

TEOREMA 2. *Si consideri l'equazione* (2) *e si supponga che*:

i) *per ogni* $x \in X$, F_x *sia continua*

ii) *per ogni* $y \in Y$, *esista* $x=x(y)$ *tale che ogni suo intorno* $U(x)$ *contenga un insieme* A *con le seguenti proprietà*:

a) $x \in A$ *e* $F^y(A)$ *è aperto*

b) *per ogni* $z \in F^y(A)$ *esiste un intorno* $V(y)$ *tale che, per ogni* $t \in V(y)$, $z \in F^t(A)$

(1) La dimostrazione procede in modo analogo a quella del Teorema 1 (vedi par. 5), pur di scegliere $x(\bar{y})$ in modo che sia $b(x(\bar{y}), \bar{y}) \neq 0$.

(2) Infatti si può applicare il Teorema 1 successivamente a g e a f.

iii) *f sia localmente limitata superiormente [inferiormente] in ogni punto di X*

iv) *a e b siano continue su* $X \times Y$

v) *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$, *sia* $a(x, y) \neq 0$, $b(x, y) \neq 0$.

Allora g è continua su Y.

TEOREMA 3. *Si consideri l'equazione funzionale* (2) *con* $a(x, y) =$ cost. *e si supponga che*:

j) *per ogni* $x \in X$, F_x *sia continua*

jj) *per ogni* $y \in Y$, *esista* $x = x(y)$ *tale che ogni suo intorno* $U(x)$ *contenga un insieme A con le seguenti proprietà*:

a) $F^y(A)$ *è aperto*

b) *per ogni* $z \in F^y(A)$ *esiste un intorno* $V(y)$ *tale che, per ogni* $t \in V(y)$, $z \in F^t(A)$

jjj) *f sia localmente limitata superiormente [inferiormente] in ogni punto di X*

jw) *b sia continua su* $X \times Y$

w) *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$ *sia* $b(x, y) \neq 0$.

Allora g è continua su Y.

Si segnalano ora alcune semplici condizioni atte a garantire che l'ipotesi ii) del Teorema 2 o l'ipotesi jj) del Teorema 3 siano soddisfatte.

LEMMA 1. *Siano soddisfatte le seguenti condizioni*:

a) *per ogni* $x \in X$, F_x *sia continua*

b) *per ogni* $y \in Y$, F^y *sia aperta*

c) *per ogni* $z \in Z$ *l'equazione* $z = F(x, y)$ *sia soddisfatta da* $x = G_z(y)$ *con* $G_z(y)$ *funzione continua definita su un sottoinsieme aperto di Y.*

Allora F soddisfa l'ipotesi ii) *del Teorema* 2.

COROLLARIO 1. *Se F è continua su* $X \times Y$ *e, per ogni* $z \in Z$, $z = F(x, y)$ *è risolubile con continuità rispetto ad x* [3], *allora F soddisfa le ipotesi* ii) *del Teorema* 2.

[3] Si dice che $z = F(x, y)$ è risolubile con continuità rispetto ad x se si ha $x = G(y, z)$, con G continua rispetto a ciascuna delle variabili separatamente.

LEMMA 2. *Sia* F: $X \times Y \to R$. *Se*:

a) X *è connesso e localmente connesso*

b) F^y e F_x *sono continue*

c) *esiste* $x_0 \in X$ *tale che, per ogni* $y \in Y$, $F(x, y)$ *non è costante rispetto ad* x *in alcun intorno di* x_0,

Allora F *soddisfa l'ipotesi* jj) *del Teorema* 3.

OSSERVAZIONI I) Se in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ si ha $a(\bar{x}, \bar{y})\ b(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, ma esiste almeno un $\tilde{x}$ tale che $a(\tilde{x}, \bar{y})\ b(\tilde{x}, \bar{y}) \neq 0$, il Teorema 2 continua a valere pur di rafforzare l'ipotesi ii) chiedendo che per $y = \bar{y}$ la ii) stessa valga per ogni $x \in X$.

II) Il Teorema 3 contiene come caso particolare il Teorema di C. T. Ng citato nell'introduzione ([4]).

