LA TEORIA DI MORSE NEGLI SPAZI DI BANACH (*)

di Adele Manes (a Pisa) (**)

Sommario. - *Si propone una via più semplice, basata sull'impiego di una duplice norma, per estendere la teoria di Morse alle varietà modellate su spazi di Banach.*

Summary. - *We propose a simple way, based on the use of a double norm, to extend Morse theory at the varieties modelled on Banach spaces.*

Introduzione.

Negli ultimi anni sono state proposte varie vie per estendere la teoria di Morse alle varietà modellate su spazi di Banach ([3], [4], [5]). Una tale estensione corrisponde ad una esigenza profonda della teoria; infatti, è stato dimostrato che l'imporre la differenziabilità secondo Fréchet nella norma hilbertiana pone dei vincoli molto stretti ai funzionali tipici del calcolo delle variazioni. In particolare Skrypnik ([7]) ha dimostrato che il funzionale

$$I(u)=\int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)\, dx \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

con $f(x, p, q)$ definita su $\bar{\Omega}\times \mathbb{R}\times \mathbb{R}^n$, continua in x e due volte differenziabile con continuità in p e q, è differenziabile due volte secondo

(*) Pervenuto in Redazione il 10 dicembre 1974.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica « L. Tonelli » - Via Derna 1 - 56100 Pisa.

Fréchet nell'origine se e solo se

$$f(x, 0, q) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, q_i\, q_j + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, q_i + c(x).$$

Dunque non è sempre possibile, ai fini della teoria dei punti critici, dotare una varietà di quella struttura hilbertiana che nell'ambito della teoria di Morse si presenterebbe più spontanea.

In questo lavoro viene proposta una via che appare più semplice e naturale, basata sull'impiego di una duplice norma: una norma che, in generale, è strettamente più fine, per mezzo della quale è definita la struttura della varietà, una seconda norma, hilbertiana, che è introdotta dallo stesso differenziale secondo e che viene utilizzata solo localmente. Nella prima parte del lavoro (1., 2.) si mostra come si può generalizzare la definizione di punto critico non degenere al caso degli spazi di Banach e come si può attribuire ad esso un indice; nella seconda parte (3., 4.) si calcolano i gruppi di Morse e si applica il risultato ad un esempio tipico.

1. Esponiamo qui un risultato di carattere generale che sarà utile nel seguito.

Sia X uno spazio di Banach ed $a(x, y)$ una forma bilineare simmetrica definita su $X \times X$.

Def. 1. Diremo indice della forma bilineare simmetrica $a(x, y)$ la massima dimensione delle varietà lineari su cui la forma quadratica corrispondente $a(x, x)$ risulta definita negativa.

Prop. 1. Sia $a(x, y)$ una forma bilineare simmetrica definita su X; se l'indice di $a(x, y)$ è finito, esistono due varietà lineari chiuse $V \subset X$ e $W \subset X$ tali che:

(i) $X = V \oplus W$

(ii) $a(x, y) = 0$ per ogni $x \in V$ e per ogni $y \in W$.

Inoltre le proiezioni P_V e P_W di X su V e W rispettivamente sono continue.

Dim.: Sia V una varietà lineare massimale su cui la forma $a(x, x)$ risulti definita negativa; consideriamo la varietà:

$$W = \{ y \in X : a(x, y) = 0 \ \ \forall x \in V \}$$

Le varietà V e W così definite sono chiuse e verificano chiaramente la proprietà (ii).

È ovvio inoltre che $V \cap W = \{0\}$.

Per completare la dimostrazione, occorre vedere che se $\bar{x}$ è un qualunque elemento di X è possibile trovare $\bar{v} \in V$ e $\bar{w} \in W$ tali che $\bar{x} = \bar{v} + \bar{w}$.

