

## A - CATEGORIE E T - ALGEBRE (\*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (\*\*)

**SOMMARIO.** - Si assegnano dei teoremi di « transfer » di A-proprietà per V-categorie di T-algebre associate ad un'opportuna V-monade T su una V-categoria  $\mathcal{A}$ .

**SUMMARY.** - In this paper are given some « transfer » theorems of A-properties for V-categories of T-algebras associated to some V-triple T on a V-category  $\mathcal{A}$ .

### Introduzione.

Un recente risultato, dovuto a Fisher-Palmquist e Newell (cfr. [6]), asserisce che se T è una monade sulla categoria  $\mathcal{A}_b$  dei gruppi abeliani con funtore cocontinuo ed additivo, esiste un anello (unitario) R tale che la categoria  $\mathcal{A}_b^T$  delle T-algebre associata a T, sia equivalente alla categoria  ${}_R\mathcal{M}$  degli R-moduli (sinistri).

Poiché le categorie  $\mathcal{A}_b$  ed  ${}_R\mathcal{M}$ , essendo abeliane, sono A-categorie (verificanti cioè le proprietà  $A_1, A_2, A_3$  di cui in [13]), il precedente risultato assicura che ogni categoria  $\mathcal{A}_b^T$ , con T monade verificante la condizione predetta, è ancora una A-categoria.

D'altra parte, formulando il risultato richiamato nell'ambito della teoria delle categorie « relative » ad una categoria chiusa (cfr. [1], [3], [2], [6]) si può anche dire che ogni  $\mathcal{A}_b$ -categoria  $\mathcal{A}_b^T$ , con T una  $\mathcal{A}_b$ -monade  $\mathcal{A}_b$ -cocontinua, è una A-categoria.

(\*) Pervenuto in Redazione il 7 ottobre 1975.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(\*\*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1-34100 Trieste.

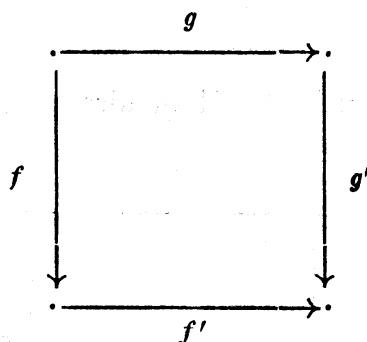
Queste considerazioni suggeriscono allora lo studio delle  $A$ -categorie in relazione alle categorie di  $T$ -algebre relative ad una qualsiasi categoria chiusa (dotata, naturalmente, di equalizzatori).

In questa nota si affronta tale studio prendendo dapprima in considerazione il caso delle categorie ordinarie (Set-categorie) e stabilendo certi risultati relativi a teoremi di « transfer » di  $A$ -proprietà alle categorie di  $T$ -algebre (nn. 1, 2, 3). Poggiando su di essi, si stabilisce, fra l'altro, che ogni  $V$ -categoria  $\mathcal{A}^T$ , con  $T$   $V$ -monade preservante i  $V$ -push-out su una  $V$ -categoria  $\mathcal{A}$  con  $V$ -push-out, è una  $A$ -categoria, se tale è  $\mathcal{A}$ . Si generalizza così quanto detto in precedenza a proposito della categoria  $\mathcal{A}_b$ .

Questi risultati forniscono, da un lato, un metodo functoriale d'indagine sui reticoli di sottoalgebre in categorie algebriche, dall'altro, la possibilità di costruire nuove classi di  $A$ -categorie (n. 4). Fra quest'ultime si trovano, in particolare, tutte le  $V$ -categorie di  $V$ -funtori e  $V$ -trasformazioni naturali  $V^e$ , relative ad una  $A$ -categoria chiusa e bicompleta  $V$ ; a tale conclusione si può giungere ricorrendo ad una recente caratterizzazione di  $V^e$  nell'ambito delle categorie di  $T$ -algebre relative a  $V$  (cfr. [6]).

