PARTICOLARI PROCESSI MARKOFFIANI D'ARRIVO CHE SI ARRESTANO IN INTERVALLI FINITI DI TEMPO E CHE PRESENTANO LA SCAMBIABILITÀ DEGLI INCREMENTI (*)

di LUCIANO SIGALOTTI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Le funzioni di sopravvivenza,* $l(t) = Prob\{T_i > t\}$, *per intervalli d'attesa* T_i *in processi markoffiani d'arrivi* $(N_t\,; t \geq 0)$ *ad incrementi scambiabili, che si arrestano in* $t=T$ *e che presentano in* $[0, T]$ *un numero finito, ma aleatorio, di arrivi sono tutte e sole le funzioni completamente monotone normalizzate su* $[0, T]$.

SUMMARY. - *The survival functions,* $l(t) = Prob\{T_i > t\}$, *for waiting times in a markov process of arrivals* $(N_t; t \geq 0)$ *with exchangeable increments, stopping in* $t=T$ *and with a finite but random number of arrivals in* $[0, T]$ *are the only completely monotone functions normalized on* $[0, T]$.

Introduzione.

In questa nota viene fornita una caratterizzazione delle funzioni completamente monotone normalizzate (f. c. m. n.) su di un intervallo finito $[0, T]$ di tempo. Viene provato che queste si possono interpretare come funzioni di sopravvivenza $l(t) = \text{Prob}\{T_i > t\}$ per intervalli d'attesa T_i in processi markoffiani d'arrivo $(N_t; t \geq 0)$ ad incrementi scambiabili che si arrestano in $t=T$ e che presentano in $[0, T]$ un numero finito, ma aleatorio, di arrivi.

(*) Pervenuto in Redazione il 30 dicembre 1975.
Lavoro eseguito nell'ambito delle attività di Ricerca Matematica del C.N.R. - Gruppo G.N.A.F.A.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università. Piazzale Europa 1 - 34127 Trieste.

Allo scopo sono stati, anzitutto, caratterizzati i processi markoffiani d'arrivo in $[0, T]$ che presentano la scambiabilità degli incrementi prendendo dapprima in considerazione il caso in cui gli arrivi siano esattamente N. In quest'ultima situazione sono state ricercate nell'ampia classe di funzioni di sopravvivenza che portano a processi con intervalli d'attesa scambiabili $T_1, T_2, \dots, T_N$ fra gli N arrivi, quelle che assicurano anche la scambiabilità degli incrementi, con ciò pervenendo all'unica funzione $l(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^N$. Il relativo processo è già stato studiato in precedenti lavori ([1], [5]). Si è potuto concludere conseguentemente che i processi ad incrementi scambiabili in $[0, T]$ che presentano un numero finito ma aleatorio di arrivi sono tutti e soli quelli caratterizzati dalle funzioni di sopravvivenza $l(t) = \Sigma\, p_n \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n$; ma queste ultime appunto sono tutte e sole le f. c. m. n. su $[0, T]$.

1. Consideriamo un processo markoffiano a parametro continuo di puro ingresso N_t che prevede esattamente $N(>0)$ arrivi in un intervallo $[0, T]$ che nel seguito assumeremo unitario, $T=1$.

Esso è compiutamente individuato assegnando le probabilità subordinate di transizione

$$p_{ij}(\tau, t) = \text{Prob}\,\{N_t = j / N_\tau = i\} \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad j \geq i$$
$$i, j = 0, 1, \dots, N$$

e la condizione iniziale $N_0 = 0$.

