

LE PROBLEME DE PIZZARELLO SUR LES SOUS-ESPACES GEOMETRIQUES D'UN ESPACE DE PERMUTTI (*)

par ANDRÉ BATBEDAT (à Montpellier) (**)

SOMMARIO. - *Questo studio riguarda i sottospazi geometrici di uno spazio generalizzato di Permutti [1]. Si assegnano delle condizioni affinché questi siano i sottospazi algebrici massimali per un rango fissato.*

SUMMARY. - *This note concerns the geometric subspaces of the generalized space of Permutti [1]. We assign conditions for these subspaces to be maximal algebraic subspace for a given rank.*

Introduction.

Dans [6] G. Pizzarello considère un espace de Permutti [5] sur un anneau A associatif, unitaire, et sans diviseurs de zéro vérifiant les propriétés (α) et (β) suivantes:

(α) : Tout idéal à droite de A est principal (ou monogène);

(β) : Toute paire d'éléments non nuls admet un P. G. C. D. (plus grand commun diviseur pour la divisibilité à droite: α divise β si $\beta = \beta' \alpha$).

Il affirme (théorème IX) que chaque sous-espace géométrique engendré par m points indépendants est un sous-espace algébrique de rang m maximal. Mais nous avons montré ([2], chapitre VIII, page 67) que la preuve de ce théorème n'est pas satisfaisante...

(*) Pervenuto in Redazione il 15 ottobre 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Montpellier (France).

D'autre part il pose à la fin de son introduction la question (à laquelle il ne répond pas dans cet article) de la réciproque de ce théorème IX.

Nous-même dans [2] avons posé ce problème (aspects direct et réciproque) pour des structures géométriques et algébriques plus générales, après que G. Pizzarello nous ait indiqué qu'à sa connaissance il n'était pas résolu pour les espaces de Permutti.

Nous apportons ici une réponse dans quelques cas importants.

1. — Position du problème.

Nous considérons un espace un *espace de Permutti généralisé* [1] encore appelé: *géométrie affine généralisée* dans [2], chapitre VIII, page 49, définition 2.

Du point de vue géométrique, un espace de Permutti généralisé E est défini à partir des notions de droite et de parallélisme reliées par des axiomes classique... En particulier E est un *espace à parallélogrammes* (trois points déterminent un unique parallélogramme) ce qui permet de mettre en évidence la structure d'espace affine sans torsion sur un anneau A isomorphe à l'anneau des homothéties de centre fixé; E est aussi un *espace à générateurs* en ce sens que chaque droite D possède un couple (k, d) de points tels que pour tout $x \in D$ il existe une homothétie de centre k appliquant d sur x . Il en résulte que E est un *espace de Sperner* [8] particulier.

Rappelons qu'un *sous-espace géométrique* de E est une partie qui avec deux points distincts x et y et une droite D , contient aussi la droite xy et la parallèle à D par x . Le *sous-espace géométrique engendré* par une partie P de E est l'intersection des sous-espaces géométriques contenant P ; une droite est engendré par deux de ses points distincts, un *plan* est engendré par trois points non alignés; d'une façon générale on appelle *m-hyperplan* le sous-espace géométrique engendré par $(m+1)$ points géométriquement indépendants (ainsi une droite est un 1-hyperplan, un plan est un 2-hyperplan, etc...).

Du point de vue algébrique, pour chaque $k \in E$, E est muni d'une structure de A -module sans torsion de zéro k , noté E_k , et qui est isomorphe au A -module associé à E ; les sous-espaces algébriques de E passant par k sont aussi les sous-modules de E_k ; on obtient ensuite tous les sous-espaces algébriques de E par des translations.

Comme dans [2], chapitre VII, page 9, définition 2, nous appelons *rang d'un sous-module* N de E_k le cardinal d'un système géné-

rateur minimal; cette notion se transporte aux sous-espaces algébriques de E . Nous disons que N est m -sous-espace lorsque c'est un sous-espace de rang m .