4. Caso di un generico spazio vettoriale topologico.

TEOREMA 4. *Sia* W *uno spazio vettoriale topologico su* R. *Si consideri l'equazione funzionale*

$$(^0) \qquad a(x, y)\, f(x) + b(x, y)\, g(y) = h\, [F(x, y)]$$

con

$$f: X \to W, \qquad g: Y \to W, \qquad h: Z \to W.$$

Se F, a, b *soddisfano le ipotesi del Teorema* 1 *e* f *è localmente limitata in ogni punto di* X, *allora* g *è continua nella topologia debole di* W.

Si noti che le ipotesi del Teorema 4 non sono sufficienti, in generale, per assicurare la continuità di g nella topologia di W.

Consideriamo infatti il seguente contro-esempio. Sia V lo spazio vettoriale delle successioni $x = \{x_n\}$ di numeri complessi, infinitesime. W coincida con V dotato della norma $\|x\| = \text{Sup}\,|x_i|$. Sia $U = \{x: \|x\| < 1\}$. $X = Y = Z$ coincidano con V dotato della topologia che ha come sottobase i traslati degli elementi di U, cioè gli insiemi $a + U$, con $a \in V$.

([4]) Basta osservare che, nelle ipotesi di C. T. Ng, vale il Lemma 2. Infatti: poiché X è connesso, f non può essere localmente costante (altrimenti sarebbe costante su tutto X); perciò esiste un x_0 in ogni intorno del quale f non è costante. Dall'equazione funzionale (1) ne segue che, per ogni $y \in Y$, $F(x, y)$ non può essere costante rispetto ad x in alcun intorno di x_0.

Sia

$$f(x)=x, \quad g(y)=y, \quad h(z)=z, \quad F(x,y)=x+y, \quad a=b=1:$$

l'equazione funzionale (^{0}) è allora soddisfatta.

Le ipotesi del Teorema 4 sono verificate. Infatti, poiché X, Y, Z hanno topologie invarianti per traslazione, le traslazioni risultano degli omeomorfismi e perciò le ipotesi su F sono ampliamente soddisfatte.

Inoltre f è localmente limitata in ogni punto di X, perché, per ogni $x \in X$, $f(x+U)$ è limitato in W.

Eppure g non è continua; infatti, se lo fosse, per ogni λ, $g^{-1}(\lambda U) = \lambda U$ dovrebbe essere un intorno di 0 in Y. Si dovrebbe cioè avere, per un'opportuna scelta di $a_1, \dots, a_n \in U$, $\lambda U \supset (a_1 + U) \cap \dots \cap (a_n + U)$, e di conseguenza, se $\lambda < 1$,

$$\lambda U \supset U \cap (a_1 + U) \cap \dots \cap (a_n + U).$$

Ora questo è impossibile perché, per qualunque scelta di $a_1, \dots, a_n \in U$, il più piccolo insieme del tipo λU contenente $U \cap (a_1 + U) \cap \dots \cap (a_n + U)$ è U stesso.

Valgono i seguenti corollari:

Corollario 2. *Se W ha dimensione finita e valgono le ipotesi del Teorema 4, allora g è continua.*

Corollario 3. *Se W ha dimensione finita, $X=Y$, e valgono le ipotesi del Teorema 4, allora, se f soddisfa l'equazione funzionale*

$$a(x,y)\, f(x) + b(x,y)\, f(y) = h\,[F(x,y)]$$

f è continua.

5. Dimostrazione dei teoremi.

Dimostrazione del Teorema 1.

Sia $y_0 \in Y$, $\varepsilon > 0$ arbitrario e $x_0 = x(y_0)$ il punto di cui all'ipotesi ii). Sia U un intorno di x_0 in cui f si mantiene limitata. Si determinino due intorni $U(x_0)$ e $V(y_0)$ in modo che:

a) $U(x_0) \subset U$

b) per ogni $(x,y) \in U(x_0) \times V(y_0)$, $a(x,y)$ e $b(x,y)$ soddisfino le seguenti condizioni

$$(3) \quad |a(x,y) - a(x_0,y_0)| < \mathrm{Min}(\varepsilon, |a(x_0,y_0)|/2) \quad \text{se} \quad a(x_0,y_0) \neq 0$$

$$< \varepsilon \qquad\qquad \text{se} \quad a(x_0,y_0) = 0$$

(4) $$|\, b(x, y) - b(x_0, y_0)\,| < \mathrm{Min}\,(\varepsilon, |\, b(x_0, y_0)\,|/2)$$

Per la ii), $(F^{y_c}(U(x_0)))^0 \neq \varnothing$. Sia $A \subset U(x_0)$ tale che $W = F^{y_c}(A)$ sia aperto (si osservi che non è necessariamente $x_0 \in A$).