### 1. $A_1, A_2$ -categorie<sup>(0)</sup> e $T$ -algebre.

Siano  $\mathcal{C}$  una categoria,  $T$  un endofunatore di  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{Q}$  la classe dei quadrati commutativi di *monic* (cfr. [10]) in  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{Q}^*$  quella dei quadrati con  $f, g$  (almeno) *monic*.



con  $f, g$  (almeno) *monic*.

<sup>(0)</sup> Converremo di chiamare  $A_1, A_2$ -categoria ( $A_3$ -categoria), ogni categoria verificante le proprietà  $A_1, A_2$  ( $A_3$ ) di cui a [13]; è opportuno inoltre rilevare che nella proposizione 1.2 di [13] al punto *b*) si è omessa, in sede di stampa, la precisazione: « ( $\neq \emptyset$ ) ».

Seguendo Linton ([7] pag. 55) poniamo la seguente

*Definizione 1.* Diremo che  $T$  preserva i  $Q$ -push-out (i  $Q^*$ -push-out) se, per ogni push-out  $(g, f, g', f')$  con  $(g, f, g', f') \in Q$  ( $\in Q^*$ ), risulta che  $(Tg, Tf, Tg', Tf')$  è un push-out (non necessariamente in  $Q$  (in  $Q^*$ )).

1.1. Se  $\mathcal{C}$  è una  $A_1, A_2$ -categoria e  $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$  è una monade su  $\mathcal{C}$  il cui funtore  $T$  preserva i  $Q$ -push-out, allora la categoria  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  delle  $\mathbf{T}$ -algebre associata a  $\mathbf{T}$ , è pure una  $A_1, A_2$ -categoria.

DIM: Indichiamo con  $G^{\mathbf{T}}: \mathcal{C}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathcal{C}$  il funtore « dimenticante ». Poiché  $G^{\mathbf{T}}$  preserva i limiti (come aggiunto destro al funtore libero  $F^{\mathbf{T}}$ ) ed inoltre, come ben noto, anche li crea, si deduce immediatamente che  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è  $A_1$ -categoria.

Verifichiamo ora che  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  gode di  $A_2$ .

Sia

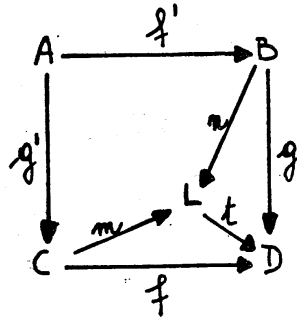
$$\begin{array}{ccc}
 (A, \alpha) & \xrightarrow{f'} & (B, \beta) \\
 \downarrow g' & & \downarrow g \\
 (C, \gamma) & \xrightarrow{f} & (D, \delta)
 \end{array}$$

un pull-back di monic in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ . Il quadrato in  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f'} & B \\
 \downarrow g' & & \downarrow g \\
 C & \xrightarrow{f} & D
 \end{array}$$

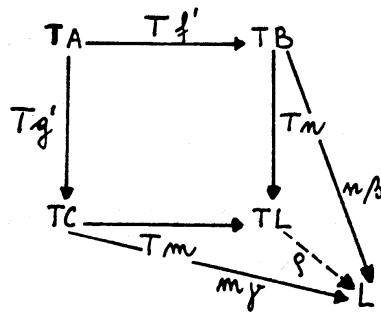
dimenticato da  $G^{\mathbf{T}}$  è allora, per quanto detto in precedenza, ancora

un pull-back di monic. Esso è dunque, a norma di  $A_2$ , un quadrato  $V$ -esatto in  $\mathcal{C}$  (cfr. [13]). Esiste allora un push-out  $(f', g', n, m)$  tale che il diagramma



sia commutativo, con  $t$  monic. Poiché  $(f', g', n, m)$  è un  $Q$ -push-out, esso è preservato da  $T$ , onde  $(Tf', Tg', Tn, Tm)$  è un push-out.