Le résultat suivant généralise une propriété classique dans les espaces de Permutti:

LEMME 1.1: Les droites d'un espace de Permutti généralisé sont les 1-sous-espaces maximaux.

Preuve: [1], théorème 4.2 ou [2] chapitre VIII, page 50.

La question ici posée est de *déterminer dans quelles conditions cette propriété s'étend aux m -hyperplans pour m quelconque* (précisons cependant que m est toujours supposé fini et inférieur ou égal au rang de E).

2. — Generalites.

On munit E d'un élément distingué $k \in E$.

A une partie P de E on associe le sous-espace géométrique engendré par $k \cup P$, que l'on note $(P)G$, et le sous-module de E_k engendré par P , que l'on note $(P)M$.

LEMME 2.1: Tout sous-espace géométrique de E est un sous-espace algébrique.

Preuve: [2], chapitre VIII, page 66, proposition 3.

LEMME 2.2: Soit π un m -hyperplan passant par k et (q_0, q_1, \dots, q_m) un système géométriquement générateur de π : il existe p_1, \dots, p_m qui avec k engendrent géométriquement π .

Preuve: La translation qui applique q_0 sur k conserve globalement tout sous-espace algébrique contenant q_0 et k donc (lemme 2.1) tout sous-espace géométrique contenant q_0 et k ; ainsi les sous-espaces géométriques qui contiennent q_0, \dots, q_m , sont ceux qui contiennent leurs images par cette translation.

Soit π un m -hyperplan passant par k : il possède m points p_i qui avec k l'engendrent géométriquement et un système minimal (a_j) qui l'engendre algébriquement, ce qui s'écrit: $\pi = ((p_i))G = ((a_j))M$. Comme d'autre part: $((p_i))M \subset \pi$ et $((a_j))G = \pi$, il est clair que:

PROPOSITION 2.3: Le rang d'un m -hyperplan est supérieur ou égal à m .

LEMME 2.4: (p_i) est une base du sous-module $((p_i)) M$.

Preuve: Par définition, c'est un système algébriquement générateur de $((p_i)) M$. D'autre part l'indépendance géométrique implique l'indépendance linéaire.

PROPOSITION 2.5: Pour un m -hyperplan π de rang m passant par k , tout système générateur minimal du sous-module π de E_k est une base de π .

Preuve: Ceci résulte du lemme 2.4 puisque $((a_j)) G = \pi$.

On sait que si E est un espace de Permutti, l'anneau A est un anneau à P. G. C. D., c'est-à-dire vérifie la condition (β) de l'introduction. Si E est un espace de Permutti généralisé, le module E_k possède une propriété caractéristique liée à la divisibilité (voir [1] théorème 5.3, ou [2] chapitre VIII, page 56) mais on ne sait pas si l'anneau A est à P. G. C. D. C'est cependant le cas si le module E_k est libre de rang fini ou infini; en effet soit α, β , des éléments non nuls de A , (e_i) une base de E_k , $a = e_1 \alpha \oplus e_2 \beta$ et d un générateur de la droite ka pour lequel $a = d \delta$: δ est un P. G. C. D. de $\{\alpha, \beta\}$. Réciproquement si A est un anneau de P. G. C. D., G un A -module libre de rang fini ou infini et a un élément de G distinct du zéro k , de composantes (α_i) il existe un P. G. C. D. des α_i non nuls donc un générateur de la droite ka . En résumé:

PROPOSITION 2.6: Si l'espace de Permutti généralisé E est algébriquement libre, l'anneau associé est à P. G. C. D.

Si G est un module libre sur un anneau à P. G. C. D., c'est canoniquement un espace de Permutti généralisé.

PROPOSITION 2.7: Soit E un espace de Permutti généralisé sur l'anneau A : s'il existe $m > 1$ et un m -hyperplan π de rang m , alors A est un anneau à P. G. C. D.