Nelle consuete ipotesi di regolarità di Kolmogoroff le $p_{ij}(\tau, t)$ sono funzioni continue e derivabili dei loro argomenti e soddisfano il sistema di equazioni differenziali

$$(1.1) \quad \begin{cases} p'_{ii}(\tau, t) = -\lambda_i(t)\, p_{ii}(\tau, t) \; per \; i = 0, 1, \dots, N \\ p'_{ij}(\tau, t) = -\lambda_j(t)\, p_{ij}(\tau, t) + \lambda_{j-1}(t)\, p_{ij-1}(\tau, t) \; \text{per} \; j > i \;\; j = 1, 2, \dots, N-1 \\ p'_{iN}(\tau, t) = \lambda_{N-1}(t)\, p_{i,N-1}(\tau, t) \; \text{per} \; i = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Le $p_{ij}(\tau, t)$ debbono, inoltre, soddisfare le condizioni iniziali $p_{ij}(\tau, \tau) = \delta_i^j$.

Si tratterà di caratterizzare le intensità $\lambda_i(t)$, funzioni continue di t, cui corrispondono processi d'arrivi con incrementi, e quindi intervalli d'attesa, scambiabili.

La caratterizzazione delle $\lambda_i(t)$ cui corrispondono processi d'arrivi con intervalli d'attesa $T_1, T_2, \dots, T_N$ tra gli N arrivi contigui, scambiabili, è data in un articolo di L. Crisma e L. Daboni [1] ai quali è riuscito di provare che le $\lambda_i(t)$ debbono soddisfare le condizioni

α) $\lambda_i(t)$ non è sommabile in $[0,1)$, $i=0,1,\dots,N-1$

β) $\lambda_i(t)>0$, $t\in[0,1)$, $i=0,1,\dots,N-2$,
$\lambda_{N-1}(t)\geq 0$, $t\in[0,1)$.

Dovremo inoltre avere $\lambda_i(t)\equiv 0$ per $t\in[0,1)$ e $i\geq N$.

Per intendere il significato della condizione α) osserviamo che

$$\text{(1.2)}\qquad \operatorname{Prob}\{T_{i+1}>1-w_i/W_i\equiv w_i\}=e^{-\int_{w_i}^{1}\lambda_i(x)\,dx}\qquad \text{per } 0\leq i<N$$

dove $W_i=T_1+T_2+\dots+T_i$. Appare da qui che se vogliamo almeno $i+1$ arrivi in $[0,1]$ la $\lambda_i(t)$ non può essere integrabile in un intorno sinistro di 1 dovendo essere nulla la probabilità (1.2).

La prova della β) è data nell'appendice del citato lavoro [1] dapprima nel caso $N=2$ mostrando come dalla supposizione dell'esistenza di zeri di $\lambda_0(t)$ si pervenga all'assurdo dell'integrabilità di $\lambda_1(t)$ in $[0,1)$. Il risultato è poi esteso per induzione su $h\leq N-2$ nel caso $N>2$.

La distribuzione del primo tempo d'attesa, T_1, è data, in termini della funzione di sopravvivenza, dalla

$$l(t)=\operatorname{Prob}\{T_1>t\}=p_{0,0}(0,t)=e^{-\int_0^t\lambda_0(x)\,dx}$$

come si ottiene integrando la prima equazione in (1.1) con $i=0$, $\tau=0$ e tenendo conto della $p_{0,0}(0,0)=1$.

Tale funzione risulta positiva, decrescente ed inoltre $\lim_{t\to 1^-} l(t)=0$. Vediamo ora come si possono assegnare anche le altre intensità di ingresso $\lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,N-1$, attraverso questa $l(t)$.

Posto $\varphi_j(t)=e^{-\int_0^t\lambda_j(x)\,dx}$ dalla simmetria della densità della distribuzione congiunta

$$f_{T_1,T_2,\dots T_{j+1}}(0,0,\dots,t,\tau)=f_{T_1,T_2,\dots,T_{j+1}}(0,0,\dots,\tau,t)$$

che è conseguenza della scambiabilità degli intervalli d'attesa, si ricava la

(1.3) $$\lambda_j(t+\tau)\,[\varphi'_{j-1}(t)\,\varphi_j(\tau)-\varphi'_{j-1}(\tau)\,\varphi_j(t)]\equiv 0.$$

Poiché per $j\leq N-2$ è $\lambda_j(t+\tau)>0$ per ogni $t, \tau\in[0,1]$, dalla (1.3) si ottiene

