A - CATEGORIE E T - ALGEBRE (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si assegnano dei teoremi di «transfer» di A-proprietà per V-categorie di* $\mathbf{T}$*-algebre associate ad un' opportuna V-monade* $\mathbf{T}$ *su una V-categoria* $\mathscr{A}$.

SUMMARY. - *In this paper are given some «transfer» theorems of A-properties for V-categories of* $\mathbf{T}$*-algebras associated to some V-triple* $\mathbf{T}$ *on a V-category* $\mathscr{A}$.

Introduzione.

Un recente risultato, dovuto a Fisher-Palmquist e Newell (cfr. [6]), asserisce che se $\mathbf{T}$ è una monade sulla categoria $\mathscr{A}_b$ dei gruppi abeliani con funtore cocontinuo ed additivo, esiste un anello (unitario) R tale che la categoria $\mathscr{A}_b^{\mathbf{T}}$ delle $\mathbf{T}$-algebre associata a $\mathbf{T}$, sia equivalente alla categoria ${}_R\mathcal{M}$ degli R-moduli (sinistri).

Poiché le categorie $\mathscr{A}_b$ ed ${}_R\mathcal{M}$, essendo abeliane, sono A-categorie (verificanti cioè le proprietà A_1, A_2, A_3 di cui in [13]), il precedente risultato assicura che ogni categoria $\mathscr{A}_b^{\mathbf{T}}$, con $\mathbf{T}$ monade verificante la condizione predetta, è ancora una A-categoria.

D'altra parte, formulando il risultato richiamato nell'ambito della teoria delle categorie «relative» ad una categoria chiusa (cfr. [1], [3], [2], [6]) si può anche dire che ogni $\mathscr{A}_b$-categoria $\mathscr{A}_b^{\mathbf{T}}$, con $\mathbf{T}$ una $\mathscr{A}_b$-monade $\mathscr{A}_b$-cocontinua, è una A-categoria.

(*) Pervenuto in Redazione il 7 ottobre 1975.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa, 1-34100 Trieste.

Queste considerazioni suggeriscono allora lo studio delle A-categorie in relazione alle categorie di $\mathbf{T}$-algebre relative ad una qualsiasi categoria chiusa (dotata, naturalmente, di equalizzatori).

In questa nota si affronta tale studio prendendo dapprima in considerazione il caso delle categorie ordinarie (Set-categorie) e stabilendo certi risultati relativi a teoremi di « transfer » di A-proprietà alle categorie di $\mathbf{T}$-algebre (nn. 1, 2, 3). Poggiando su di essi, si stabilisce, fra l'altro, che ogni V-categoria $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$, con $\mathbf{T}$ V-monade preservante i V-push-out su una V-categoria $\mathscr{A}$ con V-push-out, è una A-categoria, se tale è $\mathscr{A}$. Si generalizza così quanto detto in precedenza a proposito della categoria $\mathscr{A}_b$.

Questi risultati forniscono, da un lato, un metodo funtoriale d'indagine sui reticoli di sottoalgebre in categorie algebriche, dall'altro, la possibilità di costruire nuove classi di A-categorie (n. 4). Fra quest'ultime si trovano, in particolare, tutte le V-categorie di V-funtori e V-trasformazioni naturali $V^{\mathcal{C}}$, relative ad una A-categoria chiusa e bicompleta V; a tale conclusione si può giungere ricorrendo ad una recente caratterizzazione di $V^{\mathcal{C}}$ nell'ambito delle categorie di $\mathbf{T}$-algebre relative a V (cfr. [6]).

1. A_1, A_2-categorie (0) e $\mathbf{T}$-algebre.

Siano $\mathcal{C}$ una categoria, T un endofuntore di $\mathcal{C}$, Q la classe dei quadrati commutativi di *monic* (cfr. [10]) in $\mathcal{C}$, Q^* quella dei quacon f, g (almeno) monic.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g'"] \\ \cdot \arrow[r, "f'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

con f, g (almeno) monic.

