OSSERVAZIONI IN MERITO ALLA OTTIMIZZAZIONE DELLA COSTANTE CHE FIGURA IN UN CLASSICO TEOREMA DI JACKSON (*)

di SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *Si stabiliscono limitazioni inferiori e superiori per la migliore costante del teorema di Jackson sulla migliore uniforme approssimazione, mediante polinomi ordinari, di funzioni continue di una o più variabili reali.*

SUMMARY. - *We establish lower and upper bounds for the exact constant of Jackson's theorem on the best uniform approximation, with ordinary polynomials, of continuous functions of one or more real variables.*

1. Sia C la classe delle funzioni, a valori reali, definite e continue sull'intervallo $[-1, 1]$, C^* quella delle funzioni, pur esse a valori reali, definite per ogni x, continue e periodiche di periodo 2π. Per ogni $f \in C$ ed ogni $g \in C^*$, indicheremo, rispettivamente, con $E_n(f)$ ed $E_n^*(g)$, le loro migliori uniformi approssimazioni mediante polinomi algebrici e trigonometrici di ordine non superiore ad n. Com'è noto, esistono due costanti K e K^*, assolute, tali che, per esse, qualunque sia l'intero positivo n, risulta:

$$E_n(f) \leq K\,\omega_f\left(\frac{2}{n}\right), \quad \forall f \in C, \tag{1}$$

$$E_n^*(g) \leq K^*\,\omega_g\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad \forall g \in C^*, \tag{2}$$

(*) Pervenuto in Redazione il 10 settembre 1974.
(**) Indirizzo dell'Autore: Accademia Navale — 57100 Livorno.

essendo ω_f il modulo di continuità relativo ad $f(x)$ e ω_g quello relativo a $g(x)$. La (1) e la (2) esprimono due classici teoremi dovuti a Jackson [1].

Se $\delta(n)$ e $\delta^*(n)$ indicano due funzioni dell'intero positivo n, soddisfacenti le condizioni:

$$(3) \qquad 0 < \delta(n) \leq 2, \qquad \lim_{n\to\infty} n\,\delta(n) > 0,$$

$$(4) \qquad 0 < \delta^*(n) \leq 2\pi, \qquad \lim_{n\to\infty} n\,\delta^*(n) > 0,$$

per essere, in virtù di una immediata proprietà del modulo di continuità,

$$\omega_f\left(\frac{2}{n}\right) = \omega_f\left(\frac{2}{n\,\delta(n)}\cdot\delta(n)\right) \leq \left(1 + \frac{2}{n\,\delta(n)}\right)\cdot\omega_f(\delta(n)),$$

$$\omega_g\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_g\left(\frac{2\pi}{n\,\delta^*(n)}\cdot\delta^*(n)\right) \leq \left(1 + \frac{2\pi}{n\,\delta^*(n)}\right)\cdot\omega_g(\delta^*(n)),$$

dalle (1) e (2) seguono rispettivamente le:

$$(1)' \qquad E_n(f) \leq M\,\omega_f(\delta(n)), \quad \forall f \in C,$$

$$(2)' \qquad E_n^*(g) \leq M^*\,\omega_g(\delta^*(n)), \quad \forall g \in C^*,$$

con

$$M \geq K\cdot\sup_n\left(1 + \frac{2}{n\,\delta(n)}\right), \quad M^* \geq K^*\cdot\sup_n\left(1 + \frac{2\pi}{n\,\delta^*(n)}\right).$$

Korneičuk [2], ha determinato il *minimo* per la costante assoluta M^*, che figura in (2)', relativamente alla funzione

$$\delta^*(n) = \frac{\pi}{n+1}.$$

Tale autore ha infatti dimostrato che:

$$1) \quad E_n^*(g) \leq 1\cdot\omega_g\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \quad \forall g \in C^* \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

(1) D. Jackson, *The Theory of Approximation*, New York (1930), pag. 7 e pag. 15.

(2) N. P. Korneičuk, *The Exact constant in the theorem ......*, Doklady 145 (1962), pp. 514-515.

$$2) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ e } \forall\, n, \quad \exists\, g \in C^*: \; E_n^*(g) > (1-\varepsilon)\, \omega_g\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Il problema della ottimizzazione della costante M, che figura in $(1)'$ è, a quanto ci consta, tuttora aperto per tutte le possibili scelte della funzione $\delta(n)$ (3).

