SU ALCUNE INVARIANTI CARDINALI IN SPAZI TOPOLOGICI (*)

di Romano Isler e Gino Tironi (a Trieste) (**)

Sommario. - *Vengono studiate alcune invarianti cardinali introdotte da Arhangel'skii, invarianti che, a nostro avviso, sono degne di grande interesse. Si stabilisce nel par 1 un ordine totale fra tali invarianti; nei par. 2 e 3 si cercano condizioni sotto le quali esse sono uguali, e si danno esempi nei quali l'ordine è stretto. In particolare nel par. 3 si analizzano la « bitightness » e la « divergence » e si trova uno spazio topologico nel quale sono differenti.*

Summary. - *Some cardinal invariants introduced by Arhangel'skii and which in our opinion are of great interest, are studied in this paper. Such invariants are compared and totally ordered in par. 1; in par. 2 and 3 we discuss such order looking for conditions of equality between the invariants and giving some examples in which the order is strong. Particularly in par. 3 we analyse the invariants bitightness and divergence and prove that in a particular topological space they are different.*

Introduzione.

Recentemente alcuni risultati ottenuti da Arhangel'skii ed altri nella risoluzione di annosi e classici problemi hanno rivelato l'importanza di alcune invarianti (o funzioni) cardinali di uno spazio topologico, che si sono aggiunte a quelle ormai classiche come il peso e il carattere.

(*) Pervenuto in Redazione l'1 settembre 1975.
(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Università, Piazzale Europa, 1 - 34100 Trieste.

In questo lavoro vengono analizzate alcune di tali invarianti introdotte da Arhangel'skii che, a nostro avviso, sembrano avere notevole interesse. Dopo averle definite e confrontate nel paragrafo 1, nei paragrafi 2 e 3 vengono analizzate le disuguaglianze deboli stabilite nel paragrafo 1, dando delle condizioni per l'uguaglianza e trovando esempi in cui le disuguaglianze valgono in senso forte. In particolare nel paragrafo 3 vengono considerate le invarianti $bt(X)$ e $\operatorname{div}(X)$ e si dimostra che esse non sempre coincidono. Ciò ci sembra degno di nota poiché finora la nozione di $\operatorname{div}(X)$ non era stata esplicitamente usata.

1. Indicheremo con $|M|$ la cardinalità di M; con $\exp_\tau M$ indicheremo l'insieme dei sottoinsiemi di M aventi cardinalità non maggiore del numero cardinale τ.

DEFINIZIONE 1. Dicesi *Strettezza* (tightness) *debole* $t_w(X)$ di uno spazio topologico X il minimo numero cardinale τ tale che, se $M \subset X$ ed $M \neq \overline{M}$, allora esiste $x \in \overline{M} - M$ ed un sottoinsieme $M' \subset M$ per cui $x \in \overline{M'}$ e $|M'| \leqq \tau$.

DEFINIZIONE 1'. Dicesi *strettezza locale* $t(x, X)$ in un punto x di uno spazio topologico X il minimo numero cardinale τ tale che, se $x \in \overline{A}$, allora esiste un sottoinsieme B di A tale che $|B| \leqq \tau$ e $x \in \overline{B}$.

Dicesi *strettezza* $t(X)$ di uno spazio topologico X il numero cardinale $t(X) = \sup_{x \in X} t(x, X)$.

DEFINIZIONE 2. Dicesi *bistrettezza* (bitightness) $bt(X)$ di uno spazio topologico X il minimo numero cardinale τ tale che, se $M \subset X$ e $\overline{M} \neq M$, allora esistono $x \in \overline{M} - M$ e una famiglia λ contenuta in $\exp_\tau M$ per la quale si ha $|\lambda| \leqq \tau$ e $\{x\} = \cap \{\overline{P}: P \in \lambda\}$.

Diciamo che una famiglia ξ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X è centrata se gode della proprietà dell'intersezione finita; diciamo che ξ converge a un punto $x \in X$ se in ogni intorno di x cade almeno un insieme di ξ.