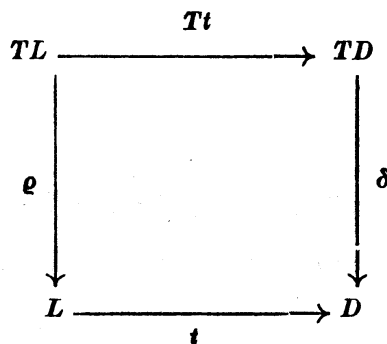
Consideriamo allora il diagramma



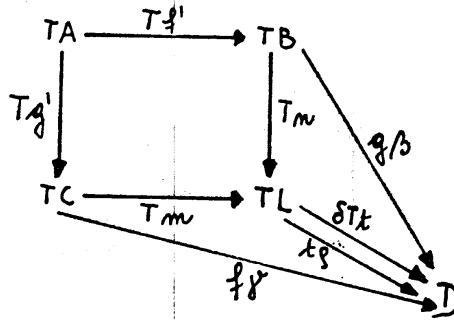
che, come facilmente si verifica, è commutativo.

Esiste dunque un morfismo  $\rho : TL \rightarrow L$  tale che  $\rho Tm = m\gamma$ ,  $\rho Tn = n\beta$ ; verifichiamo che  $(L, \rho)$  è una  $\mathbf{T}$ -algebra.

In primo luogo, il diagramma



è commutativo. Infatti nel diagramma seguente



risulta:

$$(g \beta) T f' = (\delta T g) T f' = \delta (T g T f') = \delta T (g f') =$$

$$\delta T (f g') = \delta (T f T g') = (\delta T f) T g' = (f \gamma) T g' ;$$

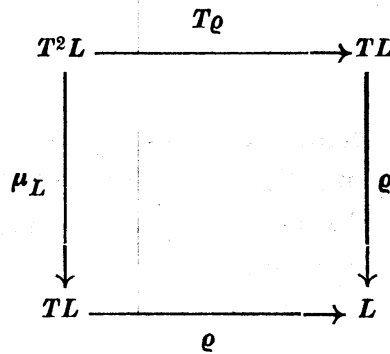
$$(\delta T t) T n = \delta (T t T n) = \delta T (t n) = \delta T g = g \beta,$$

ed analogamente

$$(\delta T t) T m = f \gamma ; \quad (t \rho) T n = g \beta ; \quad (t \rho) T m = f \gamma.$$

Essendo allora  $(T f', T g', T n, T m)$  un push-out, ne segue che  $\delta T t = t \rho$ .

Ciò posto, proviamo ora che



è commutativo.

Si ha infatti:

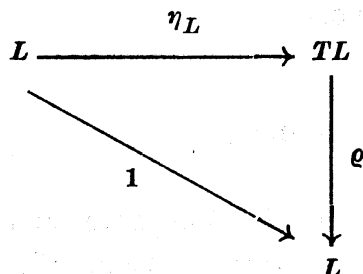
$$t (\rho T \rho) = (t \rho) T \rho = (\delta T t) T \rho = \delta (T t T \rho) = \delta T (t \rho) = \delta T (\delta T t) =$$

$$\delta (T \delta T^2 t) = (\delta T \delta) T^2 t = (\delta \mu_D) T^2 t = \delta (\mu_D T^2 t) = \delta (T t \mu_L) =$$

$$(\delta T t) \mu_L = (t \rho) \mu_L = t (\rho \mu_L).$$

In conclusione  $t(\rho T \rho) = t(\rho \mu_L)$ ; onde, tenendo conto che  $t$  è monic, si perviene alla commutatività del diagramma in discussione.

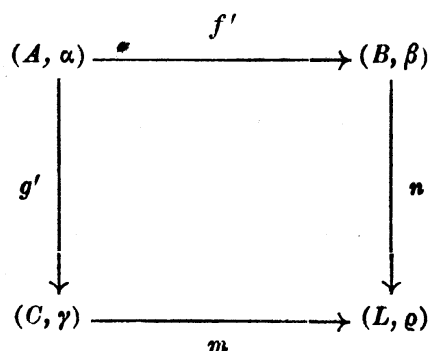
Infine, la commutatività del diagramma



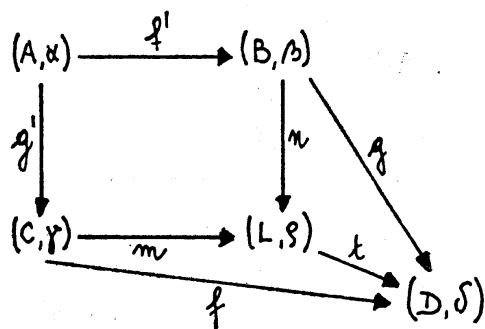
si prova con argomentazioni identiche a quelle sopra esposte.