Della minima costante $\widetilde{M}$, per la quale la$(1)'$ si realizza, Korovkin (4) ha stabilito, nel caso $\delta(n) = \dfrac{1}{n}$, la limitazione superiore

$$L_\delta = 1 + \frac{\pi^2}{2}.$$

Noi determineremo, per $\widetilde{M}$, una limitazione inferiore l_δ (positiva), in corrispondenza a tutta una classe di funzioni $\delta(n)$; una relativa limitazione superiore L_δ può poi subito conseguirsi, come vedremo sfruttando la medesima tecnica usata da Korovkin per $\delta(n) = \dfrac{1}{n}$. Rivolgeremo, infine, le nostre considerazioni, sempre in ordine alla medesima problematica, al caso delle funzioni continue di più variabili.

2. Per il seguito indicheremo con Δ la classe delle funzioni $\delta(n)$, dell'intero positivo n, che soddisfano le due condizioni

$$(3)' \qquad 0 < \delta(n) \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} n\,\delta(n) > 0.$$

Vale il seguente:

LEMMA. *Se $\delta(n) \in \Delta$, allora, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $n = 1, 2, \ldots$, esiste $\varphi \in C$ per la quale risulta*

$$E_n(\varphi) \geq \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon\right) \omega_\varphi(\delta(n)).$$

(3) Nel caso $\delta(n) = \dfrac{1}{n}$, l'Autore della presente Nota ha erroneamente ritenuto di avere dimostrato che 1 risulta essere la migliore costante. Cfr., a tal proposito, S. GUERRA, *Osservazioni su un noto teorema di Jackson*, Boll. U. M. I. (3), vol. 18, pp. 57-64 — non vale la tesi del lemma IV — e S. GUERRA, *L'optimum per la costante nel classico teorema d'appossimazione di Jackson*, Boll. U. M. I. (3), Vol. XXII, pp. 205-207.

(4) P. P. KOROVKIN, *Linear operators and approximation theory*, Hindustan Publishing Corp. (India), 1960.

Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n, esiste $g(\theta) \in C^*$ tale che, per essa, risulta:

$$E_n^*(g) \geq \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon\right) \omega_g \left(\frac{\pi}{n+1}\right) \text{ [5]}.$$

La sostituzione $x = \cos\theta$ muta $[-\pi, \pi]$ in $[-1, 1]$ e la $g(\theta)$ nella $\varphi(x) = g(\text{arcos}x) \in C$. Detto $\tau_n(x)$ il polinomio di migliore uniforme approssimazione, di ordine non superiore ad n, per la $\varphi(x)$, si ha, allora,

$$E_n(\varphi) = \max_{x \in [-1,1]} |\varphi(x) - \tau_n(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |g(\text{arcos}\, x) - \tau_n(x)| =$$

$$= \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |g(\theta) - \tau_n(\cos\theta)| \geq E_n^*(g) \geq \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon\right) \omega_g \left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

e quindi, intanto, per la prima delle (3)',

(5) $$E_n(\varphi) \geq \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \varepsilon\right) \omega_g(\delta(n)).$$

Essendo

$$|\text{arcos}\, x_1 - \text{arcos}\, x_2| \geq |x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in [-1, 1],$$

si ha poi

$$\max_{|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta(n)} |g(\theta_1) - g(\theta_2)| = \max_{|\text{arcos}\, x_1 - \text{arcos}\, x_2| \leq \delta(n)} |g(\text{arcos}\, x_1) - g(\text{arcos} x_2)| =$$

$$= \max_{|\text{arcos}\, x_1 - \text{arcos}\, x_2| \leq \delta(n)} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \geq \max_{|x_1 - x_2| \leq \delta(n)} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|,$$

onde

(6) $$\omega_g(\delta(n)) \geq \omega_\varphi(\delta(n)).$$

Dalle (5) e (6) segue la tesi.

Dal lemma ora dimostrato discende subito il seguente:

TEOREMA I. *Per ogni $\delta(n) \in \Delta$, il numero*

$$l_\delta = 1$$

rappresenta, per $\widetilde{M}$, una limitazione inferiore.

[5] Cfr. G. G. LORENTZ, *Approximation of Functions*, Holt, Rinchart and Wiston Inc. (New-York), 1966, pg. 124, lemma 3.

Ove, infatti, la disuguaglianza

$$E_n(f) \leq M\, \omega_f(\delta(n))$$

risultasse verificata per ogni intero positivo n e per ogni $f \in C$, con $M < 1$, allora, detto n_0 il minimo intero positivo per il quale riesca

$$\frac{2n_0 + 1}{2n_0 + 2} > M$$

e posto

$$\varepsilon = \frac{2n_0 + 1}{2n_0 + 2} - M,$$

per ogni $n \geq n_0$ ed ogni $f \in C$, risulterebbe verificata la disuguaglianza

$$E_n(f) \leq \left(\frac{2n + 1}{2n + 2} - \varepsilon\right) \omega_f(\delta(n)),$$

ciò che sappiamo essere assurdo.

