ZUR LOSUNGSDARSTELLUNG BEI GEWISSEN PARABOLISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (*)

von KARL WILHELM BAUER (in Graz) (**)

SOMMARIO - *Da soluzioni arbitrarie dell'equazione di conduzione del calore si deducono, coll'ausilio di operatori differenziali, delle rappresentazioni esplicite per le soluzioni dell'equazione differenziale* $\Delta v + A v = v_t$, *con coefficiente A soddisfacente a determinate condizioni.*

SUMMARY. - *Arbitrary solutions of the heat equation are mapped by differential operators on solutions of the differential equation* $\Delta v + A v = v_t$ *in which the coefficient A satisfies certain conditions.*

1. In jüngster Zeit wurde die Darstellung von Lösungen partieller Differentialgleichungen mit Hilfe von Differentialoperatoren in einer Reihe von Arbeiten behandelt. Dabei bietet sich einmal die Möglichkeit, von Integraloperatoren auszugehen und zu versuchen. die so erhaltene Darstellung integralfrei zu machen. Auf diese Weise wurden z. B. unter Verwendung von Bergman-Operatoren [6] mit Polynomerzeugenden in [3], [7] und [11] Lösungsdarstellungen ermittelt, die sodann nach einer Methode von M. Kracht und E. Kreyszig [9], integralfrei gemacht werden konnten. Andererseits ist es bei gewissen Klassen von Differentialgleichungen möglich, solche Lösungsdarstellungen aus der Differentialgleichung direkt herzuleiten (vgl. z. B. [4]) und so allgemeine Darstellungssätze für die in einfach zusammenhängenden Gebieten definierten Lösungen zu erhalten, die sodann eine eingehende Untersuchung der funktionentheoretischen Eigenschaften gestatten (vgl. z. B. [1], [5], [13], [14] und [15]). Schliesslich

(*) Pervenuto in Redazione il 20 gennaio 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: 1. Lehrkanzel u. Institut f. Mathematik — Technische Universität Graz — Kopernikusgasse 24 — A - 8010 Graz (Austria).

lassen sich durch geeignete Differentialoperatoren Lösungen einfacher partieller Differentialgleichungen auf solche anderer Differentialgleichungen abbilden [2]. Die beiden zuletzt genannten Verfahren haben bisher im wesentlichen bei elliptischen Differentialgleichungen Anwendung gefunden; sie lassen sich jedoch bei geeigneten Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit der Lösungen auch auf hyperbolische Differentialgleichungen übertragen.

Die zuerst genannte Methode wurde auch bei parabolischen Differentialgleichungen angewendet. So wurde von W. Watzlawek in [16] für den Fall einer Raumvariablen die Abbildung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung durch Integraloperatoren auf Lösungen anderer parabolischer Differentialgleichungen behandelt. Darüber hinaus wurde in [16] die von E. Kreyszig eingeführte Klassifizierung der Operatoren vom Typ P bzw. P_0 (vgl. [10-12]) auf parabolische Differentialgleichungen übertragen.

In der vorliegenden Arbeit werden für den Fall von m Raumvariablen mit Hilfe von Differentialoperatoren und unter Verwendung von beliebigen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u = u_t \quad \text{mit} \quad \Delta = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$$

explizite Darstellungen für Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta v + A v = v_t$$

hergeleitet, wobei der Koeffizient A bestimmten Bedingungen genügt. Im 2. Abschnitt wird zunächst der Fall

$$A = n(n+1)\,\tau\,\frac{\beta\beta'' - \beta'^2}{\beta^2}, \qquad n \in \mathbb{N}\ (^1),$$

behandelt, wobei $\beta = \beta(\eta)$ mit

$$\eta = \sum_{s=1}^{\tau} x_s, \quad 1 \le \tau \le m,$$

eine beliebige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\tau\beta'' - \lambda\beta = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

bezeichnet (Satz 1 und Satz 2).

(1) Mit $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}$ wird die Menge der natürlichen bzw. reellen Zahlen bezeichnet.

Ausserdem werden im 3. Abschnitt Differentialgleichungen betrachtet, bei denen A eine gewisse nur von t abhängige Funktion darstellt (Satz 3). In diesem Zusammenhang wird der Fall

$$A = -\frac{n}{t}, \quad t \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

besonders hervorgehoben, auf den man durch Verwendung der Fundamentallösung

$$\sigma = t^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4t} \sum_{j=1}^{m} x_j^2}$$

geführt wird (Satz 4). Da man eine Differentialgleichung der Form

$$\Delta v + C(t)\, v = v_t$$

durch eine geeignete Transformation aus der Wärmeleitungsgleichung erhalten kann, bietet sich hier die Möglichkeit, ausgehend von einer bekannten Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Differentialoperatoren weitere nicht triviale Lösungen dieser Differentialgleichung zu erhalten (Satz 5). Speziell lassen sich durch dieses Verfahren aus beliebigen Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gewinnen, in denen dann auch die Variable t auftritt.

