ÜBER CAUCHY'SCHE SÄTZE FÜR HYPERPSEUDOHOLOMORPHE FUNKTIONEN (*)

von C. WITHALM (in Graz) (**)

SOMMARIO. - *Partendo dalla teoria delle funzioni pseudo-olomorfe e dando una breve definizione delle funzioni iperpseudo-olomorfe si formulano e si provano per queste ultime il teorema integrale e la formula integrale di Cauchy.*

SUMMARY. - *Moving from the theory of pseudoholomorphic functions and after a short definition of hyperpseudomorphic functions we formulate and prove for these functions the integral theorem and the integral formula of Cauchy.*

1. Einführung.

Aus der Theorie der pseudoholomorphen Funktionen wissen wir, dass der im Gebiet D_0 der komplexen Ebene erklärte Erzeugendenvektor $E=(F\ G)$ den Voraussetzungen

$$(\text{E }1)\qquad \bigwedge_{z\in D_0} \operatorname{Im}(\overline{F}\cdot G)>0, \qquad\qquad (\text{E }2)\qquad \bigwedge_{z\in D_0} E\in H^1\times H^1$$

genügt, dabei ist E ein Element des Erzeugendenraumes E_{D_0}, welcher sich als additiver Vektorraum über $\mathbb{C}$ erweist.

Bezeichnet Ω_D den Vektorraum über $\mathbb{R}$ der in $D \subset\subset D_0$ reellen Vektorfunktionen $\omega=\begin{pmatrix}\Phi\\ \psi\end{pmatrix}$, so heisst $w=E\,\omega\in E\cdot\Omega_D$ in D eine pseudo-

(*) Pervenuto in Redazione il 16 gennaio 1975.

(**) Indirizzo dell'Autore: II. Mathematisches Institut der Universität Graz - Lehrkanzel für Angewandte Mathematik - A-8010 Graz, Steyrergasse 17/5.

holomorphe Funktion, wenn für $z=x+iy$

$$(\Delta) \quad \bigwedge_{z_0 \in D} \frac{d_{(E)} w}{dz}(z_0) := \dot{w}(z_0) := \lim_{z \to z_0} E(z) \frac{\omega(x,y) - \omega(x_0, y_0)}{z - z_0}$$

eigentlich existiert. Das Tupel $\left(E \cdot \Omega_D, \frac{d_{(E)}}{dz}\right)$ wollen wir mit $P_D(E)$ bezeichnen. Ist $w=E\,\omega \in P_D(E)$, so ist $\omega \in C^1 \times C^1$, $\dot{w}=E\,\omega_z$ und $0=E\,\omega_{\bar{z}}$. Ist speziell $E=(1\ i)=: A$, so erweist sich $A\,\omega$ als holomorph in D, $P_D(A)$ bezeichne demgemäss die Menge der in D holomorphen Funktionen.

Das in D_0 holomorphe Funktionenpaar $(\sigma, \tau) \in H^1 \times H^1$ mit positiven Imaginärteilen habe die Eigenschaft, dass für $E=(F\ G) \in E_{D_0}$ und $E^1= =(F_1\ G_1) \in E_{D_0}$ die Beziehungen $F_1=F\,\sigma$ und $G_1=G\,\tau$ erfüllt seien. In $D \subset\subset D_0$ erklären wir dann $w=E\,\omega=F\,\phi+G\,\psi \in P_D(E)$, $w_1=E^1\,\omega^1= =F_1\,\phi_1+G_1\,\psi_1 \in P_D(E^1)$, $F^\sigma := (F\ F\,\sigma)$, $G^\tau := (G\ G\,\tau)$ und $w_F=F\,\phi+ +(F\,\sigma)\,\phi_1 =: F^\sigma\,\omega^\sigma$, $w_G=G\,\psi+(G\,\tau)\,\psi_1 =: G^\tau\,\omega^\tau$.

Dann gilt.