Preuve: Par la proposition 2.5, π est un espace de Permutti sur le même anneau A .

3. — Lorsque A possède un corps des quotients à droite.

Lorsque l'anneau A possède un corps des quotients à droite K , le A -module E_k se plonge dans un K -espace vectoriel V , les droites E sont les traces des droites de V (traces à plus d'un élément) et les relations de parallélisme sont canoniquement reliées (voir [2], chapitre VIII, page 50).

Nous posons:

AXIOME C Q: L'anneau A possède un corps des quotients à droite.

On sait que l'axiome C Q est vérifié si et seulement si pour tous α, β , non nuls, il existe α' et β' tels que: $\alpha \alpha' = \beta \beta' \neq 0$. Ajoutons que nous avons donné dans [2], chapitre VIII, page 51, une interprétation géométrique de cette propriété sous la forme du *théorème de Pappus très généralisé pour E*.

On démontre facilement le lemme suivant de réduction au même dénominateur:

LEMME 3.1: Sous l'axiome C Q, pour toute famille $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, d'éléments de K il existe un ε non nul dans A pour lequel tous les $\lambda_i \varepsilon$ sont dans A .

LEMME 3.2: Sous l'axiome C Q, tout m -hyperplan π de E passant par k est la trace du sous-espace vectoriel π' de dimension m qu'il engendre dans V .

Preuve: Soit k, p_1, \dots, p_m , un système géométriquement générateur pour π , π' le sous-espace vectoriel de V engendré par les p_i et $N = \pi' \cap E$ la trace de π' sur E : N est un sous-espace géométrique de E ([2], chapitre VIII, page 66) contenant k, p_1, \dots, p_m ; donc aussi $\pi = ((p_i)) G$. Les p_i sont linéairement indépendants dans V sans quoi ils seraient linéairement dépendants dans E (lemme 3.1) ce qui n'est pas (lemme 2.4); (p_i) est donc une base de π' . Ceci étant, un élément a de N s'écrit comme une somme de $p_i \lambda_i$ avec les λ_i dans K et le lemme 3.1 montre que $a \varepsilon$ est dans π ; alors a est dans π parce qu'il est sur une droite de π .

On en déduit les

THÉORÈME 3.3: Soit E un espace de Permutti généralisé qui vérifie l'axiome C Q et π un m -hyperplan géométriquement engendré

par k, p_1, \dots, p_m : π est la réunion des droites passant par k et un point de $((p_i)) M$, distinct de k .

THÉORÈME 3.4: Soit E un espace de Permutti généralisé qui vérifie l'axiome CQ : l'inclusion entre m -hyperplans (m fixé) implique l'égalité

COROLLAIRE 3.6: Un espace de Permutti de rang n qui vérifie l'axiome CQ est l'unique n -hyperplan.

En particulier, un espace d'Everett [4] qui vérifie l'axiome CQ est l'unique plan (et l'on sait qu'il n'y a pas d'hyperplans d'ordre supérieur).

Soit A^2 un espace d'Everett (ne vérifiant pas l'axiome CQ) avec la base (e_1, e_2) et le zéro k : si π est un plan de A^2 passant par k et distinct de A^2 , pour tout point a de A^2 les parallèles par a aux droites $k e_1$ et $k e_2$ ne peuvent pas être contenues dans π et par conséquent ne peuvent pas rencontrer π en un autre point que a .

4. — D'autres axiomes.

Pour un espace de Permutti généralisé, l'axiome d'existence d'un couple générateur sur chaque droite peut être présenté en termes algébriques, c'est-à-dire remplacé par le suivant ([2], chapitre VIII, page 49):

AXIOME R_1 : Toute droite est de rang 1.

On possède des exemples où tous les autres axiomes sont vérifiés sauf celui-ci. Nous posons ici:

AXIOME R_m : Tout m -hyperplan est de rang m .