Sia $\bar{x} \in X$, l'applicazione $v \to a(v, \bar{x})$ è un funzionale lineare definito su V; essendo la forma quadratica $a(x, x)$ definita negativa su V, ogni funzionale in V si può rappresentare con $v \to a(v, \bar{v})$, dove $\bar{v}$ è un opportuno elemento di V. Allora se consideriamo $\bar{w} = \bar{x} - \bar{v}$ avremo $a(v, \bar{w}) = a(v, \bar{x}) - a(v, \bar{v}) = 0$ per ogni $v \in V$, quindi $\bar{w} \in W$; inoltre $\bar{x} = \bar{v} + \bar{w}$.

Avendo notato che V e W sono chiusi, l'ultima asserzione è ben nota.

PROP. 2. Sia $a(x, y)$ una forma bilineare simmetrica definita su X, di indice finito. Siano V e W due varietà lineari chiuse tali che

(i) $X = V \oplus W$

(ii) $a(x, y) = 0$ per ogni $x \in V$ e per ogni $y \in W$.

(iii) $a(x, x) < 0$ per ogni $x \in V$ $x \neq 0$, $a(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in W$.

Allora l'indice della forma bilineare $a(x, y)$ coincide con la dimensione di V.

DIM.: Sia S una qualsiasi varietà lineare su cui la forma $a(x, y)$ risulta definita negativa. Vediamo che la proiezione P_V di X su V applica in modo iniettivo S in V; infatti per ogni $x \in X$ si ha

$$a(x, x) = a(P_V x, P_V x) + a(P_W x, P_W x).$$

Se $x \in S$ $x \neq 0$, è $a(x, x) < 0$, mentre è necessariamente $a(P_W x, P_W x) \geq 0$.

Dunque è $a(P_V x, P_V x) < 0$, perciò $P_V x \neq 0$: ciò basta appunto a garantire l'iniettività. Allora $\dim(S) \leq \dim(V)$. D'altra parte su V la forma è definita negativa, dunque l'indice di $a(x, y)$ deve coincidere con la dimensione di V.

2. Sia U un aperto di uno spazio di Banach X e f un funzionale di classe C^1 definito in U. Come è noto $x_0 \in U$ è detto punto critico se

$f'(x_0)=0$; $c=f(x_0)$ è detto livello critico. Poniamo

$$U^-=\{x\in U:\ f(x)\leq c\}$$

e introduciamo i gruppi di omologia singolare relativa, a coefficienti in un fissato gruppo abeliano G: $H_n(U^-, U^- - \{x_0\})$. Questi gruppi saranno detti gruppi di Morse relativi al punto critico x_0.

Osserviamo che presa una qualunque palla $B_\delta=\{x:\ \|x-x_0\|\leq\delta\}$ contenuta in U, si ha, per ogni n,

$$(1)\qquad H_n(U^-, U^- - \{x_0\}) \approx H_n(U^- \cap B_\delta,\ U^- \cap B_\delta - \{x_0\}).$$

Infatti, se indichiamo con $\widehat{B}_\delta$ il complementare di B_δ in U, basta applicare la proprietà di excisione, osservando che $U^- \cap B_\delta = U^- - U^- \cap \widehat{B}_\delta$ e che $U^- - \widehat{B}_\delta$ ha la sua chiusura interna a $U^- - \{x_0\}$ (rispetto alla topologia indotta in U^-). Supponiamo ora che f ammetta differenziale secondo nel punto x_0; questo è una forma bilineare simmetrica definita su $X\times X$, che può essere rappresentata così: $(x, y)\rightarrow\langle f''(x_0)\,x, y\rangle$ (1) dove $f''(x_0)$ è un operatore di X in X^*.

DEF. 2. Diremo indice del punto critico x_0 l'indice della forma $\langle f''(x_0)\,x, y\rangle$.

Nell'ipotesi che l'indice del punto x_0 sia finito, la Prop. 1. ci assicura che esistono due sottospazi chiusi di X, V e W, tali che:

(i) $V\oplus W=X$

(ii) per ogni $x\in V$ ed ogni $y\in W$ si ha $\langle f''(x_0)\,x, y\rangle=0$.