SATZ 1. *Es existiert eine Abbildung θ mit der Eigenschaft*

$$\theta: P_D(E) \times P_D(E^1) \ni (w, w_1) \to (w_F, w_G) \in P_D(F^\sigma) \times P_D(G^\tau),$$

wobei die beiden Funktionen w_F bzw. w_G in der Form $F\,\Phi$ bzw. $G\,\Psi$ mit holomorphem Φ bzw. Ψ darstellbar, und F und G dem Ähnlichkeitsprinzip [1] *entsprechende Exponentialfunktionen sind.*

Beweis. Es ist (E 1) $\operatorname{Im}(\bar{F}(F\,\sigma)) = \operatorname{Im}(|F|^2\,\sigma) > 0$ und (E 2) $F^\sigma \in H^1 \times H^1$, also ist $F^\sigma \in E_{D_0}$ und analog $G^\tau \in E_{D_0}$.

Setzen wir voraus, dass

$$\bigwedge_{z_0 \in D} \frac{d_{(F^\sigma)} w_F}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} F^\sigma(z) \frac{\omega^\sigma(x,y) - \omega^\sigma(x_0, y_0)}{z - z_0} \quad [2]$$

eigentlich vorhanden ist, so ist $w_F \in P_D(F^\sigma)$ und analog finden wir $w_G \in P_D(G_\tau)$, d. h. θ existiert. Dann impliziert $w_F=F^\sigma\,\omega^\sigma \in P_D(F^\sigma)$ aber, da $\sigma \in P_D(A)$ ist, $0=F^\sigma \omega^\sigma_{\bar{z}} = F\,\Phi_{\bar{z}} + (F\,\sigma)\phi_{1\bar{z}} = F\,(\phi+\sigma\phi_1)_{\bar{z}}$. Wegen (E 1) ist F nie Null in D_0, also ist $(\phi+\sigma\phi_1)_{\bar{z}} =: \Phi_{\bar{z}} = 0$, was wegen $\Phi \in C^1$ die Behauptung $\Phi \in P_D(A)$ liefert. Entsprechend erkennt man,

(1) Siehe [1], [2], [11].

(2) Es gibt solche Paare w, w_1.

dass $\psi+\tau\psi_1=:\Psi\in P_D(A)$ ist; sind also die Differentialgleichungen $\phi_{\bar z}+\sigma\phi_{1\bar z}=0$ und $\psi_{\bar z}+\tau\psi_{1\bar z}=0$ erfüllt, so sind $E\,\omega_{\bar z}=0$, $E^1\,\omega^1{}_{\bar z}=0$, $F^\sigma\,\omega^\sigma{}_{\bar z}=0$ und $G^\tau\,\omega^\tau{}_{\bar z}=0$ gleichzeitig richtig und umgekehrt.

Die letzte Behauptung folgt aus dem Ähnlichketsprizip.

Aufgrund dieses Satzes wollen wir vereinbaren, im Folgenden die Abbildung θ immer als existent anzusehen.

2. Differentiation.

$H\,\Omega_D$ sei die Menge der in $D\subset\subset D_0$ erklärten Vektorfunktionen $\chi:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix}\in P_D(A)\times P_D(A)$. Ist dann der Differentialoperator $\frac{d_{(HE)}}{dz}$ durch die Zuordnung $E\,\chi\to E\,\chi'$ erklärt, so wollen wir das Tupel $\left(E\cdot H\,\Omega_D,\ \frac{d_{(HE)}}{dz}\right)$ als den Raum $HP_D(E)$ der hyperpseudoholomorphen Funktionen bezeichnen.

KOROLLAR 1. (i) *$HP_D(E)$ ist ein additiver Vektorraum über $\mathbb{C}$.*

(ii) *$d_{(HE)}/dz$ ist ein linearer Endomorphismus in $HP_D(E)$.*

(iii) *Die Erzeugendenfolge hyperpseudoholomorpher Funktionen hat unabhängig von E immer die Periode eins* (3)

Beweis. (i) Ist $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $(w_\lambda=E\,\chi_\lambda,\ w_\mu=E\,\chi_\mu)\in HP_D(E)\times\times HP_D(E)$, so gilt $\lambda\,w_\lambda+\mu\,w_\mu=E\,(\lambda\chi_\lambda+\mu\chi_\mu)\in HP_D(E)$.