(0) Converremo di chiamare A_1, A_2-categoria (A_3-categoria), ogni categoria verificante le proprietà A_1, A_2 (A_3) di cui a [13]; è opportuno inoltre rilevare che nella proposizione 1.2 di [13] al punto *b*) si è omessa, in sede di stampa, la precisazione: « ($\neq \emptyset$) ».

Seguendo Linton ([7] pag. 55) poniamo la seguente

Definizione 1. Diremo che T *preserva* i $\mathcal{Q}$-push-out (i $\mathcal{Q}^*$-push-out) se, per ogni push-out (g, f, g', f') con $(g, f, g', f') \in \mathcal{Q}$ $(\in \mathcal{Q}^*)$, risulta che (Tg, Tf, Tg', Tf') è un push-out (*non* necessariamente in $\mathcal{Q}$ (in $\mathcal{Q}^*$)).

1.1. *Se* $\mathcal{C}$ *è una* A_1, A_2*-categoria e* $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ *è una monade su* $\mathcal{C}$ *il cui funtore* T *preserva i* $\mathcal{Q}$*-push-out, allora la categoria* $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ *delle* $\mathbf{T}$*-algebre associata a* $\mathbf{T}$, *è pure una* A_1, A_2*-categoria.*

DIM: Indichiamo con $G^{\mathbf{T}} : \mathcal{C}^{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathcal{C}$ il funtore « dimenticante ». Poiché $G^{\mathbf{T}}$ preserva i limiti (come aggiunto destro al funtore libero $F^{\mathbf{T}}$) ed inoltre, come ben noto, anche li crea, si deduce immediatamente che $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è A_1-categoria.

Verifichiamo ora che $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ gode di A_2.

Sia

$$\begin{tikzcd}
(A, \alpha) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & (B, \beta) \arrow[d, "g"] \\
(C, \gamma) \arrow[r, "f"'] & (D, \delta)
\end{tikzcd}$$

un pull-back di monic in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$. Il quadrato in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$

dimenticato da $G^{\mathbf{T}}$ è allora, per quanto detto in precedenza, ancora un pull-back di monic. Esso è dunque, a norma di A_2, un quadrato V-esatto in $\mathcal{C}$ (cfr. [13]). Esiste allora un push-out (f', g', n, m) tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f'"] \arrow[dd, "g'"'] & & B \arrow[dl, "n"'] \arrow[dd, "g"] \\
& L \arrow[dr, "t"] & \\
C \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "f"'] & & D
\end{tikzcd}$$

sia commutativo, con t monic. Poiché (f', g', n, m) è un Q-push-out, esso è preservato da T, onde (Tf', Tg', Tn, Tm) è un push-out.

Consideriamo allora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf'"] \arrow[d, "Tg'"'] & TB \arrow[d, "Tn"] \arrow[ddr, "n\beta"] & \\
TC \arrow[r, "Tm"] \arrow[drr, "m\gamma"'] & TL \arrow[dr, dashed, "\rho"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

che, come facilmente si verifica, è commutativo.

Esiste dunque un morfismo $\rho : TL \to L$ tale che $\rho Tm = m\gamma$, $\rho Tn = n\beta$; verifichiamo che (L, ρ) è una $\mathbf{T}$-algebra.