2. $\mathfrak{G}$ bezeichne ein Gebiet des Raumes $\mathbb{R}^{m+1}$, und $u = u(x_1, \dots, x_m, t)$ sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung [2] der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u = u_t \tag{1}$$

$\sigma = \alpha(t)\, \beta(\eta)$, mit

$$\eta = \sum_{s=1}^{\tau} x_s, \quad 1 \leq \tau \leq m, \tag{2}$$

sei eine in $\mathfrak{G}$ definierte und dort nicht verschwindende partikuläre Lösung von (1). Wir setzen

$$v_0 = \frac{u}{\sigma}, \tag{3}$$

[2] Unter einer Lösung u von (1) in $\mathfrak{G}$ wird hier und im folgenden eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion verstanden, die dort stetige Ableitungen u_t, u_{x_s}, $u_{x_s x_s}$, $s = 1, \dots, m$, besitzt und der Differentialgleichung (1) genügt. Eine solche Funktion ist sodann beliebig oft in $\mathfrak{G}$ differenzierbar (vgl. z. B. [8]).

dann genügt v_0 der Differentialgleichung

$$\Delta v_0 + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=1}^{\tau} \sigma_{x_s} v_{0,x_s} = v_{0,t}\,. \tag{4}$$

Bezeichnet d_τ den Operator

$$d_\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_s}, \tag{5}$$

so gilt der folgende

HILFSSATZ 1. *Ist v_0 eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung* (4), *so stellt*

$$v_n = \left[d_\tau - \frac{(n-1)\, d_\tau \sigma}{\sigma}\right] \dots \left[d_\tau - \frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\right] d_\tau v_0 \tag{6}$$

eine in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v_n + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=1}^{\tau} \sigma_{x_s} v_{n,x_s} + n(n+1) B v_n = v_{n,t} \tag{7}$$

mit

$$B = \tau \frac{\beta\beta'' - \beta'^2}{\beta^2}$$

dar.

Der Beweis wird durch Induktion über $n \in \mathfrak{N}$ geführt. Wendet man auf (4) den Operator d_τ an, so folgt mit

$$v_1 = d_\tau v_0$$

unter Berücksichtigung von

$$d_\tau (\Delta v_0) = \Delta (d_\tau v_0)$$

und

$$\left(\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\right)_{x_s} = B, \quad s = 1, \dots, \tau,$$

die Differentialgleichung

$$\Delta v_1 + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=1}^{\tau} \sigma_{x_s} v_{1,x_s} + 2 B v_1 = v_{1,t}\,.$$

Wendet man andererseits auf (7) den Operator

$$d_\tau - n \frac{d_\tau \sigma}{\sigma}$$

an, so erhält man unter Beachtung von

$$\left(\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\right)_t = 0, \quad \Delta\left(\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\right) = -2\,\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\,B, \quad d_\tau B = -2\,\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\,B$$

die Differentialgleichung

$$\Delta\, v_{n+1} + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=1}^{\tau} \sigma_{x_s} v_{n+1,\,x_s} + (n+1)(n+2)\, B v_{n+1} = v_{n+1,\,t}$$

mit

$$v_{n+1} = \left(d_\tau - n\,\frac{d_\tau \sigma}{\sigma}\right) v_n\,.$$

Setzt man noch

(8) $$v = \sigma\, v_n\,,$$

so genügt v der Differentialgleichung

(9) $$\Delta\, v + n\,(n+1)\, B\, v = v_t\,.$$

In der Gleichung (6) fällt der Faktor $\alpha(t)$ wegen $\sigma = \alpha(t)\,\beta(\eta)$ heraus; damit gilt

(10) $$v = \beta\left[d_\tau - \frac{\tau\,(n-1)\,\beta'}{\beta}\right] \cdots \left[d_\tau - \frac{\tau\beta'}{\beta}\right] d_\tau\,\frac{u}{\beta}\,.$$

Beachtet man noch, dass die Funktion $\beta = \beta(\eta)$ wegen

$$\Delta\sigma = \sigma_t$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung

(11) $$\tau\beta'' - \lambda\beta = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

genügt, so erhält man den folgenden

Satz 1. *u sei eine beliebige in* $\mathfrak{G}$ *definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$\Delta\, u = u_t.$$

$\beta = \beta(\eta)$ *mit*

$$\eta = \sum_{s=1}^{\tau} x_s, \qquad 1 \le \tau \le m,$$

sei eine in $\mathfrak{G}$ *nicht verschwindenden Lösung von*

$$\tau\beta'' - \lambda\beta = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

und d_τ bezeichne den Operator

$$d_\tau = \sum_{s=1}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

Dann stellt

$$v = \beta \left[d_\tau - \frac{\tau (n-1) \beta'}{\beta} \right] \dots \left[d_\tau - \frac{\tau \beta'}{\beta} \right] d_\tau \frac{u}{\beta}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta v + n (n+1) \frac{\lambda \beta^2 - \tau \beta'^2}{\beta^2} v = v_t$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

Als Lösungen von (11) erhält man im einzelnen ($a_k \in \mathbb{R}$):

(12) $$\beta_1 = a_1 + a_2 \eta \quad \text{für} \quad \lambda = 0,$$

(13) $$\beta_2 = a_3 \cosh \left(\eta \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \right) + a_4 \sinh \left(\eta \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \right) \quad \text{für} \quad \lambda > 0$$

und

(14) $$\beta_3 = a_5 \sin \left(\eta \sqrt{\frac{-\lambda}{\tau}} \right) + a_6 \cos \left(\eta \sqrt{\frac{-\lambda}{\tau}} \right) \quad \text{für} \quad \lambda < 0.$$

Die zugehörigen Koeffizienten B lauten dann

(15) $$B_1 = \frac{-\tau a_2^2}{(a_1 + a_2 \eta)^2},$$

(16) $$B_2 = \frac{\lambda (a_3^2 - a_4^2)}{\left[a_3 \cosh \left(\eta \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \right) + a_4 \sinh \left(\eta \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \right) \right]^2}$$

und

(17) $$B_3 = \frac{\lambda (a_5^2 + a_6^2)}{\left[a_5 \sin \left(\eta \sqrt{\frac{-\lambda}{\tau}} \right) + a_6 \cos \left(\eta \sqrt{\frac{-\lambda}{\tau}} \right) \right]^2}.$$

Durch Induktion über n folgt ausserdem, dass die Darstellung (10) auch in der Form

(18) $$v = \sum_{k=0}^{n} p_k (\eta)\, d_\tau^k u$$

mit

$$(19) \qquad p_k(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (-1)^{n-k-\nu} a_{k\nu} (\tau\lambda)^\nu \left(\frac{\tau\beta'}{\beta}\right)^{n-k-2\nu}, \quad a_{k\nu} > 0,$$

geschrieben werden kann. Im Fall $\lambda \neq 0$ stehen die Koeffizienten p_k in Beziehung zu gewissen inhomogenen Legendre'schen Differentialgleichungen. Setzt man (18) in (9) ein, so folgen mit

$$(20) \qquad y = \frac{\beta'}{\beta} \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}}, \quad p_k(\eta) = q_k(y),$$

die Relationen

$$(21) \qquad (y^2-1)\, q_k'' + 2y q_k' - n(n+1)\, q_k = \frac{2}{\sqrt{\tau\lambda}}\, q'_{k-1}$$

für $k=0, 1, \dots, n$. Dabei ist q_{-1} mit Null zu interpretieren. Im Fall $\lambda=0$ reduzieren sich die Polynome $p_k(\eta)$ auf

$$(22) \qquad p_k(\eta) = (-1)^{n-k} a_{k0} \left(\frac{\tau\beta'}{\beta}\right)^{n-k}.$$

Durch Einsetzen in (9) erhält man nach geeigneter Normierung

$$a_{k0} = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}\, k!\, (n-k)!}.$$

Verwendet man hier auch die Funktion β in der normierten Form $\beta = \eta$, so gilt der folgende

Satz 2. *u sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$\Delta u = u_t.$$

Dann stellt

$$v = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\tau)^{n-k}\,(2n-k)!}{2^{n-k}\, k!\,(n-k)!} \frac{d_\tau^k u}{\eta^{n-k}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$(23) \qquad \Delta v - \frac{n(n+1)\tau}{\eta^2} v = v_t, \quad n \in \mathfrak{N},$$

in $\mathfrak{G}$ dar (3).

(3) Vergleiche dazu für den Fall $m=\tau=1$ die in [16], Satz 10 b, formulierte Aussage.