$$\text{(ii)}\ \frac{d_{(HE)}}{dz}(\lambda w_\lambda+\mu w_\mu)=\lambda E\chi'_\lambda+\mu E\,\chi'_\mu=\lambda\frac{d_{(HE)}}{dz}\,w_\lambda+\mu\frac{d_{(HE)}}{dz}\,w_\mu.$$

$$\text{(iii)}\ \frac{d_{(HE)}}{dz}:HP_D(E)\ni w=E\,\chi\to E\,\chi'=\frac{d_{(HE)}}{dz}\,w\in HP_D(E).$$

Aus (iii) erhalten wir die Rekursionsformel

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\frac{d^{n+1}_{(HE)}}{dz^{n+1}}\,w=E\,\frac{d}{dz}\left(\frac{d^n}{dz^n}\,\chi\right).$$

Es sei $F^i=(F\ iF)$, $G^i=(G\ iG)$, so gilt

(3) Siehe [1], [2], [8].

SATZ 2. (i) *Die Räume* $P_D(F^i) \oplus P_D(G^i)$ *und* $HP_D(E)$ *sind isomorph*

(ii) $P_D(F^i)$ *und* $P_D(G^i)$ *sind Teilräume von* $HP_D(E)$.

(iii) *Es existiert eine nicht triviale Abbildung von* $P_D(E) \oplus P_D(iE)$ *in* $HP_D(E)$.

Beweis. Setzen wir in Satz 1 speziell $(\sigma, \tau) = (i, i)$, so folgt hieraus zusammen mit der Definition von $HP_D(E)$ (i) und (iii). Die Richtigkeit von (ii) erkennen wir, wenn wir einmal $\Psi = 0$ und eimal $\Phi = 0$ setzen.

Wegen Satz 2, (iii) wollen wir auch diejenigen Elemente von $HP_D(E)$, die der direkten Summe von $P_D(E)$ und $P_D(iE)$ entspringen, als eigentliche hyperpseudoholomorphe Funktionen mod (HE) bezeichnen.

3. Integration.

Es sei $E = (F\ G) \in E_{D_0}$ und $\Gamma \subset D \subset\subset D_0$ ein rektifizierbares Kurvenstück mit dem Anfangspunkt z_0 und dem Endpunkt z und es sei $W \in C(\Gamma)$; unter dem $E-*-$ Integral über W längs Γ versteht man die Darstellung

$$_*\int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(E)} \zeta := \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma G^* W\, d\zeta + i\, \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma F^* W d\zeta,$$

wenn $E^* := (F^*\ G^*) := (-2\bar{F}/(F\bar{G}-\bar{F}G)\ \ 2\bar{G}/(F\bar{G}-\bar{F}G)) \in E_{D_0}$ den zu E adjungierten Erzeugendenvektor bedeutet. (4)

Durch

$$\int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(E)} \zeta = F(z)\, \mathrm{Re}_* \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(E)} \zeta + G(z)\, \mathrm{Im}_* \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(E)} \zeta$$

wird dann das $E-$ Integral über W längs Γ repräsentiert. Während das $E-*-$ Integral ein additives Funktional des Integrationsweges ist, gilt dieses nicht für das $E-$ Integral.

Ist $w = E\,\omega \in P_D(E)$, so heisst $_*w = A\,\omega$ pseudoholomorphe Funktion zweiter Art modulo E und w die korrespondierende pseudoholomorphe Funktion erster Art.

(4) Siehe [1], [2].

Für $\dot{w} = \frac{d_{(E)}}{dz} w$ gilt dann

$$_*\int_{z_0}^{z} {}_\Gamma \dot{w} d_{(E)} \zeta = A(\omega(x, y) - \omega(x_0, y_0)),$$

$$\int_{z_0}^{z} {}_\Gamma \dot{w} d_{(E)} \zeta = w(z) - E(z)\, \omega(x_0, y_0).$$

Diese Eigenschaften zusammen mit der Erklärung der hyperpseudoholomorphen Funktionen implizieren die Einführung eines Integraloperators auf $HP_D(E)$ unter Zurückführung auf die (F^i) - bzw. (G^i) - Integrabilität.