Rimane dunque accertato che  $(L, \rho)$  è una  $\mathbf{T}$ -algebra e che  $m, n, t$  sono  $\mathbf{T}$ -omomorfismi.

Con facili calcoli si verifica poi che



è un push-out in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ . Poiché il diagramma



è commutativo in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  e  $G^{\mathbf{T}}$  è fedele, se ne deduce che  $t$  è monic anche in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ ; ciò assicura che il quadrato dato sia esatto (in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ ).

La categoria  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  verifica dunque anche la proprietà  $A_2$ , il che conclude la dimostrazione.

## 2. $A_3$ -categorie e $\mathbf{T}$ -algebre.

Sia  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  una categoria di  $\mathbf{T}$ -algebre su una categoria  $\mathcal{C}$  e  $G^{\mathbf{T}}$  il funtore dimenticante la struttura. Generalizzando una definizione di Wyler ([14] pag. 314) poniamo la seguente:

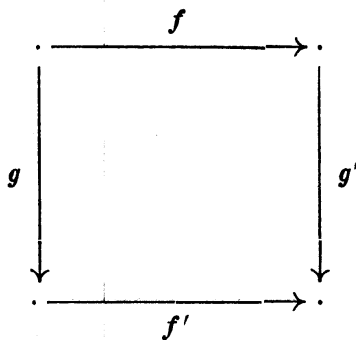
*Definizione 2:* Diremo che un push-out  $(f, g, f', g')$  in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è libero se  $(G^{\mathbf{T}}f, G^{\mathbf{T}}g, G^{\mathbf{T}}f', G^{\mathbf{T}}g')$  è un quadrato  $V$ -esatto in  $\mathcal{C}$ .

Si osservi che se  $\mathcal{C}$  è la categoria degli insiemi, la definizione precedente fornisce quella di push-out libero secondo Wyler ([14]).

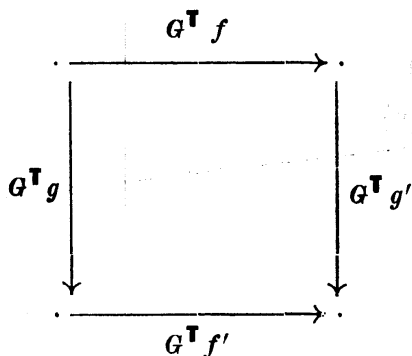
Ciò premesso, verifichiamo che:

2.1. Se  $\mathcal{C}$  è una  $A_3$ -categoria e se ogni  $Q^*$ -push-out (cfr. n. 1) è libero in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ , allora  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è una  $A_3$ -categoria.

DIM: Sia



un  $Q^*$ -push-out in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ . Allora



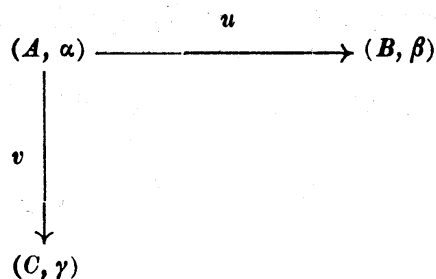
è un quadrato  $V$ -esatto in  $\mathcal{C}$ . Poiché  $G^{\mathbf{T}}$  preserva i limiti, tale quadrato appartiene a  $\mathcal{Q}^*$  in  $\mathcal{C}$ . Tenendo allora conto della proposizione  $A_3$  (cfr. [13]), si verifica facilmente che  $(G^{\mathbf{T}} f, G^{\mathbf{T}} g, G^{\mathbf{T}} g', G^{\mathbf{T}} f')$  è un pull-back, da cui, sfruttando le note proprietà di riflessione di  $G^{\mathbf{T}}$ , si trae che anche  $(f, g, g', f')$  è un pull-back in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ , onde la  $A_3$ .