Ricordiamo che V è un sottospazio di dimensione massima su cui la forma $\langle f''(x_0)\,x, x\rangle$ è definita negativa, mentre il sottospazio W corrispondente è univocamente determinato come segue:

$$W=\{x\in X:\ \langle f''(x_0)\,x, y\rangle=0 \text{ per ogni } y\in V\}.$$

Allora ponendo $v=P_V\,x$ e $w=P_W\,x$, dalla (ii) segue

$$\langle f''(x_0)\,x, x\rangle=\langle f''(x_0)\,v, v\rangle+\langle f''(x_0)\,w, w\rangle.$$

(1) Con $\langle\ ,\ \rangle$ si è indicata la dualità fra X e X^*.

Osserviamo che in generale sarà $\langle f''(x_0) w, w \rangle \geq 0$.

DEF. 3. Diremo che x_0 è un punto critico « non degenere » per f se la forma quadratica $\langle f''(x_0) x, x \rangle$ risulta definita positiva su W (2).

Consideriamo ora la funzione a valori reali

$$x \to \langle f''(x_0) w, w \rangle - \langle f''(x_0) v, v \rangle = [x]^2 \text{ (3)}; \tag{2}$$

questa è una forma quadratica ottenuta « raddrizzando » il differenziale secondo in x_0.

Se x_0 è « non degenere », il fatto che la forma quadratica $\langle f''(x_0) x, x \rangle$ risulti definita positiva su W equivale al fatto che il funzionale $[x]$ definito in (2) è una norma che definisce in X una struttura pre-hilbertiana. Inoltre la definizione data comporta che l'operatore $x \to |f''(x_0)|\, x$ di X in X^* è iniettivo, avendo indicato con $|f''(x_0)|$ l'operatore associato alla forma « raddrizzata ».

È interessante notare anche che se X è uno spazio di Hilbert, un punto critico non degenere secondo la definizione consueta è « non degenere » anche secondo la definizione 3.

Infatti se x è non degenere, l'operatore A, associato alla forma quadratica $\langle f''(x_0) x, x \rangle$ secondo il prodotto scalare di X, è invertibile. Allora lo spettro di A non contiene lo zero e quindi possiamo decomporre X nella somma diretta dei due sottospazi V e W associati rispettivamente alla parte negativa e alla parte positiva dello spettro di A; indichiamo con P_V e P_W le corrispondenti proiezioni.

Possiamo porre $A = |A| \operatorname{sgn} A$, tenendo presente che $\operatorname{sgn} A = P_W - P_V$ è ben definita dato che lo zero non appartiene allo spettro di A.

Allora si può scrivere:

$$(Ax, x) = (|A| \operatorname{sgn} Ax, x) = (|A| (P_W - P_V) x, x) =$$

$$= (|A| P_W x, x) - (|A| P_V x, x) = (|A| P_W x, P_W x) -$$

$$- (|A| P_V x, P_V x) = \| |A|^{\frac{1}{2}} P_W x \|^2 - \| |A|^{\frac{1}{2}} P_V x \|^2.$$

(2) Essendo indipendente dalla decomposizione considerata, la definizione data è una buona definizione.

(3) Si fa rilevare che la forma $[x]^2$ non è canonicamente definita, ma dipende, oltre che da f, dalla particolare decomposizione dello spazio X. Analoga osservazione per l'operatore $|f''(x_0)|$.

Osservando che se $x \in W$, $P_V x=0$ e $P_W x=x$, si ha $(Ax, x)= \| |A|^{\frac{1}{2}} x\|^2$. Allora per $x \in W$, essendo $|A|^{1/2}$ iniettiva, $(Ax, x)=0$ se e solo se $x=0$.