W habe in einer Umgebung von Γ die Darstellung $2W = W_F + W_G$ mit $W_F = F\Phi$ und $W_G = G\Psi$ und $(\Phi, \Psi) \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$, wobei $E = (F\, G) \in E_{D_0}$ ist. Unter dem HE - * - Integral über $2W$ längs Γ wollen wir die Beziehung

$$2_* \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(HE)} \zeta := {}_*\int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W_F d_{(F^i)} \zeta + \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W_G D_{(G^i)} \zeta$$

und unter dem HE - Integral über $2W$ längs Γ die Relation

$$2 \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W d_{(HE)} \zeta := \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W_F d_{(F^i)} \zeta + \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma W_G d_{(G^i)} \zeta$$

verstehen.

SATZ 3. *Es sei* $w = E\chi \in HP_D(E)$ *mit* $2\chi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \in H\Omega_D$; *dann gilt*

$$\text{(i)} \quad 2_* \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma w d_{(HE)} \zeta = \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma (\Phi + \Psi)\, d\zeta,$$

$$\text{(ii)} \quad 2 \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma w d_{(HE)} \zeta = E(z) \int_{z_0}^{z} {}_\Gamma \chi\, d\zeta.$$

Für die nicht schwierigen aber platzraubenden Beweise sei auf [14] verwiesen.

4. Integralsätze.

Wir wollen versuchen, den Cauchy'schen Integralsatz und die Cauchy'sche Integralformel für die hyperpseudoholomorphen Funktionen zu verallgemeinern.

SATZ 4. *Es sei D_0 ein endliches Gebiet der komplexen Ebene, es sei $E \in E_{D_0}$, es sei $D \subset\subset D_0$ und es sei*

$$HP_D(E) \ni 2\, w = w_F + w_G \in P_D(F^i) \oplus P_D(G^i);$$

ist dann $D^* \subset\subset D$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit rektifizierbarem Rand, so gilt

$$\text{(i)} \quad {}_*\!\!\int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = 0; \qquad \text{(ii)} \quad \int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = 0.$$

Beweis. Ist $w = E\chi$ mit komponentenweise holomorphen χ auf $\overline{D}^*$, so gilt

$$\int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} \chi(\zeta)\, d\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also gilt nach Definition des HE-$*$-Integrals bzw. des HE-Integrals

$$\text{(i)} \quad {}_*\!\!\int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = (11) \int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} \chi(\zeta)\, d\zeta = 0$$

bzw.

$$\text{(ii)} \quad \left| \int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta \right| \leqq \sup_{z \in D_0} |E(z)| \cdot \left| \int\limits_{Fr\, D^* \ni \zeta} \chi(\zeta)\, d\zeta \right| = 0\ (^5).$$

Eine Erweiterung dieses Satzes beinhaltet die folgende Aussage.

KOROLLAR 2. *Es sei $D \subset\subset D_0$ wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene und es sei w eine hyperpseudoholomorphe Funktion modulo E in D und es sei w auf dem rektifizierbaren Rand von D noch stetig; dann gilt*

(5) $\sup_{z \in D_0} |E(z)| := \left(\sup_{z \in D_0} |F(z)| \ \sup_{z \in D_0} |G(z)| \right).$

$$\text{(i)} \quad {}_*\int_{Fr\,D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \int_{Fr\,D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = 0.$$

Beweis. Zum Beweis approximiert man das HE - * - Integral bzw. das HE - Integral längs FrD durch einfach geschlossene Kurven in D; dann ergibt sich die Aussage aus dem vorigen Satz.

