A-CATEGORIE E CATEGORIE RELATIVE DI FUNTORI (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si generalizza un risultato sulle categorie relative di funtori, ottenuto in* [4] *mediante la struttura di monade relativa.*

SUMMARY. - *We generalize a result about relative functor categories obtained in* [4] *by relative triple's structure.*

Introduzione.

In una precedente nota ([4]) si è dimostrato che se V è una A-categoria bicompleta e chiusa (nel senso di [2]), tale è anche la V-categoria $V^{\mathcal{C}}$ dei V-funtori (e delle V-trasformazioni naturali fra essi) da una V-categoria piccola $\mathcal{C}$ in V. Questo risultato è stato ottenuto come conseguenza di teoremi di « transfer » di A-proprietà da una A-categoria $\mathcal{A}$ ad opportune categorie di $\mathbf{T}$ -algebre.

In questa nota si dà una generalizzazione di tale risultato operando all'« interno » della V-struttura di una V-categoria di V-funtori. Si perviene inoltre ad assegnare ulteriori esempi di A-categorie.

1. Siano V una categoria chiusa e completa, $\mathcal{C}$ una V-categoria piccola. È ben noto che se $\mathcal{A}$ è una V-categoria qualsiasi, la categoria $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ dei V-funtori $F: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ e delle V-trasformazioni naturali, può essere dotata di struttura di V-categoria. (cfr. [1], [2]).

(*) Pervenuto in Redazione l'8 ottobre 1975.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

Definizione: Diremo che una V-categoria $\mathcal{A}$ *ha Q^*-V-push-out* (o che è una categoria *con Q^*-V-push-out*), se ogni coppia di *monic* in $\mathcal{A}$ con medesimo dominio ha V-push-out.

Vogliamo verificare che

1.1. *Se la V-categoria $\mathcal{A}$ è una A-categoria con V-pull-back e Q^*-V-push-out, allora pure la V-categoria $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ è una A-categoria.*

DIM: È ben noto che la famiglia dei V-funtori valutazione e_C: $\mathcal{A}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ crea (globalmente) i V-limiti ed i V-colimiti (cfr. [2] pag. 153). Osserviamo preliminarmente in modo esplicito che la predetta famiglia riflette globalmente i V-limiti ed i V-colimiti.

Sia pertanto $F \overset{\varphi_\lambda}{\Longrightarrow} \Gamma(\lambda, -)$ un cono in $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ dal vertice F alla base Γ (ove Γ: $\mathbf{\Gamma} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ è un funtore qualsiasi dalla categoria piccola ordinaria $\mathbf{\Gamma}$; $\Gamma(-,-)$: $\mathbf{\Gamma} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ è il funtore associato a Γ; φ_λ sono V-trasformazioni naturali per ogni $\lambda \in \mathbf{\Gamma}$ (cfr. [2] pag. 10, 11, 151)). Supponiamo che il cono $FC \overset{\varphi_{\lambda C}}{\longrightarrow} \Gamma(\lambda, C)$ sopra $\Gamma(-, C)$ sia V-limite in $\mathcal{A}$, per ogni $C \in \mathcal{A}$. (Si noti che ogni cono $FC \overset{\varphi_{\lambda C}}{\longrightarrow} \Gamma(\lambda, C)$ è l'immagine del cono $F \overset{\varphi_\lambda}{\Longrightarrow} \Gamma(\lambda, -)$ per tramite di e_C). Come noto (cfr. [2] pag. 11-14, 153) è allora possibile costruire « per via puntuale » un V-limite del funtore Γ: $\mathbf{\Gamma} \to \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, assegnando il seguente V-funtore $\underset{\overleftarrow{\lambda}}{V\text{-}\lim}\, \Gamma(\lambda, -)$: $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(C, C') \arrow[r, dashed, "H"] \arrow[d, "\Gamma(\lambda,-)"'] & \mathcal{A}\big(FC = \underset{\overleftarrow{\lambda}}{V\text{-}\lim}\, \Gamma(\lambda, C),\ FC' = \underset{\overleftarrow{\lambda}}{V\text{-}\lim}\, \Gamma(\lambda, C')\big) \arrow[d, "\mathcal{A}(\square,\, \varphi_{\lambda C'})"] \\
\mathcal{A}(\Gamma(\lambda, C), \Gamma(\lambda, C')) \arrow[r, "\mathcal{A}(\varphi_{\lambda C},\, \square)"] & \mathcal{A}\big(FC = \underset{\overleftarrow{\lambda}}{V\text{-}\lim}\, \Gamma(\lambda, C),\ \Gamma(\lambda, C')\big)
\end{tikzcd}$$

ove H è l'unico morfismo che, per ogni $\lambda \in \mathbf{\Gamma}$, rende commutativo il diagramma precedente. Per costruzione, dunque, i V-funtori F e $\underset{\overleftarrow{\lambda}}{V\text{-}\lim}\, \Gamma(\lambda, -)$ coincidono su ogni oggetto di $\mathcal{C}$; inoltre, essendo