In primo luogo, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
TL \arrow[r, "Tt"] \arrow[d, "\rho"'] & TD \arrow[d, "\delta"] \\
L \arrow[r, "t"'] & D
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Infatti nel diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "Tf'"] \arrow[d, "Tg'"'] & TB \arrow[d, "Tn"] \arrow[dr, "g\beta"] & \\
TC \arrow[r, "Tm"] \arrow[rr, bend right, "f\gamma"'] & TL \arrow[r, shift left, "\delta Tt"] \arrow[r, shift right, "t\rho"'] & D
\end{tikzcd}$$

risulta:

$$(g\,\beta)\,Tf' = (\delta\,Tg)\,Tf' = \delta\,(Tg\,Tf') = \delta\,T\,(gf') =$$

$$\delta\,T\,(fg') = \delta\,(Tf\,Tg') = (\delta\,Tf)\,Tg' = (f\,\gamma)\,Tg'\ ;$$

$$(\delta\,Tt)\,Tn = \delta\,(Tt\,Tn) = \delta\,T\,(tn) = \delta\,Tg = g\,\beta,$$

ed analogamente

$$(\delta\,Tt)\,Tm = f\,\gamma; \quad (t\,\rho)\,Tn = g\,\beta; \quad (t\,\rho)\,Tm = f\,\gamma.$$

Essendo allora (Tf', Tg', Tn, Tm) un push-out, ne segue che $\delta\,Tt = t\,\rho$.

Ciò posto, proviamo ora che

$$\begin{tikzcd}
T^2L \arrow[r, "T\varrho"] \arrow[d, "\mu_L"'] & TL \arrow[d, "\varrho"] \\
TL \arrow[r, "\varrho"'] & L
\end{tikzcd}$$

è commutativo.

Si ha infatti:

$$t\,(\rho\,T\,\rho) = (t\,\rho)\,T\,\rho = (\delta\,Tt)\,T\rho = \delta\,(Tt\,T\,\rho) = \delta\,T\,(t\,\rho) = \delta\,T\,(\delta\,Tt) =$$

$$\delta\,(T\,\delta\,T^2\,t) = (\delta\,T\,\delta)\,T^2\,t = (\delta\,\mu_D)\,T^2\,t = \delta\,(\mu_D\,T^2\,t) = \delta\,(Tt\,\mu_L) =$$

$$(\delta\,Tt)\,\mu_L = (t\,\rho)\,\mu_L = t\,(\rho\,\mu_L).$$

In conclusione $t(\rho\, T\, \rho) = t(\rho\, \mu_L)$; onde, tenendo conto che t è monic, si perviene alla commutatività del diagramma in discussione.

Infine, la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "1"'] & TL \arrow[d, "\varrho"] \\
 & L
\end{tikzcd}$$

si prova con argomentazioni identiche a quelle sopra esposte.

Rimane dunque accertato che (L, ρ) è una $\mathbf{T}$-algebra e che m, n, t sono $\mathbf{T}$-omomorfismi.

Con facili calcoli si verifica poi che

$$\begin{tikzcd}
(A, \alpha) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & (B, \beta) \arrow[d, "n"] \\
(C, \gamma) \arrow[r, "m"'] & (L, \varrho)
\end{tikzcd}$$

è un push-out in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$. Poiché il diagramma

$$\begin{tikzcd}
(A, \alpha) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & (B, \beta) \arrow[d, "n"] \arrow[ddr, "g"] & \\
(C, \gamma) \arrow[r, "m"'] \arrow[drr, "f"'] & (L, \varrho) \arrow[dr, "t"] & \\
 & & (D, \delta)
\end{tikzcd}$$

è commutativo in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ e $G^{\mathbf{T}}$ è fedele, se ne deduce che t è monic anche in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$; ciò assicura che il quadrato dato sia esatto (in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$).

La categoria $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ verifica dunque anche la proprietà A_2, il che conclude la dimostrazione.

2. A_3-categorie e T-algebre.

Sia $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ una categoria di $\mathbf{T}$-algebre su una categoria $\mathcal{C}$ e $G^{\mathbf{T}}$ il funtore dimenticante la struttura. Generalizzando una definizione di Wyler ([14] pag. 314) poniamo la seguente:

Definizione 2: Diremo che un push-out (f, g, f', g') in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è *libero* se $(G^{\mathbf{T}} f, G^{\mathbf{T}} g, G^{\mathbf{T}} f', G^{\mathbf{T}} g')$ è un quadrato V-esatto in $\mathcal{C}$.