Essendo f limitata su A, posto $L = \sup_{x \in A} f(x)$, esiste $x_1 \in A$ tale che

(5) $$f(x_1) > L - \varepsilon \geq f(x) - \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad x \in A.$$

Inoltre, per l'ipotesi i), l'insieme $\widetilde{V} = \{y \in V(y_0) : F(x_1, y) \in W\}$ è un intorno di y_0.

Allora, per la definizione di A, per ogni $y \in \widetilde{V}$ esiste un $x \in A$, x dipendente da y, tale che $F(x_1, y) = F(x, y_0)$. Di conseguenza, dalla (2) si ricava

$$a(x_1, y)\, f(x_1) + b(x_1, y)\, g(y) = a(x, y_0)\, f(x) + b(x, y_0)\, g(y_0).$$

Di qui si ottiene

(6) $$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{b(x_1, y)} \{ [b(x, y_0) - b(x_1, y)]\, g(y_0) +$$
$$+ [a(x, y_0) - a(x_1, y)]\, f(x_1) + a(x, y_0)\, (f(x) - f(x_1)) \}.$$

Cominciamo a considerare il caso in cui $a(x_0, y_0) = 0$.

Per la (3) si ha $|\, a(x, y_0)\,| < \varepsilon$. Dalla (4) segue inoltre $|\, b(x_1, y)\,| \geq$ $\geq |\, b(x_0, y_0)\,|/2$. Perciò, posto $M = \sup_{x \in U} |f(x)|$, dalla (6) si ricava infine, ricordando le (3) e (4),

$$|\, g(y) - g(y_0)| \leq \frac{2}{|\, b(x_0, y_0)\,|} \{2\,\varepsilon\, |\, g(y_0)\,| + 2\,\varepsilon M + 2\,\varepsilon M\} = k\,\varepsilon,$$

per ogni $y \in \widetilde{V}$. Quindi g è continua in y_0.

Consideriamo ora il caso in cui $a(x_0, y_0) \neq 0$; per dimostrare il teorema in questo caso, si proverà che g è semicontinua sia inferiormente che superiormente in y_0.

Si osservi innanzi tutto che, per le (3) e (4), $a(x, y_0)/b(x_1 y)$ ha in tutto $A \times \widetilde{V}$ il segno di $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0)$.

Sia $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$; dalla (6) e dalla (5) si ottiene:

(7) $$g(y) - g(y_0) \leq \frac{1}{b(x_1, y)} \{ [b(x, y_0) - b(x_1, y_0)]\, g(y_0) +$$

$$+ [a(x, y_0) - a(x_1, y)]\, f(x_1) + a(x, y_0)\, \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \frac{2}{|b(x_0, y_0)|}\{2\,\varepsilon\,|g(y_0)| + 2\,\varepsilon M + 3/2\,|a(x_0, y_0)|\,\varepsilon\} =$$

$$= S\,\varepsilon, \quad \text{con } S \text{ costante,}$$

e quindi g è superiormente semicontinua in y_0.

Sia $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) < 0$; sempre dalle (5) e (6) si ricava

$$g(y) - g(y_0) \geq \frac{1}{b(x_1, y)}\{[b(x, y_0) - b(x_1, y)]\, g(y_0) +$$

$$+ [a(x, y_0) - a(x_1, y)]\, f(x_1) + a(x, y_0)\, \varepsilon\}.$$

Poiché, come si è visto sopra, il modulo del secondo membro non supera $S\,\varepsilon$, ne segue

$$g(y) - g(y_0) \geq -S\,\varepsilon \qquad \text{per ogni } y$$

e quindi g è inferiormente semicontinua in y_0.

Occorre ora dimostrare, nel caso $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$, la semicontinuità inferiore di g in y_0 e, nel caso $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) < 0$, la semicontinuità superiore di g in y_0.