TEOREMA II. *Per ogni $\delta(n) \in \Delta$, il numero*

$$L_\delta = \sup_n \left\{1 + \frac{\pi^2}{2(n+2)\,\delta(n)}\right\}$$

rappresenta, per $\tilde{M}$, una limitazione superiore (6).

In virtù dei teoremi I e II riesce, ad esempio:

$$1 \leq \tilde{M} < 1 + \frac{\pi^2}{2}, \qquad \text{per} \quad \delta(n) = \frac{1}{n}$$

$$1 \leq \tilde{M} < 1 + \frac{\pi^2}{4}, \qquad \text{per} \quad \delta(n) = \frac{2}{n+1}$$

$$1 \leq \tilde{M} < 1 + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{per} \quad \delta(n) = \frac{\pi}{n+1}.$$

(6) Per la dimostrazione basta riprendere la tecnica usata da Korovkin (in loco citato alla nota (4) a più di pag. 3) per la determinazione di una limitazione superiore di M nel caso $\delta(n) = 1/n$, sostituendo l'intero positivo m, che in detto procedimento figura, con la funzione $\delta(n)$. Si veda, a tal proposito, anche la 2a parte (n^i 3 e 4) della presente nota.

3. In questo numero generalizzeremo, al caso pluridimensionale, la tecnica di Korovkin (cfr. nota (5) a pié di pag. 4); ciò al fine di una possibile estensione delle considerazioni del precedente n. 2 al caso delle funzioni continue di più variabili.

Indicheremo con G la classe delle funzioni $g(\theta)$, continue nell'ipercubo

$$Q \equiv \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \mid -\pi \leq \theta_i \leq \pi,\ i = 1, \dots, m\}$$

di $\mathbb{R}^m$, pari rispetto a ciascuna delle variabili e prolungate su $\mathbb{R}^m$ per periodicità 2π rispetto a $\theta_i\ (i=1, \dots, m)$.

Si osserva subito che la parità implica per la serie di Fourier di ogni $g(\theta) \in G$ la forma

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{r_1 \cdot \dots \cdot r_m} \lambda_{r_1 \cdot \dots \cdot r_m} \cdot a_{r_1 \cdot \dots \cdot r_m} \cdot \cos r_1\theta_1 \dots \cos r_m\theta_m, \tag{7}$$

con

$$\lambda_{r_1 \dots r_m} = \frac{1}{2^{m-k}}, \quad (k \text{ numero degli indici } r_i \text{ non nulli}) \tag{8}$$

e

$$a_{r_1 \dots r_m} = \frac{1}{\pi^m} \int_Q \cdot \cdot \int g(t_1 \cdot \dots \cdot t_m) \cos r_1 t_1 \dots \cos r_m t_m \, dt_1 \dots dt_m. \tag{9}$$

In corrispondenza ad ogni $g(\theta) \in G$, considereremo un operatore lineare $A_n(g; \theta)$ del tipo

$$A_n(g; \theta) = \sum_{0}^{n}{}_{r_1 \dots r_m} \lambda_{r_1 \dots r_m} \cdot \varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m} \cdot \cos r_1\theta_1 \dots \cos r_m\theta_m, \tag{10}$$

con i $\varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m}$ costanti.

In virtù delle (9), riesce

$$A_n(g; \theta) = \frac{1}{\pi^m} \sum_{0}^{n}{}_{r_1 \dots r_m} \lambda_{r_1 \dots r_m} \cdot \varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m} \cdot$$

$$\cdot \int_Q \dots \int g(t_1, \dots, t_m) \cdot \cos r_1 t_1 \dots \cos r_m t_m \cdot \cos r_1\theta_1 \dots \cos r_m\theta_m \, dt_1 \dots dt_m =$$

$$= \frac{1}{\pi^m} \int_Q \dots \int g(t_1, \dots, t_m) \sum_{0}^{n}{}_{r_1 \dots r_m} \lambda_{r_1 \dots r_m} \cdot \varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m} \cdot$$

$$\cdot \cos r_1 (t_1 - \theta_1) \dots \cos r_m (t_m - \theta_m) \, dt_1 \dots dt_m$$

e, pertanto, posto

$$t_i - \theta_i = u_i \qquad (i = 1, \dots, m),$$

l'operatore (10) può scriversi sotto forma integrale:

$$A_n(g;\theta) = \frac{1}{\pi^m} \int_Q g(u+\theta)\, \varphi_n(u)\, du, \tag{11}$$

con

$$\varphi_n(u) = \sum_0^n {}_{r_1 \dots r_m} \lambda_{r_1 \dots r_m} \cdot \varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m} \cdot \cos r_1 u_1 \dots \cos r_m u_m. \tag{12}$$