Si osservi che se $\mathcal{C}$ è la categoria degli insiemi, la definizione precedente fornisce quella di push-out libero secondo Wyler ([14]).

Ciò premesso, verifichiamo che:

2.1. *Se $\mathcal{C}$ è una A_3-categoria e se ogni Q^*-push-out* (*cfr. n.* 1) *è libero in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$, allora $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è una A_3-categoria.*

DIM: Sia

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \cdot \arrow[d, "g'"] \\ \cdot \arrow[r, "f'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

un Q^*-push-out in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$. Allora

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "G^{\mathbf{T}} f"] \arrow[d, "G^{\mathbf{T}} g"'] & \cdot \arrow[d, "G^{\mathbf{T}} g'"] \\ \cdot \arrow[r, "G^{\mathbf{T}} f'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

è un quadrato V-esatto in $\mathcal{C}$. Poiché $G^{\mathbf{T}}$ preserva i limiti, tale quadrato appartiene a Q^* in $\mathcal{C}$. Tenendo allora conto della proposizione A_3 (cfr. [13]), si verifica facilmente che $(G^{\mathbf{T}} f, G^{\mathbf{T}} g, G^{\mathbf{T}} g', G^{\mathbf{T}} f')$ è un pull-back, da cui, sfruttando le note proprietà di riflessione di $G^{\mathbf{T}}$, si trae che anche (f, g, g', f') è un pull-back in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$, onde la A_3.

Ci proponiamo ora di pervenire ad una condizione affinché ogni Q^*-push-out in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ sia libero.

Premettiamo due proposizioni ed una definizione.

2.2. *Se T, T^2 preservano i Q^*-push-out in $\mathcal{C}$ (cfr. Def. 1), allora $G^{\mathbf{T}}$ crea i Q^*-push-out.*

DIM: Siano

$$\begin{tikzcd}
(A, \alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (B, \beta) \\
(C, \gamma) &
\end{tikzcd}$$

due monic in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ tali che esista un push-out

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[d, "u'"] \\
C \arrow[r, "v'"'] & D
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$.

Poiché (u, v, u', v') è un Q^*-push-out, esso è preservato da T onde si può canonicamente costruire un morfismo δ: $TD \rightarrow D$ (cfr. prop. 1.1.) Sfruttando ora anche la proprietà di preservazione di T^2 si dimostra facilmente che (D, δ) è una $\mathbf{T}$-algebra, che u', v' sono $\mathbf{T}$-

omomorfismi, e che

$$\begin{tikzcd}
(A,\alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (B,\beta) \arrow[d, "u'"] \\
(C,\gamma) \arrow[r, "v'"'] & (D,\delta)
\end{tikzcd}$$

è un push-out in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ (che necessariamente è Q*-push-out). Inoltre δ è l'unica $\mathbf{T}$-struttura su D per cui u', v' sono $\mathbf{T}$-omomorfismi.

Definizione 3: Diremo che $\mathcal{C}$ *ha* Q**-push-out* (o che è una categoria *con* Q**-push-out*) se ogni coppia u, v di monic con lo stesso dominio ammette push-out in $\mathcal{C}$ (cfr. [7] pag. 55).

2.3. *Se* $\mathcal{C}$ *ha e* T, T^2 *preservano i* Q**-push-out, allora* $G^{\mathbf{T}}$ *preserva i* Q**-push-out.*

DIM: Immediata, sfruttando la 2.2 e ben note proprietà dei colimiti. Si noti che $G^{\mathbf{T}}$ preserva « strettamente » i Q*-push-out (cioè muta un Q*-push-out proprio in un Q*-push-out).

È possibile ora asserire che

2.4. *Se* $\mathcal{C}$ *ha* Q**-push-out e* T, T^2 *li preservano, allora ogni* Q**-push-out è libero in* $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$.