Si procede in modo analogo al precedente. Essendo f limitata inferiormente in A, posto $l = \inf_{x \in A} f(x)$, esiste un $x_2 \in A$, tale che

$$f(x_2) \leq l + \varepsilon \leq f(x) + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } x \in A. \tag{8}$$

Inoltre l'insieme $\bar{V} = \{y \in V(y_0) : F(x_2, y) \in W\}$ è un intorno di y_0 e, per ogni $y \in \bar{V}$, esiste un $x \in A$, x dipendente da y, tale che $F(x_2, y) = F(x, y_0)$. Di conseguenza

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{b(x_2, y)}\{[b(x, y_0) - b(x_2, y)]\, g(y_0) +$$

$$+ [a(x, y_0) - a(x_2, y)]\, f(x_2) + a(x, y_0)\,(f(x) - f(x_2))\}.$$

Di qui, ricordando la (8), si ottiene:

i) nel caso $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$, $g(y) - g(y_0) \geq -S\,\varepsilon$ e quindi la semicontinuità inferiore di g in y_0;

ii) nel caso $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) < 0$, $g(y) - g(y_0) \leq S\varepsilon$ e quindi la semicontinuità superiore di g in y_0.

Perciò in ogni caso g è continua in y_0 e il Teorema 1 è dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.

Si supponga, per esempio, f localmente superiormente limitata ([5]). Sia $y_0 \in Y$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario. Come nella dimostrazione del Teorema 1 e usando le stesse notazioni, si perviene alla (6) e se ne ricava che $g(y)$ è superiormente o inferiormente semicontinua in y_0 a seconda che sia $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$ o $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) < 0$ ([6]).

Sia, per esempio, $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$; allora occorre dimostrare che g è inferiormente semicontinua in y_0. Sempre con le notazioni usate nella dimostrazione del Teorema 1, $F(x_1, y_0) \in W$. Per l'ipotesi ii-b), esiste un intorno di y_0, $V^*(y_0)$ (che si può supporre contenuto in $V(y_0)$), tale che, per ogni $y \in V^*(y_0)$, $F(x_1, y_0) \in F^y(A)$; questo equivale ad affermare che, per ogni $y \in V^*(y_0)$, esiste $x \in A$, x dipendente da y, tale che

$$F(x_1, y_0) = F(x, y).$$

Tenendo conto dell'equazione funzionale (2), si ricava:

$$a(x_1, y_0) f(x_1) + b(x_1, y_0) g(y_0) = a(x, y) f(x) + b(x, y) g(y).$$

Di qui, per l'ipotesi v) si ottiene:

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{b(x, y)} \{ [b(x_1, y) - b(x, y)] g(y_0) +$$

$$+ [a(x_1, y_0) - a(x, y)] f(x_1) + a(x, y)(f(x_1) - f(x)) \}.$$

Per la (5) e tenendo conto che $a(x_0, y_0)/b(x_0, y_0) > 0$ si ricava:

([5]) Nel caso in cui f è localmente inferiormente limitata la dimostrazione è analoga.

([6]) L'unico cambiamento nella dimostrazione è dovuto al fatto che la limitazione $\sup_{x \in U} |f(x)| = M < +\infty$ non è più, in generale, verificata. Tuttavia la scelta di x_1 è tale che $|f(x_1)| \leq R$ con R costante indipendente da ε. Ne segue, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1, che il modulo del secondo membro della (6) è maggiorato da $S_1 \varepsilon$, con S_1 costante.

$$g(y)-g(y_0)\geq \frac{1}{b(x,y)}\{[b(x_1,y)-b(x,y)]\,g(y_0)+$$
$$+[a(x_1,y_0)-a(x,y)]\,f(x_1)-\varepsilon\, a(x,y)\}.$$

Poiché il secondo membro è, in valore assoluto maggiorato da $S_1\varepsilon$, con S_1 costante, si ha infine $g(y)-g(y_0)\geq -S_1\varepsilon$ e quindi g è semicontinua inferiormente in y_0.

Nel caso $a(x_0,y_0)/b(x_0,y_0)<0$, con ragionamenti del tutto analoghi si perviene alla semicontinuità inferiore di g in y_0.

In ogni caso quindi g è continua in y_0 e per l'arbitrarietà di y_0, g è continua su Y. Il Teorema 2 è così dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.

È analoga a quella del Teorema 2: anzi, in questo caso, le maggiorazioni risultano più semplici.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.