(1.4) $$\varphi_j(t)=k_j\,\varphi'_{j-1}(t),\quad j=1,2,\dots,N-2.$$

Partendo da $\varphi_0(t)=l(t)$ si ricavano tramite la (1.4) le $\lambda_j(t)=-\dfrac{l^{(j+1)}(t)}{l^{(j)}(t)}$. Anche per il caso $j=N-1$ è possibile dimostrare (Appendice [1]) la validità della relazione $\varphi_{N-1}(t)=\dfrac{1}{\varphi'_{N-2}(0)}\,\varphi'_{N-2}(t)$ che comporta la $\lambda_{N-1}(t)=-\dfrac{l^{(N)}(t)}{l^{(N-1)}(t)}$, $0\leq t<1$.

La funzione $l(t)$, definita in $[0,1]$, dev'essere dunque almeno N volte derivabile, con derivate alternativamente strettamente negative e positive, fuorché quella di ordine N che può essere nulla su qualche sottoinsieme di $[0,1]$. Con le posizioni $\lambda_j(t)=-\dfrac{l^{(1+j)}(t)}{l^{(j)}(t)}$ e attraverso un'agevole integrazione del sistema (1.1) si ottengono le probabilità subordinate di transizione

(1.5) $$\begin{cases} P_{ii}(\tau,t)=\dfrac{l^{(i)}(t)}{l^{(i)}(\tau)} & i=0,1,\dots,N-1 \\[2ex] P_{i,i+n}(\tau,t)=(-1)^n\dfrac{(t-\tau)^n}{n!}\cdot\dfrac{l^{(i+n)}(t)}{l^{(i)}(\tau)}, & i=0,1,\dots,N-2,\ \ i+n\leq N-1 \\[2ex] P_{iN}(\tau,t)=\displaystyle\int_\tau^t\lambda_{N-1}(x)P_{i\,N-1}(\tau,x)\,dx=1-P_{ii}(\tau,t)-P_{ii+1}(\tau,t)-\dots-P_{iN-1}(\tau,t) & \end{cases}$$

per $i=0,1,\dots,N-1$

La richiesta di avere esattamente N arrivi in $[0,1]$ comporterà che $\lim\limits_{t\to1^-}P_{i,i+n}(\tau,t)=\lim\limits_{t\to1^-}(-1)^n\dfrac{(t-\tau)^n}{n!}\cdot\dfrac{l^{(i+n)}(t)}{l^{(i)}(\tau)}=0$ per $i+n\leq N-1$ il che implica $\lim\limits_{t\to1^-}l^{(i+n)}(t)=0$ per $i+n\leq N-1$ e di conseguenza $\lim\limits_{t\to1^-}p_{iN}(\tau,t)=1$ per $i=0,1,\dots,N$.

La funzione $l(t)$ dovrà quindi essere dotata di uno zero in $t=1$ di molteplicità almeno N. È ovvio che la classe di funzioni $l(t)$ che godono della proprietà indicata risulta molto ampia.

2. Richiediamo ora al nostro processo di presentare la scambiabilità degli incrementi relativi ad intervalli di tempo di ugual durata e disgiunti.

Posto $N_h(t)=N_{t+h}-N_t$, cominciamo a considerare due incrementi relativi agli intervalli $[t, t+h]$ e $[\tau, \tau+h]$ con $h>0$ e $\tau>t+h$, e consideriamo la probabilità congiunta

$$\text{Prob}\{N_h(t)=i \wedge N_h(\tau)=j\}$$

che dovrà risultare funzione simmetrica in i e j.