DEFINIZIONE 3. Dicesi *divergenza* $\operatorname{div}(X)$ di uno spazio topologico X il minimo numero cardinale τ tale che, se $M (\subset X) \neq \overline{M}$, esistono $x \in \overline{M} - M$ ed una famiglia centrata $\xi \subset \exp_\tau M$ convergente ad x, con $|\xi| \leqq \tau$.

DEFINIZIONE 4. Dicesi *carattere locale* $\chi(x, X)$ di uno spazio topologico X in un suo punto x la minima cardinalità di una base di intorni di x.

Dicesi *carattere* dello spazio X il numero cardinale $\chi(X) = \sup_{x \in X} \chi(x, X)$.

Osserviamo che le definizioni precedenti hanno interesse solamente per spazi topologici non discreti.

È ben nota [1] la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. Per ogni spazio topologico di Hausdorff X è

$$t_w(X) \leqq bt(X) \leqq \operatorname{div}(X) \leqq \chi(X).$$

Mentre discende ovviamente dalle definizioni che $t_w(X) \leqq bt(X)$, non altrettanto immediate sono le altre due disuguaglianze delle quali diano una breve dimostrazione.

$bt(X) \leqq \operatorname{div}(X)$; sia ξ la famiglia centrata d'insiemi come è richiesta dalla definizione di divergenza. Basta allora far vedere che $\{x\} = \cap\{\overline{P}: P \in \xi\}$. Sia U un intorno di x; per la convergenza di ξ a x, esiste almeno un insieme Q di ξ contenuto in U. Allora, per la proprietà dell'intersezione finita, in U cadono punti di ogni insieme P di ξ e quindi $x \in \overline{P}$ per ogni P. Se $y \neq x$, esistono intorni disgiunti di x ed y e quindi $y \notin \cap\{\overline{P}\}$ da cui la tesi.

$\operatorname{div}(X) \leqq \chi(X)$; sia $\chi(X) = \tau$; per ogni $x \in \overline{M} - M$ esiste una famiglia $\mathcal{U}_x$ di intorni di x di cardinalità $\leqq \tau$. Per ogni U_α di $\mathcal{U}_x$ scegliamo un punto $x_\alpha \in U_\alpha \cap M$. Sia $M' = \cup\{x_\alpha\}$ e sia $\xi = \{U_\alpha \cap M': U_\alpha \in \mathcal{U}_x\}$. La famiglia ξ è centrata, con $|\xi| \leqq \tau$ e inoltre $|U \cap M'| \leqq \tau$ ossia $\xi \subset \exp_\tau M$. Ovviamente ξ converge ad x. Quindi $\operatorname{div}(X) \leqq \tau$ che è la tesi.

La validità della seguente proposizione è affermata, senza dimostrazione, da Arhangel'skii. Poiché non ci è noto che la dimostrazione sia data altrove e non ritenendola banale, la riportiamo.

PROPOSIZIONE 2. Per ogni spazio topologico di Hausdorff si ha

$$t_w(X) = t(X).$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $t_w(X) \leqq t(X)$. Sia $\alpha = t(X) = \sup\{t(x, X): x \in X\}$. Sia $M \neq \overline{M}$ e sia $x \in \overline{M} - M$. Siccome $t(x, X) \leqq \alpha$ esiste un sottoinsieme B di M con $|B| \leqq t(x, X) \leqq \alpha$ e con $x \in \overline{B}$. Allora $t_w(X) \leqq \alpha = t(X)$.