DIM: Basta infatti osservare che in particolare $G^{\mathbf{T}}$ muta Q*-push-out in quadrati V-esatti.

3. Conseguenze.

Supponiamo, in tutto questo numero, che $\mathcal{C}$ sia una categoria *con* Q**-push-out e che* $\mathbf{T}=(T,\eta,\mu)$ sia una monade su $\mathcal{C}$. Inoltre, conveniamo di chiamare *A-categoria* ogni categoria che verifica le proprietà A_1, A_2, A_3 (cfr. introduzione).

3.1. *Se* $\mathcal{C}$ *è una A-categoria e se* T, T^2 *preservano i* Q**-push-out, allora anche* $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ *è una A-categoria.*

DIM: Infatti T preserva in particolare i Q-push-out (cfr. def. 1), onde $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è una A_1, A_2-categoria (prop. 1.1). Poiché inoltre $\mathcal{C}$ è una A_3 categoria con Q^*-push-out preservati da T, T^2, applicando 2.4 e 2.1 si deduce che pure $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è una A_3-categoria.

Come conseguenza si ha

3.2. *Se $\mathcal{C}$ è una A-categoria e se T preserva i push-out, allora $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è pure una A-categoria.*

DIM: Evidentemente, a norma della definizione 1, T, T^2 preservano allora i Q^*-push-out.

3.3. *Se $\mathcal{C}$ è una A-categoria e se T è cocontinuo, allora $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è ancora una A-categoria.*

3.4. *Se $\mathcal{C}$ è una A-categoria e se $\mathbf{T}$ è una monade aggiunta su $\mathcal{C}$ (cfr.* [5]*), allora $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ è una A-categoria.*

DIM: Poiché T è aggiunto sinistro, T è cocontinuo.

Osserviamo a questo punto che è abbastanza frequente il caso di categorie di « struttura » pensabili come categorie di $\mathbf{T}$-algebre associate ad una monade cocontinua $\mathbf{T}$ (cioè il cui funtore T sia cocontinuo). Ad esempio, è ben noto che la categoria ${}_R\mathcal{M}$degli R-moduli (sinistri) su un anello unitario R qualsiasi è equivalente alla categoria $\mathcal{A}_b^{\mathbf{T}}$, ove $\mathcal{A}_b$ è la categoria dei gruppi abeliani e $\mathbf{T}$ un'opportuna monade cocontinua su $\mathcal{A}_b$ (cfr. [6] pag. 230 e [10] pag. 138); così la categoria ${}_\Lambda\mathcal{M}$ dei Λ-moduli sopra un'associativa ed unitaria K-algebra Λ (K anello commutativo unitario), può pensarsi ottenuta come categoria ${}_K\mathcal{M}^{\mathbf{T}}$, ove $\mathbf{T}$ è un'opportuna monade cocontinua su ${}_K\mathcal{M}$(cfr. [5] pag. 397 e [8] pag. 84). Ulteriori esempi verranno dati nel seguente n. 4.

Osserviamo ancora che nell'ambito di una teoria delle categorie costruita su un sistema fondazionale di Gödel-Bernays è possibile identificare la nozione di *sottoalgebra* di un'algebra (X, ξ) di $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ (cfr. [11] pag. 99), con quella di *sottoggetto* di (X, ξ) in $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ (cfr. [12] pag. 20 e [13]). Profittando allora dei risultati di [13] si può porre:

3.5. *Con le limitazioni su $\mathcal{C}, \mathbf{T}$, poste dalle proposizioni precedenti, la classe delle sottoalgebre di ogni algebra di $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$, è un reticolo modulare.*

In particolare, la 3.5. permette di individuare funtorialmente classi equazionali di algebre universali su Set (categoria degli insiemi) godenti della proprietà reticolare succitata (cfr. prop. 4.4). Infatti è ben noto che ogni classe equazionale (Ω, E)-Alg (Ω insieme di operatori, E insieme di identità) è un'opportuna categoria Set$^{\mathbf{T}}$, e che Set è una A-categoria (cfr. [13]).