Si ha

$$\text{Prob}\{N_h(t)=i \wedge N_h(\tau)=j\} = \sum_{r=0}^{N-(i+j)} \sum_{k=0}^{N-(r+i+j)} P_{0r}(0,t) P_{r\,r+i}(t,t+h) P_{r+i,\,r+i+k}(t+h,\tau) \cdot$$

$$\cdot P_{r+i+k,\,r+i+k+j}(\tau, \tau+h) =$$

$$\sum_{r=0}^{N-(i+j)} \sum_{k=0}^{N-(i+j+r)-1} P_{0r}(0,t) P_{r\,r+i}(t,t+h) P_{r+i,\,r+i+k}(t+h,\tau) P_{r+i+k,\,r+i+k+j}(\tau,\tau+h) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{N-(i+j)} P_{0r}(0,t) P_{r,r+i}(t,t+h) P_{r+i,\,N-j}(t+h,\tau) P_{N-j,\,N}(\tau,\tau+h).$$

La simmetria per i e j del primo addendo è subito provata; infatti:

$$\sum_{r=0}^{N-(i+j)} \sum_{k=0}^{N-(i+j+r)-1} \left((-1)^r \frac{t^r}{r!} l^{(r)}(t)\right) \cdot \left((-1)^i \frac{h^i}{i!} \cdot \frac{l^{(r+i)}(t+h)}{l^{(r)}(t)}\right) \left((-1)^k \frac{(\tau-t-h)^k}{k!} \frac{l^{(r+i+k)}(\tau)}{l^{(r+i)}(t+h)}\right) \cdot$$

$$\cdot (-1)^j \frac{h^j}{j!} \cdot \frac{l^{(r+i+k+j)}(\tau+h)}{l^{(r+i+k)}(\tau)} = \sum_{r=0}^{N-(i+j)} \sum_{k=0}^{N-(i+j+r)-1} (-1)^{r+i+k+j} \frac{t^r(\tau-t-h)^k h^j h^i}{r!\,k!\,j!\,i!} \cdot l^{(r+i+k+j)}(\tau+h)$$

Per il secondo addendo, nell'ipotesi $j>0$, si può scrivere

$$\sum_{r=0}^{N-(i+j)} P_{0r}(0,t) P_{r,r+i}(t,t+h) P_{r+i,\,N-j}(t+h,\tau) P_{N-j,\,N}(\tau,\tau+h) =$$

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{N-(i+j)} (-1)^r \frac{t^r}{r!} l^{(r)}(t) (-1)^i \frac{h^i}{i!} \frac{l^{(r+i)}(t+h)}{l^{(r)}(t)} (-1)^{N-(r+i+j)} \frac{(\tau-t-h)^{N-r-i-j}}{(N-r-i-j)!} \frac{l^{(N-j)}(\tau)}{l^{(r+i)}(t+h)} \cdot \\ &\cdot \left(1 - \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s \frac{h^s}{s!} \frac{l^{(N-j+s)}(\tau+h)}{l^{(N-j)}(\tau)}\right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{N-(i+j)} \frac{(-1)^{N-j} t^r (\tau-t-h)^{N-r-i-j} h^i}{r!\, i!\,(N-r-i-j)!} \left(l^{(N-j)}(\tau) - \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s \frac{h^s}{s!} l^{(N-j+s)}(\tau+h)\right).$$

Si tratta ora di cercare la classe di funzioni $l(t)$ per le quali l'ultima espressione risulta simmetrica in i e j.

Con l'obiettivo di delimitare la classe delle funzioni $l(t)$ imponiamo intanto la scambiabilità per la particolare coppia di valori $i=1$ e $j=2$ (naturalmente qui dev'essere $N \geq 3$).

In base alla (2.1) dovrà essere

$$\sum_{r=0}^{N-3} (-1)^{N-2} \frac{t^r (\tau - t - h)^{N-3-r}}{r!(N-3-r)!} h \left[l^{(N-2)}(\tau) - l^{(N-2)}(\tau + h) + h l^{(N-1)}(\tau + h) \right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{N-3} (-1)^{N-1} \frac{t^r (\tau - t - h)^{N-3-r}}{r!(N-3-r)!} \cdot \frac{h^2}{2} \left[l^{(N-1)}(\tau) - l^{(N-1)}(\tau + h) \right]$$

da cui la

$$\sum_{r=0}^{N-3} (-1)^{N-2} \frac{t^r (\tau - t - h)^{N-3-r}}{r!(N-3-r)!} \cdot \frac{h^2}{2} \left[\frac{2}{h} l^{(N-2)}(\tau) - \frac{2}{h} l^{(N-2)}(\tau + h) + \right.$$

$$\left. + l^{(N-1)}(\tau + h) + l^{(N-1)}(\tau) \right] \equiv 0$$

che implica la equazione differenziale alle differenze

$$2 \left[l^{(N-2)}(\tau + h) - l^{(N-2)}(\tau) \right] = h \left[l^{(N-1)}(\tau) + l^{(N-1)}(\tau + h) \right]. \tag{2.2}$$

