ESPACES DE PERMUTTI GENERALISES (*)

par André Batbedat (à Montpellier) (**)

Sommario. - *Si presenta una algebrizzazione della Geometria affine classica in un contesto più generale di quello considerato da R. Permutti in* [9].

Summary. - *We indicate an algebrisation of the classical affine Geometry generalizing the Geometry considered by R. Permutti in* [9].

1. — Espaces a parallelogrammes.

Nous appelons ici *espace* un ensemble dont les éléments sont nommés points, muni d'une famille de parties appelées droites, avec une relation d'équivalence sur la famille des droites (le parallélisme) et qui vérifie les hypothéses suivantes:

A 1: L'ensemble a plus d'une droite;

A 2: Chaque droite a plus d'un point;

A 3: Deux points distincts déterminent une unique droite;

A 4: Axiome d'Euclide.

Pour un espace, les points sont notés a, b, c, etc. ... ; une droite est notée D, E ou encore ab quand elle est définie par a et b distincts. Les dilatations sont définies de maniére classique (voir [3] ou [9]); une homothétie est une dilatation qui posséde un point fixe (centre).

(*) Pervenuto in Redazione il 16 settembre 1974.
(**) Indirizzo dell'Autore: Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Montpellier (Francia).

L'ensemble H_k des homothéties de centre k est (pour la composition des applications) un demi-groupe simplifiable à gauche et à droite avec neutre et zéro.

Nous posons:

A 5: Pour tous a, b, c, non alignés, les parallèles à ab par c et à bc par a ont un point commun;

A 6: Théorème de Désargues (voir [3]) à supports parallèles.

Par A 5, trois points non alignés déterminent un parallélogramme puis, par A 6, trois points alignés déterminent un parallélogramme.

DÉFINITION 1.1: Un *espace à parallélogrammes* est un espace qui vérifie A 5 et A 6.

Soit P un espace à parallélogrammes: il est muni de la loi ternaire du parallélogramme qui en fait un groupe ternaire troipotent [4]; cette propriété conduit naturellement à la suivante: H_k est un anneau associatif, unitaire, sans diviseurs de zéro et P un H-espace affine sans torsion où H est un anneau isomorphe à H_k.... Dans [5] et [6] nous avons proposé deux démonstrations différentes de ce résultat mais il a été établi en 1961 par J. André [2] avec la méthode d'Artin [3].

Nous notons P^k le H-module obtenu en pointant P en k; il est muni de la somme $a+b$ qui, à $(a, b) \in P \times P$ associe le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, k, b) et de la loi externe $a\alpha$ qui, à $(a, \alpha) \in P \times H$ associe l'image de a par l'homothétie de centre k correspondant à α.

Les droites de P passant par k sont des sous-modules non triviaux de P^k tels que:

i) Leur réunion est P;

ii) L'intersection de deux d'entr'eux (distincts) est k.

Réciproquement, à partir de tout module possédant une telle famille de sous-modules on peut construire un espace à parallélogrammes: les translations du module déterminent toutes les droites et la relation de parallélisme. Lorsque le module est sans torsion, l'anneau initial se plonge dans l'anneau des homothéties de centre k (voir la preuve du théorème 4.4).

EXEMPLE 1.2: Soit K un corps, $P=K^3$ et F la famille suivante: d'une part les plans habituels dans K^3, parallèles à un plan donné et d'autre part les droites habituelles dans K^3 non contenues dans un des plans précédents: P, muni de la famille F avec la relation de parallélisme habituelle, est un espace à parallélogrammes.

Notons que l'espace de cet exemple vérifie le théorème de Désargues à supports concourants (B 6 au paragraphe 2). Pour K fini on voit qu'un des axiomes de Sperner [10] n'est pas vérifié.

2. — Des axiomes supplementaires.

Pour un espace à parallélogrammes, l'existence d'une homothétie non triviale est équivalente à l'existence de trois points distincts alignés. Ainsi un espace à parallélogrammes pour lequel chaque droite n'a que deux points correspond à une géometrie affine habituelle sur le corps $Z/2$.

Ceci étant, nous présentons pour le cas général quelques hypothèses supplémentaires éventuelles:

B 1: Deux droites sans point commun sont parallèles;

B 2: Pour tous $k, a, b,$ distincts et alignés il existe une homothétis de centre k qui applique a sur b;

B 3: Pour chaque droite D et chaque $k \in D$, il existe $d \in D$ tel que pour tout $a \in D$ il existe une homothétie de centre k qui applique d sur a (espaces à générateurs);

B 4: Pour tous $k, a, b, c,$ distincts, non alignés, avec $k, a, b,$ alignés, il existe un point commun à kc et à la parallèle à ac par b;

B 5: Sur chaque droite D et pour chaque droite E, distincte de D, sécante à D, il existe $d \in D$ tel que, quels que soient $a \in D$, $b \in E$, la parallèle à db par a soit sécante à E;

B 6: Théorème de Désargues à supports concourants.