LEMME 4.1: Soit r un entier positif, fini avec $r \leq \text{rang}(E)$; si pour tout $m \leq r$ l'axiome R_m est vérifié, alors pour tout $m \leq r$ les m -sous-espaces maximaux de E sont des m -hyperplans.

Preuve: Soit N un m -sous-espace maximal avec le système générateur minimal k, c_1, \dots, c_m : $(N)G$ (paragraphe 2) est un m' -hyperplan pour un certain $m' \leq m$ car $(N)G = ((c_j))G$. Si $m' = m$, $(N)G$ qui est un m -sous-espace contenant N est égal à N ; si $m' < m$, il existe un m -sous-espace (par exemple un m -hyperplan) qui contient strictement $(N)G$ donc aussi N ce qui est absurde.

AXIOME $U m$: Il existe un *unique* m -hyperplan passant par $(m+1)$ points indépendants.

L'axiome $U 1$ est un des axiomes de base des espaces de Permutti généralisés.

LEMME 4.2: Sous les axiomes $R m$ et $U m$ (pour m fixé) les m -hyperplans de E sont *des* m -sous-espaces maximaux.

Preuve: Soit π un m -hyperplan passant par k et N un sous-module de E_k avec un système générateur minimal (c_i) à m éléments: si N contient strictement π il existe un c_j en dehors de π donc $(N)G = ((c_j))G$ est un m -hyperplan ce qui est impossible par $U m$.

THÉORÈME 4.3: Soit E un espace de Permutti généralisé et r un entier positif, fini avec $r \leq \text{rang}(E)$; les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) Pour tout $m \leq r$, les m -hyperplans de E sont *des* m -sous-espaces maximaux;
- ii) Pour tout $m \leq r$, les axiomes $R m$ et $U m$ sont vrais;
- iii) Pour tout $m \leq r$, les m -hyperplans de E sont *les* m -sous-espaces maximaux.

Preuve: i) implique ii) car les m -hyperplans sont de rang m et l'inclusion pour m fixé entraîne l'égalité. Les lemmes 4.1 et 4.2 montrent que ii) implique iii). Enfin iii) implique trivialement i).

Ce théorème met en évidence les deux axiomes $R m$ et $U m$. Pour le problème posé, l'axiome $R m$ est évident. Quant à l'axiome $U m$ on conviendra qu'il est très naturel pour une géométrie proche de la géométrie classique. Remarquons aussi l'équivalence de sens pour ce contexte des articles *des* et *les*; autrement dit si l'on prouve le théorème IX de G. Pizzarello (introduction) on établit en même temps la réciproque. Notons enfin du point de vue algébrique en liaison avec la géométrie, l'importance de la notion de m -sous-espace maximal. Dans [2], chapitre VII, pages 9, 10, 11, 12, nous avons étudié *les* m -sous-espaces maximaux d'un espace affine E' général (anneau quelconque): par le théorème de la page 11, on peut affirmer que si E' possède des m -sous-espaces maximaux pour tout $m \leq \text{rang}(E')$ alors la fonction rang, restreinte à ces sous-espaces, est croissante (du point de vue géométrique, c'est l'emboîtement convenable des hyperplans).

Revenons au cas actuel d'un espace de Permutti généralisé E ; nous posons:

AXIOME Lm : Tout m -hyperplan est libre.

L'axiome Lm signifie qu'un m -hyperplan passant par k possède une base comme sous-module de E_k ; la proposition 2.5 montre que (pour tout m) Rm implique Lm .

LEMME 4.4: Si E vérifie l'axiome CQ , les axiomes Rm et Lm sont équivalents.

Preuve: Soit π un m -hyperplan plongé dans le sous-espace vectoriel π' du lemme 3.2: π' étant de dimension m , il résulte du lemme 3.1 qu'une base de π a au plus m éléments. On termine avec la proposition 2.3.