Per risolvere la (2.2) deriviamo rispetto ad h, com'è possibile per l'esistenza della derivata N-esima della $l(t)$. Otteniamo

$$2\, l^{(N-1)}(\tau + h) = l^{(N-1)}(\tau) + l^{(N-1)}(\tau + h) + h\, l^{(N)}(\tau + h)$$

che porge la

$$\frac{l^{(N-1)}(\tau + h) - l^{(N-1)}(t)}{h} = l^{(N)}(\tau + h). \tag{2.3}$$

Preso un qualunque x interno all'intervallo $[\tau, \tau + h]$, applicando la (2.3) agli intervalli $[\tau, x]$ e $[x, \tau + h]$, sommando poi membro a membro e confrontando con la stessa (2.3) si perviene alla $l^{(N)}(\tau + h) = l^{(N)}(x)$.

Opportuni procedimenti di prolungamento ci permettono di concludere che $l^{(N)}(t) =$ costante su $[0, 1]$, cioè $l(t)$ deve essere un polinomio di grado N in t.

Imponendo le $l(0)=1$, $l(1)=0$ e l'alternarsi dei segni delle derivate successive si perviene a considerare le sole funzioni del tipo $l(t)=\sum_{i=1}^{N} a_i (1-t)^i$ con $a_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$.

Le $\lim_{t \to 1^-} l^{(j)}(t) = 0$ per $j = 1, 2, \dots, N-1$ comportano poi che $a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = 0$ e $a_N = 1$.

Si ottiene in definitiva la

$$l(t) = (1-t)^N. \tag{2.4}$$

Il risultato così ottenuto è stato stabilito nell'ipotesi $N \geq 3$ e j non nullo (anzi uguale a 2). La prova che nei casi $N=1$ e $N=2$ si perviene rispettivamente alle $l(t)=1-t$ e $l(t)=(1-t)^2$ non presenta difficoltà.

A questo punto non serve estendere l'indagine anche alle altre coppie di indici i e j nè a n-ple di intervalli disgiunti ($n>2$) perché è già noto [5] che la (2.4) è funzione di sopravvivenza in un processo markoffiano ad incrementi scambiabili che prevede esattamente N arrivi e che subordinatamente a questa ipotesi risulta poissoniano. Un tale processo è caratterizzato dalle intensità $\lambda_h(t) = \frac{N-h}{1-t}$. Si osserva anche che $l(t)$ e quindi le $\lambda_i(t)$ non dipendono dall'intensità del processo di Poisson subordinato alla $N_1=N$. Altri aspetti di questo processo erano stati studiati da L. Crisma [2] e da M. Strudthoff nel già citato [5].

Ci sembra ancora interessante osservare che le probabilità di transizione $p_{iN}(\tau, t)$, dato che ora $l^{(N)}(t)$ è costante, sono ancora date dalle

$$P^{iN}(\tau, t) = (-1)^{N-i}(t-\tau)^{N-i} \cdot \frac{l^{(N)}(\tau)}{l^{(i)}(\tau)} \qquad i = 0, 1, \dots N-1$$

che sono le espressioni che si desumono dal sistema di Chapmann-Kolmogoroff per un processo di arrivi che non prevede un numero limitato di arrivi.