3. Während bei den bisher betrachteten Differentialgleichungen der Faktor von v eine Funktion der Variablen $x_1, \dots, x_m$ darstellt, sollen nun Differentialchungen behandelt werden, bei denen dieser Faktor von t abhängig ist. Dabei sei $u = u(x_1, \dots, x_m, t)$ wieder eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1)

$$\Delta u = u_t.$$

σ sei eine in $\mathfrak{G}$ definierte und dort nicht verschwindende partikuläre Lösung von (1), die der Bedingung

$$\frac{d_\tau \sigma}{\sigma} = a(t) + \eta\, b(t) \tag{24}$$

mit geeigneten Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ genügt, wobei d_τ wiederum den Operator

$$d_\tau = \sum_{s=0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad 1 \leq \tau \leq m,$$

bezeichnet. Setzt man

$$w_0 = \frac{u}{\sigma}, \tag{25}$$

so gilt

$$\Delta w_0 + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=1}^{m} \sigma_{x_s} w_{0, x_s} = w_{0, t}. \tag{26}$$

Durch vollständige Induktion erhält man sodann bei Beachtung von

$$d_\tau \frac{\sigma_{x_s}}{\sigma} = \begin{cases} b(t) \text{ für } 1 \leq s \leq \tau \\ 0 \text{ für } \tau < s \end{cases}$$

den folgenden

HILFSSATZ 2. *w_0 sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung* (26). *Dann stellt*

$$w_n = d_\tau^n w_0 \tag{27}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta w_n + \frac{2}{\sigma} \sum_{s=0}^{m} \sigma_{x_s} w_{n, x_s} + 2nb(t)\, w_n = w_{n, t} \tag{28}$$

dar.

Transformiert man sodann gemäss

$$w=\sigma\, w_n\,, \tag{29}$$

so genügt w der Differentialgleichung

$$\Delta w+2nb\,(t)\,w=w_t\;. \tag{30}$$

SATZ 3. *u sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung* (1)

$$\Delta\, u=u_t.$$

σ sei eine in $\mathfrak{G}$ definierte partikuläre Lösung von (1), *die den Bedingungen*

$$\text{(i)}\quad \sigma\neq 0, \tag{31}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{d_\tau\,\sigma}{\sigma}=a\,(t)+\eta\; b\,(t) \tag{32}$$

genügt.

Dann stellt

$$w=\sigma\, d_\tau^{\,n}\,\frac{u}{\sigma} \tag{33}$$

eine in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta w+2nb\,(t)\,w=\,w_t$$

dar.

Verwendet man hier z. B. als partikuläre Lösung σ die bekannte Fundamentallösung

$$\sigma=t^{-\frac{m}{2}}\,e^{-\frac{1}{4t}\sum\limits_{j=1}^{m}x_j^2}\,, \tag{34}$$

so gilt

$$\frac{d_\tau\,\sigma}{\sigma}=-\,\frac{\eta}{2t}\,,$$

wobei wiederum

$$\eta=\sum_{s=1}^{\tau}x_s$$

gesetzt wurde. Die Differentialgleichung (30) erhält sodann die spezielle Form

$$\Delta\, w-\frac{n}{t}\,w=w_t\,,\qquad n\in\mathfrak{N}. \tag{35}$$

In diesem Fall lässt sich die Darstellung

$$w = \sigma\, d_\tau^{\,n} \frac{u}{\sigma} \tag{36}$$

wie folgt umformen. Ausgehend von (36) erhält man durch Induktion über n zunächst

$$w = \sum_{k=0}^{n} f_k(\eta, t)\, d_\tau^{\,k} u \tag{37}$$

mit

$$f_k(\eta, t) = \binom{n}{k} \left[\frac{\eta}{2t} + \tau \frac{\partial}{\partial \eta}\right]^{n-k} 1. \tag{38}$$

Diese Koeffizienten $f_k(\eta, t)$ lassen sich explizit angeben, und zwar gilt

$$f_k(\eta, t) = \frac{n!}{2^{n-k}\, k!} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{\tau^\nu}{\nu!\,(n-k-2\nu)!} \frac{\eta^{n-k-2\nu}}{t^{n-k-\nu}}, \tag{39}$$

was man wiederum durch Induktion nachweist. Damit gilt der folgende

SATZ 4. *$\mathfrak{G}$ bezeichne ein Gebiet des Raumes $\mathbb{R}^{m+1}$ mit $t \neq 0$ in $\mathfrak{G}$. u sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung* (1)

$$\Delta u = u_t.$$

Dann stellt

$$w = \sum_{k=0}^{n} f_k(\eta, t)\, d_\tau^{\,k} u$$

mit $f_k(\eta, t)$ gemäss (38) *bzw.* (39) *eine Lösung der Differentialgleichung* (35)

$$\Delta w - \frac{n}{t} w = w_t$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