THÉORÈME 4.5: Si E vérifie l'axiome CQ et, pour tout m , l'un des axiomes Rm ou Lm , les m -hyperplans de E sont les m -sous-espaces maximaux.

Preuve: Le théorème 3.4 montre que CQ implique Um pour tout m . On applique alors le théorème 4.3 et le lemme 4.4.

5. — Le théorème IX de G. Pizzarello dans [6].

Soit A un anneau qui vérifie les hypothèses (α) et (β) de l'introduction et G un A -module libre: G est canoniquement un espace de Permutti généralisé (proposition 2.6); c'est un espace de Permutti lorsqu'il est de rang fini.

Nous citons G. Pizzarello ([6], chapitre 1): « La (α) comporta ... che due qualsiansi elementi, entrambi non nulli, di A ammettono un comune multiplo sinistro diverso da zero »; ceci signifie que pour α, β , non nuls, il existe α' et β' pour lesquels: $\alpha \alpha' = \beta \beta' \neq 0$: c'est l'axiome CQ .

D'autre part nous référant à [3], paragraphe 3 (modules libres sur un anneau principal), exercice 2, nous obtenons à partir de l'hypothèse (α) : tout sous module de G est A -module libre; ainsi l'axiome Lm est vérifié pour tout m (\leq rang G).

Ainsi on peut appliquer le résultat du théorème 4.5.

En particulier:

THÉOREME 5.1: Le théorème IX de G. Pizzarello dans [6] est vrai. La réciproque est exacte.

Comme exemple simple d'anneau qui vérifie (α) et (β) mais qui n'est pas un corps et n'est pas commutatif, citons les *quaternions d'Hurwitz* ([7], page 98) où tout idéal à gauche et tout idéal à droite sont principaux.

6. — Anneaux a mobilité.

Soit A un anneau associatif, unitaire, (e_1, e_2) la base canonique du A -module à droite A^2 et a dans A^2 , de composantes (α_1, α_2) : si (a, b) est une autre base de A^2 , alors tout $c \in A^2$ s'écrit de manière unique $c = a\gamma + b\delta$; l'application θ de A^2 dans A définie par $(c)\theta = \gamma$, est une application linéaire qui prend la valeur 1 sur a ; si elle prend les valeurs respectives u_1 sur e_1 et u_2 sur e_2 , on voit que: $u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 = 1$. Nous posons:

CRITÈRE IGA: L'élément $a = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2$ de A^2 vérifie le critère IGA si l'idéal à gauche engendré par α_1 et α_2 est A .

Dans la suite A est un anneau à P. G. C. D. (voir les propositions 2.6 et 2.7).

THÉOREME 6.1: Soit A un (tel) anneau qui vérifie l'axiome CQ: le critère IGA est une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in A^2$ soit le premier élément d'une base de A^2 .

Preuve: A^2 étant plongé dans K^2 , on se donne $a = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2$ avec $u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 = 1$ et on considère l'application linéaire θ de K^2 dans K qui prend respectivement les valeurs u_1 sur e_1 et u_2 sur e_2 ; le noyau de θ est une droite de K^2 dont la trace sur A^2 (qui contient plus d'un point) est une droite D' de A^2 . Or pour tout $c \in A^2$, $c = a(c)\theta + (c - a(c)\theta)$ avec $(c - a(c)\theta)$ sur D' , d'où $c = a(c)\theta + d\gamma$ en désignant par d un générateur de D' . Par la proposition 2.5, (a, d) est une base de A^2 .

Pour la recherche des bases de A^2 on peut utiliser les matrices, ce qui conduit à déterminer les conditions d'inversibilité d'une matrice 2×2 ; avec cette méthode, le cas commutatif se traite de la manière classique. Le cas non commutatif est plus difficile... Ici, la méthode de la fonction coordonnées première, qui nous a été suggérée par N. Roby, s'est avérée simple et efficace.