3. Consideriamo infine il caso in cui N è aleatorio e sia $p_N = \operatorname{Prob}\{N_1 = N\}$, $N = 0, 1, \dots$, la sua distribuzione di probabilità. Il processo che si ottiene facendo la mistura su N delle funzioni di sopravvivenza relative ai singoli casi risulta ancora ad incrementi (e quindi intervalli d'attesa) scambiabili ed anzi risulta il più generale processo markoffiano ad incrementi scambiabili. Tale processo, subor-

dinatamente ad ogni ipotesi sul numero N_1 di arrivi, risulta poissoniano. La funzione di sopravvivenza sarà del tipo $l(t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N (1-t)^N$ ed è la funzione generatrice della variabile N_1, cioè la $\sum_{N=0}^{\infty} p_N s^N$ calcolata in $s=1-t$.

Si può a questo punto osservare una differenza sostanziale tra i processi studiati in questa nota e quelli che si svolgono in un intervallo non finito di tempo e che presentano arrivi in numero non limitato, nei quali la scambiabilità degli intervalli d'attesa assicura anche quella degli incrementi (vedi [1]). Nel nostro caso siamo di fronte ad un'ampia classe di processi con intervalli d'attesa scambiabili. Basta infatti pensare a processi nei quali subordinatamente ad un $N_1=N$ fissato, gli arrivi avvengano secondo un processo caratterizzato da una legge di sopravvivenza che assicura la scambiabilità degli intervalli e non degli incrementi (come per esempio la $l(t)=e^{\frac{6t}{2t-1}}$ per $N_1=3$) e risultino individuati da una qualunque legge che assicura la scambiabilità degli intervalli d'attesa compresa naturalmente la $l(t)=(1-t)^N$. Entro questa ampia classe di processi e quindi di funzioni $l(t)$ sono state individuate in termini di quest'ultima le funzioni generatrici come le sole che portano a processi ad incrementi scambiabili.

I risultati precedenti consentono ora di pervenire ad una caratterizzazione delle funzioni completamente monotone normalizzate su $[0, 1]$, cioè delle funzioni $\nu(t)$ dotate di derivate di ogni ordine con

$$(-1)^n \nu^{(n)}(t) \geq 0 \quad t \in [0,1] \quad \text{e} \quad \nu(0)=1.$$

Per questa caratterizzazione partiamo da un noto risultato di Bernstein (vedi ad esempio Feller [4]) e riguardante le funzioni assolutamente monotone, e cioè le funzioni per cui $u^{(n)}(t) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq 1$ $u(1)=0$.

Per il teorema di Bernstein le funzioni assolutamente monotone sono tutte e sole quelle del tipo

$$u(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_n t^n + \ldots \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$p_n \geq 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

D'altra parte se $u(t)$ è una funzione assolutamente monotona in $[0,1]$ la $v(t)=u(1-t)$ è completamente monotona dovendo le derivate risultare di segno alterno. Le funzioni compleamente monotone normalizzate su $[0,1]$ sono quindi tutte e sole quelle del tipo

$$v(t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1-t)^n, \quad p_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n=1.$$

In base a quanto visto al numero 3 si può concludere che *tutte e sole le f. c. m. n. su* $[0,1]$ *sono interpretabili come funzioni di sopravvivenza per intervalli d'attesa in processi markoffiani d'arrivo ad incrementi scambiabili e che presentano in* $[0,1]$ *un numero finito, ma aleatorio di arrivi.*

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CRISMA - L. DABONI, *Processi markoffiani d'arrivi con intervalli d'attesa scambiabili.* Nel volume celebrativo del cinquantenario della Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Trieste (in stampa).

[2] L. CRISMA, *Studio di alcune distribuzioni in un processo poissoniano.* G. I. I. A. 1965 1º semestre con intervalli d'attesa scambiabili (Studi e ricerche, VI, Università di Parma, 1969).

[4] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. II 2º Ed. J. Wiley 71.

[5] M. STRUDTHOFF, *Un processo markoffiano di puro ingresso, a parametro continuo, ottenuto come estensione del processo discreto della frequenza di successo nel modello ipergeometrico..* (Rend. Ist. Mat. Università di Trieste, vol. V, 1973).