THÉORÈME 2.1: Pour un espace à parallélogrammes:

B 1 implique B 4 implique B 5;

B 2 implique B 4, B 3 et B 6;

B 3 implique B 5;

B 4 et B 6 impliquent B 2;

B 5 et B 6 impliquent B 3.

Preuve: Les trois premières assertions se vérifient facilement; les deux dernières se démontrent comme dans [3] lorsqu'intervient un théorème de Désargues.

Les espaces à parallélogrammes vérifiant B 1 et B 6 ont été étudiés par Artin [3]: dans ce cas H est un corps et on retrouve la géométrie affine plane habituelle.

Les espaces à parallélogrammes qui vérifient seulement B 1 en constituent une généralisation examinée par André dans [1]: H est encore un corps mais l'espace vectoriel associé n'est plus nécessairement de dimension 2 (toutefois, quand cette dimension est finie elle est paire).

Les espaces à parallélogrammes respectant B 4 correspondent à la géométrie de Lenz [8] (pour un espace, B 4 implique A 5): ici aussi, H est un corps.

3. — Les espaces de Permutti.

Par les postulats 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, (et compte tenu du fait que le postulat 2.5 implique A 1) R. Permutti présente au chapitre II de [9] ce que nous avons appelé un espace.

Définition 3.1: Un *espace de Permutti* est un espace qui vérifie les postulats 2.1 à 2.7 de [9].

Proposition 3.2: Un espace de Permutti est un espace à parallélogrammes qui vérifie B 3 et le postulat 2.5.

Preuve: Le postulat 2.6 est la conjonction de B 5, A 5 et A 6; le postulat 2.7 est équivalent à B 3; enfin nous savons que B 3 implique B 5.

Cette preuve montre que dans la présentation axiomatique d'un espace de Permutti par les postulats de [9] on peut supprimer la première phrase du postulat 2.6.

Nous citons le postulat 2.5: Esiste un sistema S di $n \geq 2$ classi complete di rette parallele $L_1, \ldots, L_n$ tale che: per $n=2$, ogni retta di L_1 sia incidente ogni retta di L_2; per $n>2$, fissata comunque una retta $l_1 \in L_1$ ed una retta $l_n \in L_n$, esista una ed una sola catena di S congiungente l_1 con l_n.

On voit qu'il impose une dimension finie et que pour $n=2$ on retrouve la géométrie d'Everett [7].

4. — Espaces de Permutti generalises.

DÉFINITION 4.1: Un *espace de Permutti généralisé* est un espace à parallélogrammes qui vérifie B 3.

Un sous-espace affine est de rang 1 s'il peut être engendré par deux éléments distincts; on dit encore que c'est un 1-*sous-espace.* Un sous-module qui est un 1-sous-espace est un sous-module monogéne (engendré par un élément distinct du zéro).

THÉORÈME 4.2: Pour un espace de Permutti généralisé les droites sont les 1-sous-espaces maximaux; il sont tous isomorphes.

Preuve: Avec les notations de B 3, d est un générateur de la droite D pointée en k donc D est un 1-sous-espace. Soit M un 1-sous-espace contenant D et m un générateur du sous-module M pointé en k: la droite km qui contient M, contient D donc lui est égale; ainsi D est un 1-sous-espace maximal. Enfin l'application qui à chaque élément α de Hassocie sur D pointée en k l'image de d par α est un isomorphisme de H-modules.

Les générateurs de D pointée en k sont les images de d par les éléments inversibles dans H.

Un espace de Permutti généralisé vérifie les axiomes de Sperner [10].

DÉFINITION 4.3: Un module posséde *la propriété* 1-*maximale partitive* si chaque élément non nul est contenu dans un unique sous-module monogéne maximal.

THÉORÈME 4.4: La classe des espaces de Permutti généralisés correspond biunivoquement à la classe des modules non monogénes, sans torsion et possédant la propriété 1-maximale partitive.

Preuve: Le théorème 4.2 permet d'établir cette correspondance dans un sens. Maintenant soit J un anneau associatif unitaire et Q un J-module non monogéne, sans torsion et possédant la propriété 1-maximale partitive: on érige Q en espace à parallélogrammes à l'aide des 1-sous-espaces maximaux et du parallélisme induit par les translations de module. Soit α un élément de J et k le zéro de Q: l'application $a \in Q \rightarrow a\alpha \in Q$ est une homothétie de centre k pour cet espace puisque, de $(a-b)\,\alpha = a\,\alpha - b\,\alpha$ résulte que les droites ab et $a\,\alpha\,b\,\alpha$ (lorsqu'elles existent) sont parallèles; on définit ainsi un morphisme d'anneaux de J vers H_k, injectif parce que Q est sans torsion et surjectif car une droite passant par k est l'ensemble des $e\,\varepsilon$ pour e générateur fixé et ε parcourant J; ainsi on peut identifier J et H_k de même que leurs actions sur Q.