Ci proponiamo ora di pervenire ad una condizione affinché ogni  $\mathcal{Q}^*$ -push-out in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  sia libero.

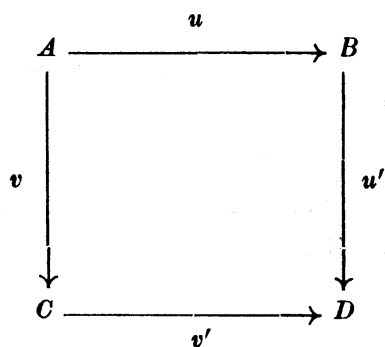
Premettiamo due proposizioni ed una definizione.

2.2. Se  $T, T^2$  preservano i  $\mathcal{Q}^*$ -push-out in  $\mathcal{C}$  (cfr. Def. 1), allora  $G^{\mathbf{T}}$  crea i  $\mathcal{Q}^*$ -push-out.

DIM: Siano



due monic in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  tali che esista un push-out



in  $\mathcal{C}$ .

Poiché  $(u, v, u', v')$  è un  $\mathcal{Q}^*$ -push-out, esso è preservato da  $T$  onde si può canonicamente costruire un morfismo  $\delta: TD \rightarrow D$  (cfr. prop. 1.1.) Sfruttando ora anche la proprietà di preservazione di  $T^2$  si dimostra facilmente che  $(D, \delta)$  è una  $\mathbf{T}$ -algebra, che  $u', v'$  sono  $\mathbf{T}$ -



omomorfismi, e che

$$\begin{array}{ccc}
 (A, \alpha) & \xrightarrow{u} & (B, \beta) \\
 \downarrow v & & \downarrow u' \\
 (C, \gamma) & \xrightarrow{v'} & (D, \delta)
 \end{array}$$

è un push-out in  $\mathcal{E}^{\mathbf{T}}$  (che necessariamente è  $Q^*$ -push-out). Inoltre  $\delta$  è l'unica  $\mathbf{T}$ -struttura su  $D$  per cui  $u', v'$  sono  $\mathbf{T}$ -omomorfismi.

*Definizione 3:* Diremo che  $\mathcal{C}$  ha  $Q^*$ -push-out (o che è una categoria con  $Q^*$ -push-out) se ogni coppia  $u, v$  di monic con lo stesso dominio ammette push-out in  $\mathcal{C}$  (cfr. [7] pag. 55).

2.3. Se  $\mathcal{C}$  ha e  $T, T^2$  preservano i  $Q^*$ -push-out, allora  $G^{\mathbf{T}}$  preserva i  $Q^*$ -push-out.

DIM: Immediata, sfruttando la 2.2 e ben note proprietà dei colimiti. Si noti che  $G^{\mathbf{T}}$  preserva « strettamente » i  $Q^*$ -push-out (cioè muta un  $Q^*$ -push-out proprio in un  $Q^*$ -push-out).

È possibile ora asserire che

2.4. Se  $\mathcal{C}$  ha  $Q^*$ -push-out e  $T, T^2$  li preservano, allora ogni  $Q^*$ -push-out è libero in  $\mathcal{E}^{\mathbf{T}}$ .

DIM: Basta infatti osservare che in particolare  $G^{\mathbf{T}}$  muta  $Q^*$ -push-out in quadrati  $V$ -esatti.

### 3. Conseguenze.

Supponiamo, in tutto questo numero, che  $\mathcal{C}$  sia una categoria con  $Q^*$ -push-out e che  $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$  sia una monade su  $\mathcal{C}$ . Inoltre, conveniamo di chiamare  $A$ -categoria ogni categoria che verifica le proprietà  $A_1, A_2, A_3$  (cfr. introduzione).

3.1. Se  $\mathcal{C}$  è una  $A$ -categoria e se  $T, T^2$  preservano i  $Q^*$ -push-out, allora anche  $\mathcal{E}^{\mathbf{T}}$  è una  $A$ -categoria.