Soit D une droite de A^2 passant par le zéro de A^2 : s'il existe une base (a, b) avec $a \in D$, le critère IGA montre que a est un générateur de D et on voit que pour tout générateur d de D , (d, b) est une base; ceci montre que dans ce contexte, c'est finalement D qui joue le rôle important.

DÉFINITION 6.2: A est un anneau à mobilité si pour toute droite D de A^2 passant par le zéro de A^2 il existe une base de A^2 dont le premier élément est dans D .

Il résulte du théorème 6.1 que:

PROPOSITION 6.3: Un anneau A qui vérifie l'axiome CQ est un anneau à mobilité si et seulement si les générateurs d'une droite quelconque de A^2 passant par le zéro de A^2 , vérifient le critère IGA .

Dans [2], chapitre VIII, page 65, nous avons qualifié de *N-principal à gauche* un anneau sans diviseurs de zéro dans lequel tout idéal à gauche de type fini est principal; on voit qu'il s'agit d'un anneau à P. G. C. D. A la suite de cette proposition 6.3 on peut dire que *tout anneau N-principal à gauche vérifiant l'axiome CQ est un anneau à mobilité*. En particulier:

COROLLAIRE 6.4: Tout anneau sans diviseurs de zéro dans lequel les idéaux à droite et les idéaux à gauche sont principaux est un anneau à mobilité.

Ainsi en est-il des quaternions d'Hurwitz (paragraphe 5) et de l'anneau Z des entiers positifs.

Terminons ce paragraphe par une remarque qui concerne l'axiome CQ : on montre facilement que tout anneau à mobilité admet un corps des quotients à gauche, par contre nous ne savons pas s'il en possède toujours un à droite.

7. — Geometrie associee a un anneau a mobilite.

A est un anneau à mobilité, donc aussi à P. G. C. D. (définition 6.2). A^n , $n > 1$, est de zéro k et rapporté à sa base canonique (e_i) ; c'est un espace de Permutti.

LEMME 7.1: Pour toute droite D de A^n , passant par k , il existe une base de A^n dont le premier élément est dans D .

Preuve: Si $n > 2$, on suppose que la propriété est vraie jusqu'à $(n-1)$ et on écarte le cas éventuel où D contient e_n . Soit d un générateur de D , de coordonnées (δ_i) auquel on associe d' de coordonnées $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, 0$, (par projection parallèlement à e_n) puis d'' un générateur de $k d'$: d'' est dans le sous-module $N = ((e_1, \dots, e_{n-1})) M$, isomorphe à A^{n-1} , donc il existe b_2, \dots, b_{n-1} , pour lesquels $(d'', b_2, \dots, b_{n-1})$ est une base de N . Ainsi $(d'', b_2, \dots, b_{n-1}, e_n)$ est une base de A^n et dans cette base: $d = d'' \alpha + e_n \beta$; le sous-module $N' = ((d'', e_n)) M$ contient d et est isomorphe à A^2 donc il existe b_n dans N' pour lequel (d, b_n) est une base de N' . Finalement (d, b_2, \dots, b_n) est une base de A^n .

Comme d est un générateur de D on peut présenter cette propriété sous la forme plus précise suivante:

LEMME 7.2: Pour toute droite D de A^n , passant par k , il existe une base (a_j) de A^n pour laquelle: $D = ((a_1)) M$ (notation du paragraphe 2).

LEMME 7.3: Pour tout m -hyperplan π de A^n passant par k , il existe une base (a_j) de A^n pour laquelle: $\pi = ((a_1, \dots, a_m)) M$.