4. Applicazioni ed esempi.

Ci proponiamo in questo numero di accennare ad ulteriori conseguenze dei risultati ottenuti. Opereremo pertanto nell'ambito della teoria delle categorie relative ad una categoria chiusa V (V-categorie). Per i principali risultati di tale teoria si rinvia alle note [4] (ove categoria chiusa nel nostro senso corrisponde a caegoria simmetrica, monoidale, chiusa), [1], [2], [3], [6]. Come in [3] considereremo indifferentemente una V-categoria $\mathcal{C}$, sia come categoria relativa a V, sia come ordinaria categoria; medesima convenzione verrà fatta per i V-funtori.

Se $\mathcal{C}$ è una V-categoria piccola e $V^{\mathcal{C}}$ è la categoria (ordinaria) dei V-funtori $F\colon \mathcal{C} \to V$ e delle V-trasformazioni naturali fra essi, è possibile assegnare a $V^{\mathcal{C}}$ struttura di V-categoria, purché V sia completa (cfr. [2]).

Un notevole risultato dovuto a Fisher-Palmquist e Newell ([6]) è la seguente caratterizzazione delle V-categorie $V^{\mathcal{C}}$ con V bicompleta.

4.1. $(F-P, N)$. *Ogni V-categoria $V^{\mathcal{C}}$ è V-equivalente alla V-categoria $(V^{\mathbf{S}})^{\mathbf{T}}$ delle $\mathbf{T}$-algebre per qualche V-cocontinua V-monade $\mathbf{T}$ su $V^{\mathbf{S}}$; $V^{\mathbf{S}}$ è (a meno di V-equivalenze) la categoria prodotto di S copie di V, dotata opportunamente di V-struttura, ove S è l'insieme degli oggetti di $\mathcal{C}$.*

Approfittando di questo risultato, diamo una applicazione ai teoremi di « transfer » stabiliti nei numeri precedenti, dimostrando, tramite la 4.1, che:

4.2. *Se V è una A-categoria bicompleta, tale è anche la V-categoria $V^{\mathcal{C}}$ per ogni V-categoria piccola $\mathcal{C}$.*

La 4.2. si consegue banalmente, ricordando che la V-equivalenza di V-categorie è in particolare una equivalenza, dopo aver stabilito che, se V ha equalizzatori, risulta:

4.3. *Se $\mathscr{A}$ è una V-categoria con V-push-out,* $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ *una V-monade su $\mathscr{A}$ preservante i V-push-out, allora la V-categoria $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ è una A-categoria se tale è la $\mathscr{A}$.*

DIM: Osserviamo in primo luogo che, poiché V ha equalizzatori, la V-categoria $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ è l'ordinaria categoria delle $\mathbf{T}$-algebre associata alla monade (ordinaria) $\mathbf{T}$ su $\mathscr{A}$, dotata canonicamente di V-struttura rispetto alla quale $G^{\mathbf{T}}$ è un V-funtore (cfr. [9]). D'altra parte, poiché $\mathscr{A}$ ha V-push-out, $\mathscr{A}$ ha anche push-out ordinari e le due nozioni coincidono (infatti il funtore rappresentabile $\mathscr{A}(-, A)\colon \mathscr{A} \to V$, muta push-out in pull-back, per ogni $A \in \mathscr{A}$). Il funtore $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ di $\mathbf{T}$, preserva allora i push-out, onde la tesi applicando la 3.2.

Osserviamo ancora per completezza che la V-categoria $V^{\mathbf{S}}$, di cui alla 4.1., ha sicuramente V-push-out, ed essendo (a meno di V-equivalenze) la categoria prodotto V^S (V-strutturata), è una A-categoria se e solo se lo è V.

A questo punto diamo una proposizione conclusiva che, poggiando sui risultati conseguiti, fornisce anche classi di A-categorie.