Quindi $(Ax, x)>0$ per ogni $x \in W$. Poiché la decomposizione ottenuta mediante lo spettro soddisfa le ipotesi della Prop. 2., la dimensione di V coincide con l'indice del punto critico; quindi il fatto che (Ax, x) sia definita positiva su W assicura che x_0 è un punto critico « non degenere » secondo la definizione 3..

3. Ci proponiamo ora di calcolare i gruppi di Morse per un punto critico « non degenere ».

Consideriamo un funzionale f di classe C^1, definito su un aperto U di uno spazio di Banach X contenente l'origine e tale che $f(0)=0$ e $f'(0)=0$. Supponiamo inoltre che f ammetta differenziale secondo in 0.

Allora il funzionale si può porre nella forma

$$f(x)=\frac{1}{2}\langle f''(0)\, x, x \rangle + r(x) \tag{3}$$

dove $r(x)$ ha differenziale primo e secondo nulli in 0.

Se 0 è « non degenere » ha senso formulare la seguente ipotesi: Ipotesi α). Comunque si prendano ν e γ reali positivi, esiste un intorno S di 0 in X tale che per ogni $x \in S$ si abbia

$$|r(x)| \leq \nu\, [x]^2 \tag{4}$$

$$|\langle R(x), y \rangle| \leq \gamma\, [x]\, [y] \tag{5}$$

dove con $\langle R(x), \cdot \rangle$ si è indicato il differenziale di r in x.

Vale il seguente teorema:

Teorema 1. Sia f un funzionale di classe C^1 definito su un aperto $U \subset X$ contenente l'origine e tale che $f(0)=0$ e $f'(0)=0$. Supponiamo che f ammetta differenziale secondo in $x=0$.

Allora se $x=0$ è un punto critico « non degenere » per f, di indice finito i e vale l'ipotesi α), si ha:

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx \begin{cases} 0 & \text{per} \quad n \neq i \\ G & \text{per} \quad n=i \end{cases}$$

dove G è il gruppo dei coefficienti dell'omologia ([4]).

([4]) Ovviamente l'avere scelto l'origine come punto critico e lo zero come livello critico non comporta alcuna restrizione.

DIM.: Poiché il punto critico ha indice finito per la Prop. 1. esistono due sottospazi chiusi $V \subset X$ e $W \subset X$, tali che valgono le proprietà (i) e (ii).

Osserviamo che essendo le proiezioni P_V e P_W continue, la decomposizione ottenuta è tale che X è omeomorfo a $V \times W$.

Siano ν e γ due numeri tali che

$$\nu < \frac{1}{2}, \quad \gamma < 1, \quad \frac{\frac{1}{2} - \nu}{\frac{1}{2} + \nu} > \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2}, \tag{6}$$

allora per l'ipotesi α) e l'osservazione precedente esiste un intorno di 0 del tipo $S_V \times S_W$, con $S_V = \{x \in V: \|x\| \leq \varepsilon_1\}$ e $S_W = \{x \in W: \|x\| \leq \varepsilon_2\}$, tale che per ogni $x \in S_V \times S_W$ valgono la (4) e la (5).

Vogliamo dimostrare che è possibile eseguire una retrazione di $S_V \times S_W$ su S_V che subordini una retrazione di $S_V \times S_W \cap U^-$ su S_V e di $S_V \times S_W \cap U^- - \{0\}$ su $S_V - \{0\}$. Tale retrazione sarà fornita dalla proiezione P_V di X su V ristretta a $S_V \times S_W$.

Consideriamo quindi l'applicazione

$$\psi: S_V \times S_W \times [0, 1] \to S_V \times S_W$$

così definita: posto $x = v + w$, $\psi(x, t) = v + (1-t)\, w$.