DIM: Infatti  $T$  preserva in particolare i  $Q$ -push-out (cfr. def. 1), onde  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è una  $A_1, A_2$ -categoria (prop. 1.1). Poiché inoltre  $\mathcal{C}$  è una  $A_3$  categoria con  $Q^*$ -push-out preservati da  $T, T^2$ , applicando 2.4 e 2.1 si deduce che pure  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è una  $A_3$ -categoria.

Come conseguenza si ha

3.2. *Se  $\mathcal{C}$  è una  $A$ -categoria e se  $T$  preserva i push-out, allora  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è pure una  $A$ -categoria.*

DIM: Evidentemente, a norma della definizione 1,  $T, T^2$  preservano allora i  $Q^*$ -push-out.

3.3. *Se  $\mathcal{C}$  è una  $A$ -categoria e se  $T$  è cocontinuo, allora  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è ancora una  $A$ -categoria.*

3.4. *Se  $\mathcal{C}$  è una  $A$ -categoria e se  $\mathbf{T}$  è una monade aggiunta su  $\mathcal{C}$  (cfr. [5]), allora  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  è una  $A$ -categoria.*

DIM: Poiché  $T$  è aggiunto sinistro,  $T$  è cocontinuo.

Osserviamo a questo punto che è abbastanza frequente il caso di categorie di « struttura » pensabili come categorie di  $\mathbf{T}$ -algebre associate ad una monade cocontinua  $\mathbf{T}$  (cioè il cui funtore  $T$  sia cocontinuo). Ad esempio, è ben noto che la categoria  ${}_R\mathcal{M}$  degli  $R$ -moduli (sinistri) su un anello unitario  $R$  qualsiasi è equivalente alla categoria  $\mathcal{A}_b^{\mathbf{T}}$ , ove  $\mathcal{A}_b$  è la categoria dei gruppi abeliani e  $\mathbf{T}$  un'opportuna monade cocontinua su  $\mathcal{A}_b$  (cfr. [6] pag. 230 e [10] pag. 138); così la categoria  ${}_A\mathcal{M}$  dei  $A$ -moduli sopra un'associativa ed unitaria  $K$ -algebra  $A$  ( $K$  anello commutativo unitario), può pensarsi ottenuta come categoria  ${}_K\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$ , ove  $\mathbf{T}$  è un'opportuna monade cocontinua su  ${}_K\mathcal{M}$  (cfr. [5] pag. 397 e [8] pag. 84). Ulteriori esempi verranno dati nel seguente n. 4.

Osserviamo ancora che nell'ambito di una teoria delle categorie costruita su un sistema fondazionale di Gödel-Bernays è possibile identificare la nozione di *sottoalgebra* di un'algebra  $(X, \xi)$  di  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  (cfr. [11] pag. 99), con quella di *sottoggetto* di  $(X, \xi)$  in  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$  (cfr. [12] pag. 20 e [13]). Profittando allora dei risultati di [13] si può porre:

3.5. *Con le limitazioni su  $\mathcal{C}, \mathbf{T}$ , poste dalle proposizioni precedenti, la classe delle sottoalgebre di ogni algebra di  $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ , è un reticolo modulare.*

In particolare, la 3.5. permette di individuare funtorialmente classi equazionali di algebre universali su  $\text{Set}$  (categoria degli insiemi) godenti della proprietà reticolare succitata (cfr. prop. 4.4). Infatti è ben noto che ogni classe equazionale  $(\Omega, E)\text{-Alg}$  ( $\Omega$  insieme di operatori,  $E$  insieme di identità) è un'opportuna categoria  $\text{Set}^{\mathbf{T}}$ , e che  $\text{Set}$  è una  $A$ -categoria (cfr. [13]).

#### 4. Applicazioni ed esempi.

Ci proponiamo in questo numero di accennare ad ulteriori conseguenze dei risultati ottenuti. Opereremo pertanto nell'ambito della teoria delle categorie relative ad una categoria chiusa  $V$  ( $V$ -categorie). Per i principali risultati di tale teoria si rinvia alle note [4] (ove categoria chiusa nel nostro senso corrisponde a categoria simmetrica, monoidale, chiusa), [1], [2], [3], [6]. Come in [3] considereremo indifferentemente una  $V$ -categoria  $\mathcal{C}$ , sia come categoria relativa a  $V$ , sia come ordinaria categoria; medesima convenzione verrà fatta per i  $V$ -funtori.

