SU ALCUNI DETERMINANTI COLLEGATI AD UN PARTICOLARE SISTEMA ALGEBRICO (*)

di SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Si assegnano condizioni sufficienti per il non annullarsi di certi determinanti collegati ad un particolare sistema di polinomi algebrici.*

SUMMARY. - *Some determinants associated to particular system of algebraic polynomials are considered and sufficient conditions are given which assure that these determinants are not zero.*

1. Siano

$$\{\alpha_k\}_{k=0,1,\ldots}, \quad \{\beta_k\}_{k=0,1,\ldots} \ (\beta_k \neq 0, \ \forall k) \tag{1}$$

due successioni di numeri reali,

$$\{u_k(x)\}_{k=0,1,\ldots} \tag{2}$$

il sistema dei polinomi del tipo

$$u_k(x) = \alpha_k + \beta_k x^{m+k}, \tag{3}$$

essendo m un intero non negativo comunque fissato e

$$P_{\nu+m-1}(x) = a_0 x^{\nu+m-1} + a_1 x^{\nu+m-2} + \ldots a_{\nu-1} x^m + a_{\nu+m-1} \tag{4}$$

il generico polinomio generalizzato nelle potenze: $x^0, x^m, x^{m+1}, \ldots$ $\ldots, x^{\nu+m-1}$, della variabile, di grado effettivo $\nu+m-1$.

(*) Pervenuto in Redazione il 15 gennaio 1975.
(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale - 57100 Livorno.

Indichiamo con

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{5}$$

n numeri reali tutti tra loro distinti, con

$$c_r \ (r=1, 2, \dots, n) \tag{6}$$

la somma dei loro prodotti r ad r e poniamo

$$\begin{cases} c_0=1 \\ c_{-s}=0, \quad \forall s \in N. \end{cases} \tag{7}$$

Ciò posto, indichiamo, per ogni $m>1$, con

$$C_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{8}$$

il determinante, di ordine $m-1$,

$$\begin{vmatrix} c_{n-1} & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & c_{n-m+5} & c_{n-m+6} & \dots & c_n & 0 \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & c_{n-m+5} & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & c_{n-m+4} & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{vmatrix} \tag{9}$$

e, per ogni m (≥ 0), con

$$D_m \begin{pmatrix} \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} & \\ & ; \quad x_1, x_2, \dots, x_n \\ \beta_0, \dots, \beta_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{10}$$

il determinante, di ordine n,

$$\begin{vmatrix} \alpha_0+\beta_0 x_1^m & \alpha_1+\beta_1 x_1^{m+1} & \dots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-1} x_1^{m+n-1} \\ \alpha_0+\beta_0 x_2^m & \alpha_1+\beta_1 x_2^{m+1} & \dots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-1} x_2^{m+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0+\beta_0 x_n^m & \alpha_1+\beta_1 x_n^{m+1} & \dots & \alpha_{n-1}+\beta_{n-1} x_n^{m+n-1} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Per il seguito ci sarà utile osservare che, non potendo, per $m>1$, la successione

$$(12) \qquad a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+m-1}$$

dei coefficienti del polinomio (4) presentare più di ν variazioni, il polinomio medesimo, per $m>1$, di zeri positivi ne può possedere ν al più.

2. Nei riguardi del determinante (8) vale la seguente

PROPOSIZIONE. *Se i numeri* (5) *sono tutti positivi, risulta*

$$(13) \qquad C_m(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \quad \forall m\,(>1).$$

Dimostriamo, preliminarmente, che, per ogni $m\,(>1)$, risulta

$$(14) \qquad C_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0.$$

Per $m=2$ la (14) è vera ovviamente. Supposto, allora, che essa valga per $m-1$ $(m>2)$, dimostriamo che essa è vera per m.

Essendo i numeri (5), per ipotesi, tutti positivi, in virtù della osservazione finale del n^0 1, scelto $\nu=n-1$, per il polinomio (4) non può sussistere una decomposizione del tipo

$$(15) \qquad P_{n+m-2}(x) = a_0\,(x^n - c_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n)$$
$$(x^{m-2} + \lambda_{m-3} x^{m-3} + \dots + \lambda_0),$$

ciò che equivale ad asserire che il sistema lineare, di $m-1$ equazioni nelle $m-2$ incognite $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-3}$,

$$(16) \qquad \begin{cases} c_{n-1}\,\lambda_0 - c_n\,\lambda_1 = 0 \\ c_{n-2}\,\lambda_0 - c_{n-1}\,\lambda_1 + c_n\,\lambda_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-m+3}\,\lambda_0 - c_{n-m+4}\,\lambda_1 + \dots + (-1)^{m-3} c_n\,\lambda_{m-3} = 0 \\ c_{n-m+2}\,\lambda_0 - c_{n-m+3}\,\lambda_1 + \dots + (-1)^{m-3} c_{n-1}\,\lambda_{m-3} = (-1)^{m-3} c_n \\ c_{n-m+1}\,\lambda_0 - c_{n-m+2}\,\lambda_1 + \dots + (-1)^{m-3} c_{n-2}\,\lambda_{m-3} = (-1)^{m-3} c_{n-1} \end{cases},$$

ottenuto uguagliando tra loro i coefficienti di $x, x^2, \dots, x^{m-1}$ a primo ed a secondo membro della (15), è incompatibile.

Poiché la condizione di incompatibilità del sistema (16) [1] è espressa dal non annullarsi del determinante della sua matrice completa e poiché tale determinante differisce dal determinante (9), al più, per il segno, segue quanto volevasi.