L'ipotesi F^y aperta garantisce l'ipotesi ii-*a*). Occorre dimostrare che F soddisfa anche ii-*b*). Per ogni intorno $U(x)$ del punto x si assuma $A=U(x)$. Per la *b*), per ogni $y\in Y$, $F^y(A)$ è aperto. Allora se $z\in F^y(A)$ esiste $x_1\in A$ tale che $z=F(x_1,y)$. Si consideri l'equazione $z=F(x,t)$. Poiché $x=G_z(t)$ e $x_1=G_z(y)$, per la continuità di G_z, esiste $V(y)$ tale che, per ogni $t\in V(y)$, $G_z(t)\in A$, cioè per ogni $t\in V(y)$ esiste $x\in A$ tale che $F(x,t)=z$. Allora F soddisfa l'ipotesi ii-*b*) del Teorema 2.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2.

Si comincia a provare che F soddisfa l'ipotesi jj-*a*) del Teorema 3. Sia U un aperto connesso e localmente connesso contenente x_0 (si noti che tali insiemi costituiscono una base del sistema di intorni di x_0). Poiché F^y è continua, per la *c*) $F^y(U)$ è un intervallo proprio I. Sia $(t_1,t_2)\subset$ I; per il Lemma di Pfanzagl ([4], [5]) esiste un componente $\bar U$ di $\{(F^y)^{-1}[(t_1,t_2)]\}\cap U$ tale che $F^y(\bar U)=(t_1,t_2)$; inoltre $\bar U$ è aperto perché U è localmente connesso. Perciò per ogni intorno $U(x_0)$ esiste un $\bar U\subset U(x_0)$ con $F^y(\bar U)$ aperto, c. d. d.

Si dimostra ora che $F(x,y)$ soddisfa anche l'ipotesi jj-*b*) del Teorema 3. Sia $z_0\in F^y(\bar U)=(t_1,t_2)$. Si scelgano z_1 e z_2 con $t_1<z_1<z_0<z_2<t_2$ e siano $x_1, x_2\in\bar U$ tali che $F(x_1,y)=z_1$ e $F(x_2,y)=z_2$. Esiste allora un intorno $V(y)$ tale che, per ogni $t\in V(y)$, $F(x_1,t)<z_0<F(x_2,t)$. Ne segue che, essendo $\bar U$ connesso, $F^t(\bar U)$ contiene z_0 per ogni $t\in V(y)$. Ne segue l'asserto.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.

Sia $p: W \rightarrow R$ un funzionale lineare continuo. Dall'equazione funzionale (^{0}) si ottiene

$$(^{00}) \qquad a(x, y)(p \bigcirc f)(x) + b(x, y)(p \bigcirc g)(y) = (p \bigcirc h)(F(x, y)).$$

Poiché p è continuo, l'immagine $p(A)$ di ogni insieme A limitato in W è limitata in R e quindi $p \bigcirc f$ è localmente limitata.

Dal Teorema 1 applicato all'equazione (^{00}) si ricava che $p \bigcirc g$ è continua su Y per ogni funzionale lineare continuo $p: W \rightarrow R$. Ne segue che g è continua nella topologia debole di W (7).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ACZÉL, *Lectures on functional equations and their applications,* Academic Press, New York, 1966.

[2] J. HORVATH, *Topological vector spaces and distributions,* vol. 1, Addison Wesley Publ. Company, 1966.

[3] C. T. NG, *Local boundedness and continuity for a functional equation on topological spaces,* Proc. Am. Math. Soc., 39 (1973), pp. 525-529.

[4] J. PFANZAGL, *On a functional equation related to families of exponential probability measures.* Aequationes Math. 4 (1970), pp. 139-142; Aequationes Math. 6 (1970), p. 120.

[5] J. PFANZAGL, *On the functional equation* $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(T(x, y))$. Aequationes Math. 6 (1970), pp. 202-205.

(7) Infatti, poiché la topologia debole su W, $\sigma(W, W')$, è la più debole topologia per cui risultano continui tutti i funzionali lineari $p \in W'$, da un noto risultato (ad es. [2] pag. 73) segue che $g: Y \rightarrow W$ è debolmente continua se e solo se $p \bigcirc g$ è continua, per ogni $p \in W'$.