Se  $\mathcal{C}$  è una  $V$ -categoria piccola e  $V^{\mathcal{C}}$  è la categoria (ordinaria) dei  $V$ -funtori  $F: \mathcal{C} \rightarrow V$  e delle  $V$ -trasformazioni naturali fra essi, è possibile assegnare a  $V^{\mathcal{C}}$  struttura di  $V$ -categoria, purché  $V$  sia completa (cfr. [2]).

Un notevole risultato dovuto a Fisher-Palmquist e Newell ([6]) è la seguente caratterizzazione delle  $V$ -categorie  $V^{\mathcal{C}}$  con  $V$  bicompleta.

4.1. *(F-P, N). Ogni  $V$ -categoria  $V^{\mathcal{C}}$  è  $V$ -equivalente alla  $V$ -categoria  $(V^{\mathbf{S}})^{\mathbf{T}}$  delle  $\mathbf{T}$ -algebre per qualche  $V$ -cocontinua  $V$ -monade  $\mathbf{T}$  su  $V^{\mathbf{S}}$ ;  $V^{\mathbf{S}}$  è (a meno di  $V$ -equivalenze) la categoria prodotto di  $S$  copie di  $V$ , dotata opportunamente di  $V$ -struttura, ove  $S$  è l'insieme degli oggetti di  $\mathcal{C}$ .*

Approfittando di questo risultato, diamo una applicazione ai teoremi di « transfer » stabiliti nei numeri precedenti, dimostrando, tramite la 4.1, che:

4.2. *Se  $V$  è una  $A$ -categoria bicompleta, tale è anche la  $V$ -categoria  $V^{\mathcal{C}}$  per ogni  $V$ -categoria piccola  $\mathcal{C}$ .*

La 4.2. si consegue banalmente, ricordando che la  $V$ -equivalenza di  $V$ -categorie è in particolare una equivalenza, dopo aver stabilito che, se  $V$  ha equalizzatori, risulta:

4.3. Se  $\mathcal{A}$  è una  $V$ -categoria con  $V$ -push-out,  $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$  una  $V$ -monade su  $\mathcal{A}$  preservante i  $V$ -push-out, allora la  $V$ -categoria  $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}$  è una  $A$ -categoria se tale è la  $\mathcal{A}$ .

DIM: Osserviamo in primo luogo che, poiché  $V$  ha equalizzatori, la  $V$ -categoria  $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}$  è l'ordinaria categoria delle  $\mathbf{T}$ -algebre associata alla monade (ordinaria)  $\mathbf{T}$  su  $\mathcal{A}$ , dotata canonicamente di  $V$ -struttura rispetto alla quale  $G^{\mathbf{T}}$  è un  $V$ -funtoe (cfr. [9]). D'altra parte, poiché  $\mathcal{A}$  ha  $V$ -push-out,  $\mathcal{A}$  ha anche push-out ordinari e le due nozioni coincidono (infatti il funtoe rappresentabile  $\mathcal{A}(-, A): \mathcal{A} \rightarrow V$ , muta push-out in pull-back, per ogni  $A \in \mathcal{A}$ ). Il funtoe  $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  di  $\mathbf{T}$ , preserva allora i push-out, onde la tesi applicando la 3.2.

Osserviamo ancora per completezza che la  $V$ -categoria  $V^{\mathbf{S}}$ , di cui alla 4.1., ha sicuramente  $V$ -push-out, ed essendo (a meno di  $V$ -equivalenze) la categoria prodotto  $V^{\mathbf{S}}$  ( $V$ -strutturata), è una  $A$ -categoria se e solo se lo è  $V$ .

A questo punto diamo una proposizione conclusiva che, poggiando sui risultati conseguiti, fornisce anche classi di  $A$ -categorie.