$\varphi_\lambda: F \Rightarrow \Gamma(\lambda, -)$ V-trasformazioni naturali, pure $F: \mathcal{C}(C, C') \rightarrow \rightarrow \mathcal{A}(FC, FC')$ deve rendere commutativo il diagramma precedente per ogni $\lambda \in \mathbf{\Gamma}$ (cfr. [2] pag. XV). Dall'unicità di H segue quindi $F = H$, onde i due V-funtori coincidono. Rimane quindi accertato che la famiglia degli e_C riflette i V-limiti. Dualmente, si ha l'analoga proprietà per i V-colimiti.

Per ipotesi, la V-categoria $\mathcal{A}$ ha V-pull-back e Q*-V-push-out. Dalla definizione di V-limite (e V-colimite) ne consegue che in $\mathcal{A}$ ogni pull-back è un V-pull-back ed ogni Q*-push-out (cfr. [4] n. 1) è un Q*-V-push-out. Pertanto, le nozioni di pull-back e V-pull-back e quelle di Q*-push-out e Q*-V-push-out coincidono in $\mathcal{A}$. Poiché la famiglia dei funtori $e_C: \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}$ crea i V-limiti, ne consegue intanto che pure $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ ha V-pull-back; dunque anche in $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ i pull-back coincidono con i V-pull-back, da cui si deduce facilmente che ogni e_C preserva i pull-back, quindi in particolare, i monic. Ma la famiglia degli e_C crea anche i V-colimiti, onde, attesa la proprietà preservante i monic degli e_C, pure $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ ha Q*-V-push-out ed ogni e_C muta un Q*-push-out in un Q*-push-out. Sfruttando allora le predette proprietà di preservazione da parte di ogni e_C, ed osservando che la famiglia degli e_C riflette i pull-back, si conclude agevolmente che $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ è una A-categoria, supposto che lo sia $\mathcal{A}$.

Osserviamo che la proposizione testè dimostrata generalizza effettivamente la 4.2 di [4] (cfr. introduzione). Infatti è ben noto che ogni categoria V, chiusa e bicompleta, è una V-categoria V-bicompleta (cfr. [2] pag. 121).

La proposizione precedentemente posta permette di individuare ulteriori classi di A-categorie (per altri esempi vedasi anche [3], [4]). Infatti

1.2. *Sono A-categorie:*

a) Ogni ordinaria categoria di funtori $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ *(*$\mathcal{C}$ *piccola) su una A-categoria* $\mathcal{A}$ *con pull-back e* Q**-push-out; in particolare ogni categoria di funtori valutati in una categoria* $\mathcal{A}$ *di cui alla* 4.4 *di* [4].

b) Ogni categoria $[\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ *dei funtori additivi (ed ordinarie trasformazioni naturali) da una categoria preadditiva (piccola)* $\mathcal{C}$ *ad una A-categoria preadditiva con pull-back e* Q**-push-out* $\mathcal{A}$.

c) Ogni categoria cocompleta, coregolare, atomica.

DIM: a) e b) risultano immediatamente ricordando la caratterizzazione delle V-categorie se $V=$ Set o $V=\mathcal{A}_b$. Si ricordi che il funtore $V_0(I, -)\colon V \to$ Set (ove I è l'unità di V) è fedele nei casi succitati ed inoltre riflette gli isomorfismi; quindi, in virtù anche della completezza di V, le nozioni di limite, colimite (piccoli), trasformazione naturale, coincidono con le rispettive V-nozioni. Per la c) si veda anche [5] prop. 4.7. pag. 253, con $V=$ Set.

Concludiamo osservando che proposizioni analoghe alla b), sussistono (ad esempio) nei casi $V=$ Set* (categoria degli insiemi puntati) e $V={}_K\mathcal{M}$ (categoria dei K-moduli su un anello commutativo unitario K); pertanto si lascia al lettore la loro immediata formulazione esplicita.

BIBLIOGRAFIA

[1] DAY B. J. and KELLY G. M., *Enriched functor categories,* «Lecture Notes vol. 106», 178-191, Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1969).

[2] DUBUC E., *Kan extensions in enriched category theory,* «Lecture Notes Vol. 145», Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1970).

[3] ROSSI F., *Sul reticolo dei sottoggetti di un oggetto in una certa classe di categorie,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, VI-2 (1974) 205-215.

[4] ROSSI F., *A-categorie e* **T** *-algebre,* Presente volume.

[5] FISHER-PALMQUIST J. and NEWELL D., *Triples on functor categories,* J. of Algebra 25 (1973), 226-258.