Ist $v = v(x_1, \dots, x_m, t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta v = v_t, \tag{40}$$

so genügt

$$w = \frac{v}{\alpha(t)}, \quad \alpha(t) \neq 0,$$

der Differentialgleichung

$$\Delta w + C(t) w = w_t \quad \text{mit} \quad C(t) = -\frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Geht man umgekehrt von der Differentialgleichung (35) aus, so erhält man mit

$$v = t^n w, \qquad n \in \mathfrak{N},$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Damit bietet das in Satz 4 formulierte Ergebnis die Möglichkeit, aus einer bekannten Lösung von (40) weitere nicht triviale Lösungen dieser Differentialgleichung zu erhalten.

SATZ 5. *u sei eine beliebige in* $\mathfrak{G}$ *definierte Lösung der Differentialgleichung* (1)

$$\Delta u = u_t.$$

Dann stellt

$$v = \sum_{k=0}^{n} g_k(\eta, t)\, d_\tau^k\, u$$

mit

$$g_k(\eta, t) = \frac{n!}{2^{n-k}\, k!} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{\tau^\nu\, t^{k+\nu}}{\nu!\,(n-k-2\nu)!}\, \eta^{n-k-2\nu}$$

wiederum eine Lösung von (1) *in* $\mathfrak{G}$ *dar.*

LITERATUR

[1] BAUER K. W., *Über eine der Differentialgleichung* $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} \pm n(n+1) w = 0$ *zugeordnete Funktionentheorie,* Bonner Math. Schriften, Nr. 23 (1965).

[2] BAUER K. W., *Differentialoperatoren bei partiellen Differentialgleichungen,* Ber. d. Gesellsch. f. Math. u. Datenv., Bonn, Nr. 77, 7-17 (1973).

[3] BAUER K. W. und H. FLORIAN, *Bergman-Operatoren mit Polynomerzeugenden,* Applicable Analysis (im Druck).

[4] BAUER K. W. und G. JANK, *Differentialoperatoren bei einer inhomogenen elliptischen Differentialgleichung,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 3, 140-169 (1971).

[5] Bauer K. W. und E. Peschl, *Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung* $(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w=0$ *in der Nähe isolierter Singularitäten,* Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. 1965, 113-146 (1966).

[6] Bergman S., *Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations,* Erg. Math. Grenzgeb., Bd. 23, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg: 1961.

[7] Florian H. und G. Jank, *Polynomerzeugende bei einer Klasse von Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen,* Monatsh. Math., 75, 31-37 (1971).

[8] Friedman A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type,* Prentice Hall, Englewood Cliffs: 1964.

[9] Kracht M. und E. Kreyszig, *Bergman-Operatoren mit Polynomen als Erzeugenden,* Manuscripta math., 1, 369-376 (1969).

[10] Kreyszig E., *Über zwei Klassen Bergman'scher Operatoren,* Math. Nachr., 37, 197-202 (1968).

[11] Kreyszig E., *Bergman-Operatoren der Klasse P,* Monatsh. Math., 74, 437-444 (1970).

[12] Kreyszig E., *On Bergman Operators for Partial Differential Equations in Two Variables,* Pac. J. Math., 36, Nr. 1, 201-208 (1971).

[13] Reich L., *Über multiplikative und algebraisch verzweigte Lösungen der Differentialgleichung* $(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w=0$, Ber. d. Gesellsch. f. Math. u. Datenv., Bonn, Nr. 57, 13-28 (1972).

[14] Ruscheweyh St., *Über den Rand des Einheitskreises fortsetzbare Lösungen der Differentialgleichung von Peschl und Bauer,* Ber. d. Gesellsch. f. Math. u. Datenv., Bonn, Nr. 57, 29-36 (1972).

[15] Ruscheweyh St., *Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung* $(1-z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - n(n+1) w = 0$, Journ. Reine u. Angew. Math., 270, 143-157 (1974).

[16] Watzlawek W., *Hyperbolische und paraboliche Differentialgleichungen der Klasse P,* Ber. d. Gesellsch. f. Math. u. Datenv., Bonn, Nr. 77, 147-179 (1973).