4.4. *Sono A-categorie:*

a) Ogni $Set^{\mathcal{C}}$, *categoria dei funtori ordinari Set valutati da una categoria piccola qualsiasi;*

b) Ogni $[\mathcal{C}^*, Set^*]^*$, *categoria dei funtori « puntati » (ed ordinarie trasformazioni naturali) da una categoria « puntata » piccola* $\mathcal{C}^*$, *alla categoria degli insiemi con punto base Set*;*

c) Ogni $(Set^{\mathcal{C}})^{\mathbf{T}}$, $([\mathcal{C}^*, Set^*]^*)^{\mathbf{T}}$, *ove* $\mathbf{T}$ *è una monade preservante i push-out;*

d) Ogni $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$, *ove* $\mathscr{A}$ *è una categoria abeliana e* $\mathbf{T}$ *è una monade preservante i push-out;*

e) La categoria delle « azioni » di un gruppo G o di un monoide unitario M ed omomorfismi relativi.

DIM: Per i punti *a*), *b*) basta interpretare la 4.2. ponendo $V=$ Set o $V=$ Set* e ricordando che, mentre la Set-teoria delle categorie è l'ordinaria teoria delle categorie, ogni Set*-categoria è una categoria « puntata » (con zero-morfismi), ogni Set*-funtore è un funtore « puntato » (preservante gli zero-morfismi), mentre le Set*-trasformazioni naturali coincidono con le ordinarie trasformazioni naturali poiché il funtore « basico » $\mathrm{Set}_0^*(I, -)$: $\mathrm{Set}^* \to \mathrm{Set}$ (ove I è l'unità di Set^*) è fedele. Si osservi inoltre che Set^* è una A-categoria.

Per i punti *c*), *d*) si può applicare direttamente la 3.2, dopo aver osservato che le categorie in questione sono con push-out.

Al punto *e*) si ricordi che le categorie in oggetto possono pensarsi come categorie di **T**-algebre associate ad una opportuna monade cocontinua **T** su Set.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUNGE M., *Relative functor categories and categories of algebras,* J. of Algebra 11 (1969), 64-101.

[2] DAY B. J. and KELLY G. M., *Enriched functor categories,* «Lecture Notes Vol. 106», 178-191, Springer Verlag, New-York, Berlin (1969).

[3] DUBUC E., *Kan extensions in enriched category theory,* «Lecture Notes Vol. 145», Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1970).

[4] EILEMBERG S. and KELLY G. M., *Closed categories,* Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, 421-562.

[5] EILEMBERG S. and MOORE J. C., *Adjoint functors and triples,* Ill. J. Math. 9 (1965), 381-398.

[6] FISHER-PALMQUIST J. and NEWELL D., *Triples on functor categories,* J. of Algebra 25 (1973), 226-258.

[7] LINTON F. E. J., *Applied functorial semantics,* II, «Lecture Notes Vol. 80», 53-74, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).

[8] LINTON F. E. J., *Coequalizers in categories of algebras,* «Lecture Notes, Vol. 80», 75-90, Springer-Verlag, New-York, Berlin, (1969).

[9] LINTON F. E. J., *Relative functorial semantics: adjointness results,* «Lecture Notes Vol. 99», 384-416, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).

[10] MAC LANE S., *Categories for the Working mathematician,* Springer-Verlag, New-York, Berlin (1971).

[11] MANES E., *A triple theoretic construction of compact algebras,* «Lecture Notes Vol. 80», 91-118, Springer-Verlag, New-York, Berlin (1969).

[12] PAREIGIS B., *Categories and functors,* Academic Press, New-York, London (1970).

[13] ROSSI F., *Sul reticolo dei sottoggetti di un oggetto in una certa classe di categorie,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, VI-2 (1974) 205-215.

[14] WYLER O., *Operational categories,* Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer-Verlag, 295-316.