4.4. Sono  $A$ -categorie:

a) Ogni  $\text{Set}^{\mathcal{C}}$ , categoria dei funtori ordinari  $\text{Set}$  valutati da una categoria piccola qualsiasi;

b) Ogni  $[\mathcal{C}^*, \text{Set}^*]^*$ , categoria dei funtori « puntati » (ed ordinarie trasformazioni naturali) da una categoria « puntata » piccola  $\mathcal{C}^*$ , alla categoria degli insiemi con punto base  $\text{Set}^*$ ;

c) Ogni  $(\text{Set}^{\mathcal{C}})^{\mathbf{T}}$ ,  $([\mathcal{C}^*, \text{Set}^*]^*)^{\mathbf{T}}$ , ove  $\mathbf{T}$  è una monade preservante i push-out;

d) Ogni  $\mathcal{A}^{\mathbf{T}}$ , ove  $\mathcal{A}$  è una categoria abeliana e  $\mathbf{T}$  è una monade preservante i push-out;

e) La categoria delle « azioni » di un gruppo  $G$  o di un monoide unitario  $M$  ed omomorfismi relativi.

DIM: Per i punti a), b) basta interpretare la 4.2. ponendo  $V = \text{Set}$  o  $V = \text{Set}^*$  e ricordando che, mentre la  $\text{Set}$ -teoria delle categorie è l'ordinaria teoria delle categorie, ogni  $\text{Set}^*$ -categoria è una categoria « puntata » (con zero-morfismi), ogni  $\text{Set}^*$ -funtoe è un funtoe « puntato » (preservante gli zero-morfismi), mentre le  $\text{Set}^*$ -trasformazioni natu-

rali coincidono con le ordinarie trasformazioni naturali poiché il funtore « basico »  $\text{Set}_0^*(I, -): \text{Set}^* \rightarrow \text{Set}$  (ove  $I$  è l'unità di  $\text{Set}^*$ ) è fedele. Si osservi inoltre che  $\text{Set}^*$  è una  $A$ -categoria.

Per i punti  $c)$ ,  $d)$  si può applicare direttamente la 3.2, dopo aver osservato che le categorie in questione sono con push-out.

Al punto  $e)$  si ricordi che le categorie in oggetto possono pensarsi come categorie di  $\mathbf{T}$ -algebre associate ad una opportuna monade cocontinua  $\mathbf{T}$  su  $\text{Set}$ .

### BIBLIOGRAFIA

- [1] BUNGE M., *Relative functor categories and categories of algebras*, J. of Algebra 11 (1969), 64-101.
- [2] DAY B. J. and KELLY G. M., *Enriched functor categories*, «Lecture Notes Vol. 106», 178-191, Springer Verlag, New-York, Berlin (1969).
- [3] DUBUC E., *Kan extensions in enriched category theory*, «Lecture Notes Vol. 145», Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1970).
- [4] EILEMBERG S. and KELLY G. M., *Closed categories*, Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, 421-562.
- [5] EILEMBERG S. and MOORE J. C., *Adjoint functors and triples*, Ill. J. Math. 9 (1965), 381-398.
- [6] FISHER-PALMQUIST J. and NEWELL D., *Triples on functor categories*, J. of Algebra 25 (1973), 226-258.
- [7] LINTON F. E. J., *Applied functorial semantics*, II, «Lecture Notes Vol. 80», 53-74, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).
- [8] LINTON F. E. J., *Coequalizers in categories of algebras*, «Lecture Notes, Vol. 80», 75-90, Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1969).
- [9] LINTON F. E. J., *Relative functorial semantics: adjointness results*, «Lecture Notes Vol. 99», 384-416, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).
- [10] MAC LANE S., *Categories for the Working mathematician*, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1971).
- [11] MANES E., *A triple theoretic construction of compact algebras*, «Lecture Notes Vol. 80», 91-118, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).
- [12] PAREIGIS B., *Categories and functors*, Academic Press, New-York, London (1970).
- [13] ROSSI F., *Sul reticolo dei sottoggetti di un oggetto in una certa classe di categorie*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, VI-2 (1974) 205-215.
- [14] WYLER O., *Operational categories*, Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, 295-316.