Poniamo inoltre

$$\varphi(x, t) = f(\psi(x, t)) = \frac{1}{2} \langle f''(0)(v + (1-t)\, w), (v + (1-t)\, w) \rangle +$$

$$+ r(v + (1-t)\, w) = \frac{1}{2} \langle f''(0)\, v, v \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} (1-t)^2 \langle f''(0)\, w, w \rangle + r(v + (1-t)\, w).$$

Vogliamo vedere se si ha $\varphi(x, t) \leq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$ ogni volta che $\varphi(x, 0) \leq 0$. Studiamo allora il segno di $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(1-t) \langle f''(0)\, w, w \rangle - \langle R(v + (1-t)\, w), w \rangle,$$

perciò, tenendo presente la (ii) e la (5) e ricordando che

$$[x]^2 = \langle f''(0)\, w, w \rangle - \langle f''(0)\, v, v \rangle,$$

si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \leq -(1-t)\, [w]^2 + \gamma\, [v+(1-t)\, w]\, [w] \leq$$

$$\leq -(1-t)\, [w]^2 + \gamma\, ([v]+(1-t)\, [w])\, [w] =$$

$$= [w]\, \{(\gamma-1)(1-t)\, [w] + \gamma\, [v]\}.$$

Perché sia $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \leq 0$ basta che si abbia

$$(\gamma-1)(1-t)\, [w] + \gamma\, [v] \leq 0. \tag{7}$$

Se questa disuguaglianza è verificata per qualche punto dell'intervallo $[0, 1]$ essa lo è in un intervallo del tipo $[0, \bar{t}]$ (con $\bar{t}<1$). In questo caso se $x \in U^-$, cioè se è $\varphi(x, 0) \leq 0$, si ha anche $\varphi(x, t) \leq 0$ per ogni $t \in [0, \bar{t}]$ e quindi $\psi(x, t) \in U^-$ per ogni $t \in [0, \bar{t}]$.

Consideriamo invece i punti di $[\bar{t}, 1]$ in cui vale la disuguaglianza opposta della (7); essendo $\gamma<1$, si ha

$$[w] < \frac{\gamma\, [v]}{(1-t)(1-\gamma)}. \tag{8}$$

Allora dalla (4) e dalla (8) segue:

$$\varphi(x, t) \leq -\frac{1}{2}[v]^2 + \frac{1}{2}(1-t)^2 [w]^2 + \nu\, [v+(1-t)\, w]^2 =$$

$$= [v]^2 \left(\nu - \frac{1}{2}\right) + (1-t)^2 \left(\nu + \frac{1}{2}\right) [w]^2 \leq [v]^2 \left(\nu - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\gamma^2 [v]^2}{(1-\gamma)^2} = [v]^2 \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2}\right) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} \right\}.$$

Quindi dalla terza delle (6) si ricava che in $[\bar{t}, 1]$ si ha sempre $\varphi(x, t) \leq 0$. Dunque l'applicazione ψ definisce una retrazione di $S_V \times S_W \cap U^-$ su S_V; si verifica immediatamente che ψ definisce anche una retrazione di $S_V \times S_W \cap U^- - \{0\}$ su $S_V - \{0\}$. Ora S_V è un intorno dell'origine in V e quindi è omeomorfo ad una palla B^i di uno spazio euclideo i-dimensionale.

Se indichiamo con S^i la frontiera di B^i, per ogni n si ha:

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx H_n(U^- \cap S_V \times S_W,\ U^- \cap S_V \times S_W - \{0\}) \approx$$

$$\approx H_n(B^i, B^i - \{0\}) \approx H_n(B^i, S^{i-1}) \approx \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq i \\ G & \text{se } n = i. \end{cases}$$

4. Diamo qui un esempio di funzionale che in generale non è differenziabile due volte secondo Fréchet nello spazio di Hilbert H_0^1 ([7]), mentre lo è nello spazio di Banach C_0^1. Dimostreremo inoltre che ad esso può essere applicato il teorema 1.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ con frontiera sufficientemente regolare. Consideriamo il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx \qquad u \in C_0^1(\Omega) \tag{9}$$

dove $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Supponiamo che per $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ la funzione $f(x, u, p)$ sia continua in x e due volte differenziabile con continuità rispetto alle variabili u e p. Supponiamo inoltre che