Dimostriamo ora che $t(X) \leqq t_w(X)$. Sia $\tau = t_w(X)$. Dobbiamo dimostrare che, dato $M (\subset X)$ e dato $x \in \overline{M}$, esiste $B \in \exp_\tau M$ tale che

$x \in \overline{B}$. Sia $\mathcal{B} = \exp_\tau M$ e sia $A = \cup \{\overline{B}: B \in \mathcal{B}\}$. Allora si ha ovviamente $M \subset A \subset \overline{M}$. Se facciamo vedere che $A = \overline{M}$ si ha la tesi. Supponiamo per assurdo che sia $A \subsetneqq \overline{M}$; poiché $\overline{A} = \overline{M}$, sarà $A \neq \overline{A}$; allora esistono un $x' \in \overline{A} - A$ ed un certo A' $(\subset A)$ con $|A'| \leqq \tau$, e $x' \in \overline{A'}$ (per la definizione di $t_w(X)$). Sia $A_1' = A' \cap M$ ed $A_2' = A' \cap (A - M)$. Poiché $\overline{A'} = \overline{A_1'} \cup \overline{A_2'}$, o $x \in \overline{A_1'}$ o $x' \in \overline{A_2'}$. Se $x \in \overline{A_1'}$, poiché $A_1' = A' \cap M$ e poiché $|A'| \leqq \tau$, allora $A_1' \in \exp_\tau M$ e quindi $x' \in A$ contro l'ipotesi. Sia ora $x' \in \overline{A_2'}$; ogni $y \in A_2'$ sta in A, quindi esiste $B_y \in \mathcal{B}$ tale che $y \in \overline{B_y}$.

Consideriamo allora l'insieme $\widetilde{M} = \bigcup_{y \in A_2'} B_y$. Ovviamente $|\widetilde{M}| \leqq |A'| \sup |\overline{B_y}| \leqq \tau \cdot \tau = \tau$. Ora $\overline{\widetilde{M}} \supset \cup \{\overline{B_y} : y \in A_2'\} \supset A_2'$ e quindi $\overline{A_2'} \subset \overline{\widetilde{M}}$ ossia $x \in \overline{\widetilde{M}}$. Siccome $B_y \subset M$ e $\widetilde{M} = \cup B_y$, allora $\widetilde{M} \subset M$ e $|\widetilde{M}| \leqq \tau$. Quindi $x' \in A$, contro l'ipotesi. Dunque $\overline{A} = A$ come volevasi dimostrare.

Osserviamo che la precedente dimostrazione permette di affermare che la strettezza $t(X)$ di uno spazio topologico X è il minimo cardinale τ tale che, per ogni A $(\subset X)$, $\overline{A} = \cup \{\overline{B}: B \in \exp\ A\}$ [2].

2. Vogliamo ora analizzare le relazioni d'ordine tra le invarianti cardinali introdotte.

PROPOSIZIONE 3. Per spazi topologici (T_2) sequenziali si ha

$$t(X) = bt(X) = \operatorname{div}(X) = \aleph_0 .$$

Dimostrazione. Che $t(X)$ sia uguale ad $\aleph_0$ è ovvio. Basta allora dimostrare che $\operatorname{div}(X) = \aleph_0$. Infatti, preso un insieme non chiuso M e considerato un punto qualunque $x \in \widehat{M} - M$, dove con $\widehat{M}$ si è indicata la chiusura sequenziale di M, basta prendere una successione in M convergente ad x e considerare la famiglia ξ delle code di detta successione.

OSSERVAZIONE 1. In spazi sequenziali $\chi(X)$ può avere cardinalità arbitraria, come mostra il seguente esempio.

Sia X un insieme infinito di cardinalità arbitraria $\tau > \aleph_0$. Sia x_0 un punto di X. I punti di $X - \{x_0\}$ siano tutti isolati; gli intorni di x_0 siano i complementari dei sottoinsiemi finiti di $X - \{x_0\}$. Tale spazio topologico è ovviamente sequenziale e $\chi(X) = \tau$. Infatti $\chi(X) = \chi(x_0, X)$ e se fosse $\chi(x_0, X) = \tau' < \tau$, esisterebbe una base di intorni $\mathcal{U}$ di x_0, con $|\mathcal{U}| = \tau'$. Ora $\cap \{U : U \in \mathcal{U}\} = x_0$ e quindi $\complement(\cap \{U : U \in \mathcal{U}\}) = \cup \{\complement U : U \in \mathcal{U}\}$ ma $|\cup \{\complement U : U \in \mathcal{U}\}| \leqq \aleph_0 |\mathcal{U}| = \aleph_0 \cdot \tau' = \tau' < \tau$ mentre $|\complement \{x_0\}| = \tau$. In questo caso perciò $\operatorname{div} X < \chi(X)$.