Soit P un espace de Permutti généralisé:

i) Si H est un corps, l'espace P est associé à la géométrie affine habituelle à partir de ce corps. C'est le cas en particulier lorsque l'anneau H est fini (donc un corps fini commutatif).

ii) Si l'anneau H admet un corps des quotients à droite K, le H-module sans torsion P^k peut être plongé par extension des scalaires dans un K-espace vectoriel V; ceci étant, les droites et le parallélisme dans P sont la restriction de ces mêmes notions de V à P. Il en résulte par exemple que dans ce cas P vérifie B 6.

5. — Divisibilite pour un module sans torsion.

L'étude de [9] a montré que la classe des espaces de Permutti de dimension n (n fixé dans le postulat 2.5) correspond biunivoquement à la classe des anneaux associatifs, unitaires, sans diviseurs de zéro et à P. G. C. D. (plus grand commun diviseur à droite). C'est pourquoi nous présentons ici une caractérisation des espaces de Permutti généralisés (autre que celle du théorème 4.4) dans laquelle une certaine notion de divisibilité joue un rôle important.

Soit J un anneau associatif, sans diviseurs de zéro, de neutre 1 et de zéro 0, et Q un J-module sans torsion de zéro k; les éléments de J (resp: Q) sont généralement notés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (resp: $a, b, c, \ldots$).

On dit que α divise β s'il existe γ tel que $\beta=\gamma\alpha$; c'est une relation de préordre sur J; la classe d'équivalence d'un élément δ est l'ensemble des $\varepsilon\delta$ avec ε inversible dans J.

Pour la définition suivante nous excluons $k\in Q$ et $0\in J$.

DÉFINITION 5.1: *$\alpha\in J$ divise $b\in Q$* s'il existe $a\in Q$ pour lequel $b=a\alpha$;

a (nécessairement unique) est *le quotient de b par α.*

Un P. G. D. (*plus grand diviseur*) de b est un plus grand élément de l'ensemble des diviseurs de b;

b est premier lorque 1 est un P. G. D. de b;

Q est *un J-module à P. G. D.* si tout élément non nul de Q possède un P. G. D.

On note dJ le sous-module de Q engendré par $d\in Q$.

Il résulte de la définition que a est un quotient de b si et seulement si bJ est contenù dans aJ; on a l'égalité $bJ=aJ$ si et seulement si le diviseur associé est inversible.

Ces remarques montrent que pour b choisi dans Q les classes d'équivalence dans J de diviseurs de b correspondent biunivoquement aux sous-modules monogénes de Q contenant b et qui plus est, les ordres canoniques sont respectés.

En particulier:

PROPOSITION 5.2: *b posséde un P. G. D. si et seulement si il existe un unique sous-module maximal qui le contient.*

Cette proposition et le théorème 4.4 montrent que:

THÉORÈME 5.3: *La classe des espaces de Permutti généralisés correspond biunivoquement à la classe des modules non monogénes, sans torsion et à P. G. D.*

Soit P un espace de Permutti généralisé, $k\in P$ et $b\in P$, $b\neq k$: dans le H-module P^k les générateurs de la droite bk (considérée comme sous-module monogéne de P^k) sont exactement les quotients premiers de b.

REFERENCES

[1] J. ANDRE: M. Z. vol. 60 (1954) page 156.

[2] J. ANDRE: M. Z. vol. 76, II, (1961) page 155.

[3] E. ARTIN: *Algébre géométrique,* Paris (1962).

[4] A. BATBEDAT: Comptes rendus Ac. Sc. Paris A 277 (1973) page 409.

[5] A. BATBEDAT: Comptes rendus Ac. Sc. Paris A-280 (1975) page 857.

[6] A. BATBEDAT: Thése, Prémodules, préalgébres et leur contexte affine; Lyon (1974).

[7] C. J. EVERETT: Duke M. J. 9 (1942) page 873.

[8] H. LENZ: Bayerische Ac. (1954) page 17.

[9] R. PERMUTTI: *Geometria affine su di un anello.* Ac. Naz. dei Lincei (1967) Memorie Serie VIII Volume VIII Fascicolo 7.

[10] E. SPERNER: J. Reine Angew. M. 204 (1960) page 205.