(10) esiste una costante positiva c tale che

$$\sum_{i,j=1}^n f_{p_i p_j}(x, 0, 0)\, \xi_i \xi_j \geq c\, |\xi|^2 \text{ per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ ed ogni } x \in \Omega.$$

Il funzionale $J(u)$ definito in (9) è differenziabile due volte secondo Fréchet nell'origine. Infatti dal momento che l'integrale è un'applicazione lineare, basta osservare che le condizioni date sono sufficienti a garantire che $f\colon u \to f(x, u, \nabla u)$, con $u \in C_0^1(\Omega)$, sia di classe C^2 ([2]).

I differenziali primo e secondo di J sono dati da:

$$v \longrightarrow \int_\Omega \left\{ f_u(x, u, \nabla u) v + \sum_{i=1}^n f_{p_i}(x, u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx = J'(u)\, v,$$

$$(v, h) \to \int_\Omega \left\{ f_{uu}(x, u, \nabla u)\, hv + \sum_{i=1}^{n} f_{up_i}(x, u, \nabla u) \frac{\partial h}{\partial x_i} v + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} f_{up_i}(x, u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} h + \sum_{i,j=1}^{n} f_{p_i p_j}(x, u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right\} dx.$$

Vediamo ora che il funzionale J verifica le ipotesi del teorema 1.. Supponiamo che

$$J'(0) = 0; \quad J(0) = 0. \tag{11}$$

Nelle ipotesi fatte si ha che 0 è per J un punto critico di indice finito. Dimostreremo infatti che l'indice di 0 coincide col numero di autovalori negativi di $\langle J''(0)\, u, u \rangle$, contati con la relativa molteplicità, che per l'ipotesi (10) sono in numero finito. Consideriamo le varietà lineari V e W associate rispettivamente alla parte negativa e alla parte positiva dello spettro di $\langle J''(0)\, u, u \rangle$ (5): osserviamo che, essendo i coefficienti della forma $\langle J''(0)\, u, u \rangle$ continui, le autosoluzioni sono di classe C^1.

Allora si ha $V \oplus W = C_0^1(\Omega)$ e quindi V e W soddisfano le ipotesi della Prop. 2.. Dunque l'indice del punto critico 0 coincide con dim (V).

Osserviamo inoltre che, se indichiamo con λ_n gli autovalori positivi e con u_n le rispettive autosoluzioni, per $u \in W$ si può scrivere $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ con $c_i \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\langle J''(0)\, u, u \rangle = \left\langle J''(0) \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i, \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \right\rangle = \tag{12}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_i (u_i, u_i)_{H_0^1} \geq \min \lambda_i \| u \|^2_{H_0^1} > 0.$$

Da ciò segue che 0 è « non degenere ».

Per poter applicare il teorema 1 resta da verificare l'ipotesi α). Possiamo scrivere $r(u)$ nella forma:

$$r(u) = \int_0^1 (1-t) \langle [J''(tu) - J''(0)]\, v, v \rangle\, dt = \tag{13}$$

(5) Zero non è autovalore per $\langle J'(0)\, u, u \rangle$.

$$= \int_0^1 (1-t) \int_\Omega \Big\{ [f_{uu}(x, tu, t\nabla u) - f_{uu}(x, 0, 0)]\, u^2 + 2 \sum_{i=1}^n [f_{up_i}(x, tu, t\nabla u) +$$

$$- f_{up_i}(x, 0, 0)] \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \sum_{i,j=1}^n [f_{p_i p_j}(x, tu, t\nabla u) +$$

$$- f_{p_i p_j}(x, 0, 0)] \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\} \, dx \, dt.$$