LEMMA 1. In spazi ereditariamente separabili si ha $t(X)=\aleph_0$.
Dimostrazione. Sia B un sottoinsieme non chiuso di X. Siccome B è separabile nella topologia indotta, esiste un B^* numerabile, contenuto in B, tale che $\overline{B^*}^B=B$ (indichiamo con $\overline{A}^B$ la chiusura di A nella topologia indotta in B). Ora $\overline{B^*}^B=\overline{B^*}\cap B\subset\overline{B^*}$. Allora $B=\overline{B^*}^B\subset\overline{B^*}$ e quindi $\overline{B}\subset\overline{B^*}$. D'altra parte, da $B\supset B^*$ segue $\overline{B}\supset\overline{B^*}$ e quindi $\overline{B}=\overline{B^*}$. Perciò, per ogni $x\in\overline{B}-B$, $x\in\overline{B^*}$ e quindi $t(X)=\aleph_0$.

LEMMA 2. Per ogni spazio separabile X, tale che $|X|>2^{\aleph_0}$, si ha $bt(X)>\aleph_0$.
Dimostrazione. In base al lemma 1 di [1], si ha che $|X|\leqq\aleph_0^{bt(X)}=2^{bt(X)}$. Dall'ipotesi segue che $2^{\aleph_0}<2^{bt(X)}$ e quindi la tesi.

OSSERVAZIONE 2. La proprietà $t(X)=\aleph_0$ non è esclusiva degli spazi sequenziali. Infatti, preso lo spazio $I^I=X$ con la topologia del prodotto, esso non è sequenziale ed è ereditariamente separabile (vedi p. es. [3], pag. 142). Perciò, per il lemma 1, è $t(X)=\aleph_0$. Per tale spazio inoltre, per il lemma 2, si ha $\aleph_0<bt(X)$. Ora $\chi(X)=2^{\aleph_0}$: infatti è noto (vedi p. es. [3] pag. 79) che $w(X)=2^{\aleph_0}$; ma lo spazio è separabile e perciò deve essere $\chi(X)=w(X)$. Dunque, sotto l'ipotesi del continuo, $\aleph_0=t(X)<bt(X)=\operatorname{div}(X)=\chi(X)=2^{\aleph_0}$.

OSSERVAZIONE 3. Anche per spazi non sequenziali può avvenire che le 4 invarianti cardinali coincidano. Si consideri ad esempio l'insieme degli ordinali $\leqq\omega_1$ con la topologia dell'ordine. Per tale spazio si ha $t(X)=\chi(X)=\aleph_1$.

3. Abbiamo già visto che, per certi spazi, $t(X)<bt(X)$ ed anche $\operatorname{div}(X)<\chi(X)$. Dimostriamo ora con un esempio che esistono spazi di Hausdorff per i quali $bt(X)<\operatorname{div}(X)$.

ESEMPIO. Sia X il quadrato $[0,1]\times[0,1]$ con la seguente topologia; i punti (x,y) con $y>0$ sono isolati. Il punto $(0,0)$ ha come base d'intorni i segmenti $\{(0,y)\colon 0\leqq y<k\leqq 1\}$. Per un punto di tipo $(x,0)$ con $x>0$ base d'intorni è la famiglia

$$U^{\delta}_{\phi_{\bar{x}}}=\{(x,y)\colon 0<y<\delta,\ \bar{x}-\phi_{\bar{x}}(y)<x\leqq\bar{x}\}\cup\{(\bar{x},0)\}$$

con $\delta > 0$, $\phi_{\bar{x}} :]0, \delta] \to]0, \bar{x}]$,

$$\mathcal{U}(\bar{x}, 0) = \{U^{\delta}_{\phi} : \delta > 0, \ \phi \in \Phi\}$$

con Φ insieme delle funzioni reali definite per $0 < y \leqq \delta$ e a valori positivi $\leqq \bar{x}$.