KOROLLAR 3. *Es sei D ein endliches Gebiet und $D_R \subset\subset D_0$ ein Ringgebiet in D; wird dann $F\,r\,D_R$ durch die beiden disjunkten, rektifizierbaren und einfach geschlossenen Kurven Γ_1 und Γ_2 repräsentiert und ist $w = E\,\chi \in HP_{D_R}(E)$, so gilt bei geeigneter Orientierung von Γ_1 und Γ_2 und $w \in C\,(F\,r\,D_R)$*

$${}_*\int_{\Gamma_1} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = {}_*\int_{\Gamma_2} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta.$$

Es sei unter den Voraussetzungen des vorigen Korollars z ein beliebiger Punkt auf $\Gamma_1 = \Gamma_1(z)$ und $\Gamma = \Gamma(z)$ eine einfach geschlossene Kurve in D_R, die z enthält, und die wir uns wie $\Gamma_1(z)$ von z bis z in geeigneter Orientierung durchlaufend denken. Dann gilt noch

KAROLLAR 4. *Unter den gemachten Voraussetzungen ist*

$$\int_{\Gamma_1(z)} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = \int_{\Gamma(z)} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta.$$

Beweis. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zum E - * - Integral bzw. zum HE - * - Integral das E - Integral und somit das HE - Integral kein additives Funktional des Integrationsweges ist. Bei Berücksichtigung von Satz 3 gilt dann allerdings unter den vereinbarten Voraussetzungen

$$\int_{\Gamma_1(z)} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta = E(z) \int_{\Gamma_1} \chi(\zeta)\, d\zeta = E(z) \int_{\Gamma} \chi(\zeta)\, d\zeta = \int_{\Gamma(z)} w(\zeta)\, d_{(HE)}\, \zeta.$$

Wie in der klassischen Funktionentheorie lässt sich der Cauchy'sche Integralsatz auf Gebiete verallgemeinern, in denen w bis auf endlich viele Stellen, in denen w noch beschränkt ist, hyperpseudoholomorph ist.

SATZ 5. *Es seien aus dem einfach zusammenhängendem Gebiet mit rektifizierbarem Rand $D \subset\subset D_0$ die endlich vielen Punkte*

$z_1, z_2, \dots, z_n$ ausgenommen, es sei $w = E\chi \in H\colon HP_{D \cup_{\nu=1}^{n} \{z_\nu\}}(E)$ und es sei w für hinreichend kleine δ_ν in $K_\nu\colon = \{z; |z - z_\nu| < \delta_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, beschränkt; dann gilt

$$\text{(i)} \quad {}_*\!\!\int_{Fr\, D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\zeta = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \int_{Fr\, D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\zeta = 0.$$

Beweis. Im ersten Fall haben wir einfach den klassischen Fall vor uns. Für den zweiten Fall überlegen wir, dass

$$\left| \int_{Fr\, D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\zeta \right| \leqq \max_{z \in D_0} |E(z)| \cdot \left| \int_{Fr\, D \ni \zeta} \chi(\zeta)\, d\zeta \right| =$$

$$= \max_{z \in D_0} |E(z)| \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{n} \int_{Fr\, K_\nu \ni \zeta} \chi(\zeta)\, d\zeta \right| = 0$$

gilt, wenn wir $\bigwedge_{\nu=1}^{n}$ die δ_ν so klein wählen, dass $K_\nu \subset\subset D$ und die $\bar{K}_\nu$ paarweise disjunkt sind.

Wir können auch

$$\left| \int_{Fr\, D \ni \zeta} w(\zeta)\, d_{(HE)}\zeta \right| \leqq \max_{z \in \bar{D}} |\chi(z)| \cdot \left| \int_{Fr\, D \ni \zeta} E(\zeta)\, d_{(HE)}\zeta \right| = 0$$

schliessen (6).

SATZ 6. *Es sei $D \subset\subset D_0$ ein beschränktes Gebiet der komplexen Ebene, es sei $w = E\chi \in HP_D(E)$ und es sei $D^* \subset\subset D$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit rektifizierbarem Rand; dann gilt*

$$\text{(i)} \quad \bigwedge_{z_0 \in D^*} {}_*w(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\; {}_*\!\!\int_{Fr\, D^* \in \zeta} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d_{(HE)}\zeta$$

$$\text{(ii)} \quad \bigwedge_{z_0 \in D^*} w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{Fr\, D^* \to \{z_0\}} \int_{Fr\, D^* \ni \zeta} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d_{(HE)}\zeta.$$

(6) Sind die Komponenten von $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Phi\\ \Psi\end{pmatrix}$ Konstanten, so schreiben wir γ. $E\gamma$ heisst eine verallgemeinerte Konstante; vgl. [11]. $E\gamma$ ist hyperpseudoholomorph in ganz D; die Relation folgt dann unter Berücksichtigung von Satz 2.