Dalla (14) segue che, quando sia $\nu=n$, per il polinomio (4) può sussistere una decomposizione del tipo

$$(17) \qquad P_{n+m-1}(x)=a_0(x^n-c_1x^{n-1}+\dots+(-1)^n c_n)(x^{m-1}+\lambda_{m-2}x^{m-2}+\dots+\lambda_0).$$

Infatti il sistema lineare, di $m-1$ equazioni nelle $m-1$ incognite $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}$, ottenuto sempre uguagliando tra loro i coefficienti di $x, x^2, \dots, x^{m-1}$ a primo ed a secondo membro della (17), come subito può constatarsi, ha per determinante dei coefficienti delle incognite un numero che differisce da $C_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al più per il segno.

Essendo, come dal suddetto sistema subito si ricava,

$$(18) \qquad \lambda_0 = \frac{c_n^{m-1}}{C_m(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

e, per la (17),

$$(19) \qquad a_{n+m-1}=(-1)^n a_0 c_n \lambda_0$$

e presentando, infine, la successione (12) n variazioni, segue, allora, $\lambda_0>0$ e quindi, in virtù dell'ipotesi, la tesi.

OSSERVAZIONE. Supposto, com'è lecito, $a_0=1$, dalla (17), posto convenzionalmente

$$(20) \qquad \lambda_{-s}=0, \quad \forall s \in N,$$

discende, per il polinomio (4), l'espressione

$$(21) \qquad P_{n+m-1}(x)=x^{n+m-1}+\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h(c_h-c_{h-1}\lambda_{m-2}+c_{h-2}\lambda_{m-3}- \dots +(-1)^h c_1\lambda_{m-h}+(-1)^{h+1}\lambda_{m-h-1})x^{n+m-h-1}+(-1)^n c_n\lambda_0$$

[1] Essendo, come supposto, $C_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, la matrice dei coefficienti delle incognite riesce, infatti, di caratteristica $m-2$.

e, pertanto la successione (12) n variazioni, i numeri

$$c_h - c_{h-1}\,\lambda_{m-2} + c_{h-2}\,\lambda_{m-3} - \dots + (-1)^h\, c_1\, \lambda_{m-h} + (-1)^{h+1}\, \lambda_{m-h-1} \tag{22}$$

risultano tutti positivi. Dalla (22), in corrispondenza agli $n-1$ possibili valori di h, conseguono, pertanto, altrettante disuguaglianze coinvolgenti il numero $C_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$. In particolare, per $m=2$, la (21) assume la forma

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h\,(c_h - c_{h-1}\,\lambda_0)\, x^{n-h+1} + (-1)^n\, c_n\, \lambda_0 \tag{23}$$

e quindi, in virtù della (18), riesce

$$c_h\, c_{n-1} - c_{h-1}\, c_n > 0, \quad \forall h\colon 1 \leq h \leq n-1. \tag{24}$$

3. Nei riguardi del determinante (10) valgono le proposizioni sgeuenti.

Proposizione I. *Risulta*

$$D_0 \begin{pmatrix} \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} & \\ & ; \quad x_1, x_2, \dots, x_n \\ \beta_0, \dots, \beta_{n-1} & \end{pmatrix} \neq 0 \ \text{(2)}. \tag{25}$$

La (25) segue subito dall'essere

$$\{u_k(x)\}_{k=0,1,\dots,n-1} \tag{26}$$

un Sistema Tchebyschev (S. T.) su ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

Proposizione II. *Se i numeri* (5) *sono tutti diversi da* 1, *risulta*

$$D_1 \begin{pmatrix} 1, \dots, \ 1 & \\ & ; \quad x_1, x_2, \dots, x_n \\ -1, \dots, -1 & \end{pmatrix} \neq 0. \tag{27}$$

(2) Per $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$, $\forall k\colon 0 \leq k \leq m-1$, il determinante (11) coincide con il determinante di Vandermonde dei numeri (5).

Essendo $\alpha_k = 1$, $\beta_k = -1$, $\forall k: 0 \leq k \leq n-1$ e quindi $u_k(1) = 0$, $\forall k$, la (27) segue subito dall'essere il (26) un S. T. su ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R} - \{1\}$.

Proposizione III. *Se i numeri* (5) *sono tutti positivi e diversi da* 1, *risulta*

$$
(28) \qquad D_m \begin{pmatrix} 1, \dots, & 1 & & \\ & & ; & x_1, x_2, \dots, x_n \\ -1, \dots, & -1 & & \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall m.
$$

Essendo anche qui $u_k(1) = 0$, $\forall k$, la (28) segue subito dall'essere il (26), in virtù dell'osservazione finale del n[0] 1 ($\nu = n$), un S. T. su ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}^+ - \{0, 1\}$.

Proposizione IV. *Se i numeri* (5) *sono tutti positivi, risulta,* $\forall m > 0$,

$$
(29) \qquad D_m \begin{pmatrix} \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} & & \\ & ; & x_1, x_2, \dots, x_n \\ \beta_0, \dots, \beta_{n-1} & & \end{pmatrix} = 0
$$

se e solo se è verificata la condizione

$$
(30) \quad (-1)^n c_n \lambda_0 = \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} + \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h (c_h - e_{h-1} \lambda_{m-2} + o_{h-2} \lambda_{m-3} - \dots
$$

$$
\dots + (-1)^h o_1 \lambda_{m-h} + (-1)^{h+1} \lambda_{m-h-1}) \cdot \frac{\alpha_{n-h-1}}{\beta_{n-h-1}},
$$

essendo $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}$ *i numeri definiti con la* (17) ([3]).

Per la dimostrazione basta osservare che la (30) esprime la condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio (21) appartenga alla varietà lineare individuata da $u_0(x), u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$ e, per $m > 1$, tener conto dell'osservazione finale del n[0] 1.

([3]) Si tenga sempre presente la posizione (20).