Tale spazio X è ovviamente di Hausdorff, mentre non è né sequenziale né separabile. Mostriamo dapprima che in tale spazio è $bt(X) = \aleph_0$.

Sia $\overline{M} \neq M$; gli unici punti di $\overline{M} - M$ possono essere quelli del tipo $(x, 0)$; sia $(\bar{x}, 0)$ uno di tali punti. Per la struttura degli intorni di $(\bar{x}, 0)$ esiste una successione di punti $(\bar{x}, y_n)$ convergente nella topologia ordinaria di R^2 a $(\bar{x}, 0)$ tale che, fissato n, o $(\bar{x}, y_n) \in M$ o esiste una successione $\{(x_{mn}, y_n)\}_m$ convergente nella topologia ordinaria a $(\bar{x}, y_n)$. Consideriamo l'insieme H riunione dei punti che formano le successioni.

Sia poi λ la famiglia delle tracce P_n di H sui triangoli di vertici $(\bar{x}, 0)$; $(\bar{x}, 1/n)$; $(\bar{x} - 1/n, 1/n)$. Tale famiglia è ovviamente numerabile ed ogni suo elemento P_n è numerabile. Inoltre si ha $\{(\bar{x}, 0)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{P_n}$.

Dimostriamo ora che $\aleph_0 < \operatorname{div}(X) \leqq 2^{\aleph_0}$.

Per provare che $\aleph_0 < \operatorname{div}(X)$ basta trovare un insieme $M (\subset X)$ e tale che, per ogni $x \in \overline{M} - M$, nessuna famiglia centrata e numerabile di M converga a x.

Sia $M = [0, 1[\times [0, 1]$. Allora $\overline{M} = M \cup \{(1, 0)\}$. Sia λ una famiglia numerabile e centrata di sottoinsiemi di M e supponiamo per assurdo che converga a $x = (1, 0)$. Indichiamo con $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ gli insiemi della famiglia ed osserviamo che, siccome λ è centrata e converge a x, ognuno degli A_n deve avere punti appartenenti a infinite « quote ». Sia y_1 una quota di punti di A_1; scelte $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sia y_n una quota di punti di A_n diversa dalle quote precedenti. Costruiamo allora un intorno di $(1, 0)$ nel seguente modo: per ogni $y \neq y_i$, $i \in N^+$, $(0 < y \leqq 1)$ sia $\phi_1(y) = 1$; per $y = y_i$ se $(x_i, y_i) \in A_i$, sia $x_i < 1 - \phi_1(y_i)$. Tale intorno non contiene alcun insieme della famiglia, contro l'ipotesi che λ converga a x.

Dimostriamo ora che $\operatorname{div}(X) \leqq 2^{\aleph_0}$. Riferiamoci alle considerazioni fatte per dimostrare che $bt(X) = \aleph_0$. Dato $(\bar{x}, 0)$ sia λ la famiglia ottenuta scegliendo una coda della successione $\{(\bar{x}, y_n)\}_n$ e, per ogni n, o il punto $(\bar{x}, y_n)$ se esso appartiene a M, o una coda della successione $\{(x_{mn}, y_n)\}_m$.

Al variare di dette scelte la famiglia λ, formata da insiemi numerabili e centrata, ha cardinalità $\leqq \aleph_0 \cdot \aleph_0{}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ ed, ovviamente, converge a $(\bar{x}, 0)$.

Si osservi inoltre che $\chi(X) = 2^{2^{\aleph_0}}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. V. ARHANGEL'SKIǏ: *The Suslin number and cardinality. The characters of points in sequential bicompacta.* Soviet Math. Dokl. vol. 11 (1970) N. 3 pag. 597.

[2] A. V. ARHANGEL'SKIǏ: *On cardinal invariants.* Proc. of the III Prague Top. Symp. (1971) pag. 37.

[3] R. ENGELKING: *General topology.* North-Holland-Amsterdam (1968).

[4] I. JUHÁSZ: *Cardinal functions in topology. Math.* Centre Tracts - Amsterdam (1971).