Beweis. (i) Nach Satz 3 gilt für $w=E\chi$ (6).

$$ {}_*\int_{Fr\,D^*\ni\zeta} \frac{w(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d_{(HE)}\zeta = \int_{Fr\,D^*\ni\zeta} \frac{\Phi(\zeta)+\Psi(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta\,; $$

wegen $HP_D(E)\ni 2w = w_F + w_G \in P_D(F^i)\oplus P_D(G^i)$ und $2_*\,w(z_0) = {}_*w_F(z_0)+{}_*w_G(z_0)=\Phi(z_0)+\Psi(z_0)$ folgt die Behauptung.

(ii) Es sei z ein beliebiger Punkt auf dem Rand von D^* und $\Gamma=\Gamma(z)$ der Weg von z bis z längs $Fr\,D^*$ in positiver Orientierung; dann gilt nach Satz 3

$$ \int_{\Gamma(z)} \frac{w(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d_{(HE)}\zeta = E(z)\int_{\Gamma} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta = 2\pi i\, E(z)\,\chi(z_0). $$

Da $\Gamma=\Gamma(z)$ nullhomotop ist, ist alles bewiesen.

(6) $H\,\Omega_D \ni \chi=\frac{1}{2}\binom{\Phi}{\Psi} \in P_D(A)\times P_D(A)$.

LITERATUR

[1] BERS L., *Theory of pseudo-analytic functions,* New York University, 1953.

[2] BERS L., *Local theory of pseudo-analytic functions,* Lectures on Functions of a Complex Variable, University of Michigan Press, 1955, 213-244.

[3] FILIMONOVA I. I., *Über eine Reihenentwicklung verallgemeinerter analytischer und quasi-analytischer Funktionen auf geschlossenen Riemann'schen Flächen,* Soobscenija Akad. Nauk Gruzin. SSR 66, 1972, 533-536, Russisch mit engl. Zusammenfassung.

[4] HABETHA K., *Über die Wertverteilung pseudoanalytischer Funktionen,* Ann. Acad. Sci Fennicae, Ser AI 406, 1967, 20 S.

[5] HABETHA K., *Zum Phragmén - Lindelöf'schen Prinzip bei quasi-holomorphen und pseudoanalytischen Funktionen,* Appl. Analysis 2, 1972, 169-185.

[6] METHIEV G. D., *Abschätzungen in Klassen schlichter pseudoanalytischer Funktionen,* Akad. Nauk Azerbaidz. SSR, Doklady 24, No. 7, 1968, 3-5 Russisch.

[7] PETRIDIS N., *On pseudoanalytic mappings,* Praktika Akad. Athen 37, 1962, 179-191.

[8] PROTTER N. H., *The periodicity problem for pseudoanalytic functions,* Ann. of Math. (2), Vol. 64, 1956, 154-174.

[9] TUTSCHKE W., *Über das Wertnahmeproblem gewisser verallgemeinerter analytischer Funktionen,* Monatsber. Deutsch Akad. Wiss Berlin 7, 1965, 610-615.

[10] TUTSCHKE W., *Pseudoholomorphe Exponentialfunktionen,* Wiss. Beitr Martin Luther Universität, Halle-Wittenberg, R. M. 1970, No. 1 (M 2), 1971, 115-121 und Beitr. Analysis 1, 1971, 115-121.

[11] VEKUA J. N., *Verallgemeinerte analytische Funktionen,* Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

[12] WITHALM C., *Der Hauptzweig pseudoanalytischer Funktionen,* Mathematica Balkanica 3.77, 1973, 605-609.

[13] WITHALM C., *Über algebraische Strukturen pseudoanalytischer Funktionen,* Glasnik Matematicki, voraussichtlich 9, 1974, No. 2.

[14] WITHALM C., *Über die Begründung der Theorie der hyperpseudoholomorphen Funktionen,* Mathematica Balkanica, 1974, erscheint demnächst.