Ora, poiché $f_{uu}, f_{up_i}, f_{p_i p_j}$ sono continue uniformemente rispetto ad x al variare degli argomenti in un insieme limitato, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare δ tale che se $\|u\|_{C_0^1} < \delta$ si ha:

$$\sup_{x \in \Omega} | f_{uu}(x, tu, t\nabla u) - f_{uu}(x, 0, 0) | \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis} \Omega},$$

$$\sup_{x \in \Omega} | f_{up_i}(x, tu, t\nabla u) - f_{up_i}(x, 0, 0) | \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis} \Omega} \qquad \text{per ogni } i, 1 \le i \le n, \tag{14}$$

$$\sup_{x \in \Omega} | f_{p_i p_j}(x, tu, t\nabla u) - f_{p_i p_j}(x, 0, 0) | \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{mis} \Omega} \qquad \text{per ogni } i \text{ e } j, \; 1 \le i \le n, \; 1 \le j \le n.$$

Allora, tenendo presente (12) e (14) si ha:

$$|r(u)| \le \varepsilon \int_0^1 (1-t) \int_\Omega \Big\{ u^2 + 2 \sum_{i=1}^n \Big| u \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big| + \sum_{i,j=1}^n \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big| \Big\} \, dx \, dt \le \varepsilon K_0 \|u\|^2_{H_0^1} =$$

$$= \varepsilon K_0 \{ \|v\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} \} \le \varepsilon K_0 \{ K_1 (- \langle J''(0) v, v \rangle) + K_2 \langle J''(0) w, w \rangle \} \le$$

$$\le \varepsilon K_0 \max (K_1, K_2) (- \langle J''(0) v, v \rangle + \langle J''(0) w, w \rangle) = \nu [u]^2$$

essendo K_0, K_1, K_2 costanti opportune e avendo scelto $\varepsilon = \dfrac{\nu}{K_0 \max(K_1, K_2)}$.

In tal modo si è verificata la (4); vediamo ora la (5).

Dalla (13) si ha:

$$\langle R(u),h\rangle = 2\int_0^1 (1-t)\langle [J''(tu)-J''(0)]\,u,h\rangle\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 (1-t)\int_\Omega \Big\{[f_{uu}(x,tu,t\nabla u)-f_{uu}(x,0,0)]hu + \sum_{i=1}^n [f_{up_i}(x,tu,t\nabla u) -$$

$$- f_{up_i}(x,0,0)]\,\frac{\partial h}{\partial x_i}\,u + \sum_{i=1}^n [f_{up_i}(x,tu,t\nabla u) - f_{up_i}(x,0,0)]\frac{\partial u}{\partial x_i}\,h +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n [f_{p_ip_j}(x,tu,t\nabla u) - f_{p_ip_j}(x,0,0)]\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\}\,dx\,dt\,.$$

Quindi per (12) e (14), analogamente a quanto è stato fatto per verificare (4) si ha:

$$|\langle R(u),h\rangle| \leq 2\varepsilon\int_0^1 (1-t)\int_\Omega \Big\{|uh| + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\,u\right| + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\,h\right| +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\Big\}\,dx\,dt \leq \varepsilon K_0 \,\|u\|_{H_0^1}\,\|h\|_{H_0^1} \leq \varepsilon\, K[u][h]$$

con K_0, K costanti opportune.

Tutte le ipotesi del teorema 1. sono pertanto verificate.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. RIESZ et B. SZ. NAGY: *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Budapest, 1952.

[2] G. PRODI - A. AMBROSETTI: *Analisi non lineare,* Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973.

[3] R. PALAIS: *The Morse lemma for Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), pp. 268-271.

[4] K. UHLENBECK: *Morse Theory on Banach Manifolds,* J. Funct. Anal., 10 (1972), pp. 430-445.

[5] A. J. TROMBA: *The Morse lemma on Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 34 (1972), pp. 396-402.

[6] A. J. TROMBA: *The Morse lemma on arbitrary Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) pp. 85-86.

[7] I. V. SKRYPNIK: *On the application of Morse's method to nonlinear elliptic equations,* Soviet Math. Dokl. 13 (1972), pp. 202-205.