Preuve: C'est vrai pour $m=1$ (lemme 7.2). Si $m > 1$, on suppose que c'est vrai jusqu'à $(m-1)$ et on considère le système géométriquement générateur k, p_1, \dots, p_m , de π auquel on associe le $(m-1)$ -hyperplan Γ géométriquement engendré par k, p_1, \dots, p_{m-1} : il existe une base (a_j) de A^n pour laquelle $\Gamma = ((a_1, \dots, a_{m-1})) M$ et on note $N = ((a_m, \dots, a_n)) M$. Pour la somme directe $A^n = \Gamma \oplus N$, p_m s'écrit $q' \oplus q''$, avec q'' dans N , distinct de k car p_m n'est pas dans Γ ; p_m et q' étant dans π , q'' est dans π donc la droite $k q''$ est dans π . Or, (lemme 7.2) il existe une base (b_m, \dots, b_n) de N pour laquelle b_m est sur $k q''$, par conséquent $(a_1, \dots, a_{m-1}, b_m, \dots, b_n)$ est une base de A^n pour laquelle $N' = ((a_1, \dots, a_{m-1}, b_m)) M$ est contenu dans π ; comme N' est un sous-espace géométrique qui contient k, p_1, \dots, p_m , il est égal à π .

LEMME 7.4: Pour A^n , l'inclusion entre m -hyperplans (m fixé) implique l'égalité.

Preuve: Soit Γ et π deux m -hyperplans de A^n passant par k avec Γ contenu dans π : par le lemme 7.3, π est isomorphe à A^m et il existe une base (a_j) de π pour laquelle le m -hyperplan Γ de π est égal à $((a_j)) M$; on a donc: $\Gamma = \pi$.

Rappelons que l'anneau A utilisé dans ce paragraphe est un anneau à mobilité (definition 6.2). En particulier c'est un anneau à P. G. C. D. ; nous n'utilisons pas explicitement l'axiome CQ .

THÉORÈME 7.5: Les m -hyperplans d'un espace de Permutti sur un anneau à mobilité sont ses m -sous-espaces maximaux.

Preuve: On applique le théorème 4.3, compte tenu des lemmes 7.3 et 7.4.

Soit G un A -module libre de rang infini et de zéro k : c'est canoniquement un espace de Permutti généralisé (proposition 2.6).

LEMME 7.6: Soit π un m -hyperplan de G passant par k : G se décompose en une somme directe $G' \oplus G''$ où G' contient π et est isomorphe à A^n pour un certain n fini supérieur à 1.

Preuve: Soit k, p_1, \dots, p_m un système géométriquement générateur de π et (e_j) une base de G : on prend pour G' le sous-module engendré par les e_j pour lesquels il existe un p_i dont la composante sur e_j n'est pas nulle. G' contient π car c'est un sous-espace géométrique de G .

THÉORÈME 7.6: Soit E un espace de Permutti généralisé, algébriquement libre, sur un anneau à mobilité.

Les m -hyperplans de E sont ses m -sous-espaces maximaux.

Preuve: Par le lemme 7.6 puis le lemme 7.3, l'axiome Rm est vérifié pour tout m fini. Utilisant à nouveau le lemme 7.6 on démontre et de la même manière la propriété du lemme 7.4; ainsi l'axiome Um est vrai pour tout m fini. Alors on peut appliquer le théorème 4.3.

REFERENCES

- [1] A. BATBEDAT: *Espaces de Permutti généralisés*. Même revue.
- [2] A. BATBEDAT: *Prémodules, préalgèbres et leur contexte affine*. Thèse de doctorat d'Etat, Lyon 1974.
- [3] N. BOURBAKI: *Algèbre*, Livre II, Chapitre VII. Hermann, Paris, 1952.
- [4] C. J. EVERETT: *Affine geometry of vector spaces over rings*. Duke Math. J. 9. (1942).
- [5] R. PERMUTTI: *Geometria affine su di un anello*. Atti della Accad. Naz. dei Lincei. Serie VIII (1967).
- [6] G. PIZZARELLO: *Sugli spazi affini sopra un anello*. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste (1969).
- [7] P. SAMUEL: *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, Paris, 1967.
- [8] E. SPERNER: *Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen*. J. Reine Angew. Math. 204 (1960).