Valgono i lemmi seguenti:

LEMMA I. *È possibile determinare le costanti* $\varrho^{(n)}_{r_1 \dots r_m}$ *in modo che per esse risulti*

1) $\varphi_n(u) \geq 0, \quad \forall\, u \in Q,$

2) $\varrho^{(n)}_{0 \dots 0} = 1,$

3) $\varrho^{(n)}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \dots \varepsilon_m} = \dfrac{\cos \pi}{n+2}, \quad (i = 1, \dots, m), \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{per } j=i \\ 0, & \text{per } j \neq i \end{cases}$

Si consideri la funzione:

$$\chi_n(u) = H_n \cdot \left| \sum_{r=0}^{r} c_r\, \omega_1^r \right|^2 \dots \left| \sum_0^n c_r\, \omega_m^r \right|^2,$$

con

$$c_r = \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{n+2}, \quad H_n = \left(2 \sum_{r=0}^n c_r^2\right)^{-m}, \quad \omega_j = e^{iu_j}.$$

Essa è della forma (12); si ha, infatti, con ovvie notazioni,

$$\chi_n(u) = H_n \left(\sum_{r=0}^n c_r\, \omega_1^r\right) \left(\sum_{r=0}^n \overline{c_r\, \omega_1^r}\right) \dots \left(\sum_{r=0}^n c_r\, \omega_m^r\right) \left(\sum_{r=0}^n \overline{c_r\, \omega_m^r}\right) =$$

$$= H_n \sum_0^n {}_{r,s}\, c_r\, c_s\, e^{i(r-s)u_1} \dots \sum_0^n {}_{r,s}\, c_r\, c_s\, e^{i(r-s)u_m} =$$

$$= H_n \left\{ \sum_{r=0}^n c_r\, c_r + 2 \sum_{r=0}^{n-1} c_r\, c_{r+1} \cos u_1 + \dots \right.$$

$$\left. \dots + 2 \sum_{r=0}^{1} c_r\, c_{r+n} \cos (n-1)\, u_1 + 2 c_0\, c_n \cos n u_1 \right\} \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot \left\{ \sum_{r=0}^{n} c_r\, c_r + 2 \sum_{r=0}^{n-1} c_r\, c_{r+1} \cos u_m + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + 2 \sum_{r=0}^{1} c_r\, c_{r+n} \cos (n-1)\, u_m + 2 e_0\, c_n \cos n u_m \right\}.$$

La proprietà 1) è verificata ovviamente. Essendo, inoltre,

$$H_n \sum_{r=0}^{n} c_r\, c_r \ldots \sum_{r=0}^{n} c_r\, c_r = H_n \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^m = \frac{1}{2^m},$$

dalla (8) segue la 2).

Per quanto riguarda la 3) si osservi che, per essere

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi}{n+2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{n+2} + \operatorname{sen} \frac{(r-1)\pi}{n+2} \right],$$

cioè

$$c_{r-1} \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{2} (c_{r-2} + c_r)$$

e quindi

$$c_{r-1}^2 \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{2} (c_{r-2} \cdot c_{r-1} + c_{r-1} \cdot c_r),$$

risulta

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \sum_{r=0}^{n+1} c_{r-1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n+1} (c_{r-2} \cdot c_{r-1} + c_{r-1} \cdot c_r).$$

Ma $c_{-1} = \operatorname{sen} 0 = 0$, $c_{n+1} = \operatorname{sen} \pi = 0$ e, pertanto,

$$\cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \sum_{r=0}^{n} c_r^2 = \sum_{r=0}^{n-1} c_r \cdot c_{r+1}.$$

Da questa e dalla (8) segue allora, qualunque sia il valore dell'indice i,

$$\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \varrho_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i \ldots \varepsilon_m} = 2 H_n \sum_{r=0}^{n-1} c_r \cdot c_{r+1} \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^{m-1} =$$

$$= 2 H_n \cdot \cos \frac{\pi}{n+2} \left(\sum_{r=0}^{n} c_r^2 \right)^m = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

D'ora in poi supporremo sempre, anche se ciò non sarà esplicitamente detto, che le costanti $\varrho^{(n)}_{r_1 \ldots r_m}$ siano scelte come indicato nella dimostrazione del lemma precedente; supporremo cioè che, per il polinomio trigonometrico (12), siano rispettate le proprietà 1), 2), 3).

LEMMA II. *Sussiste la disuguaglianza seguente:*

$$\frac{1}{\pi^m}\int_Q \left[\sum_{i=1}^m |u_i|\,\varphi_n(u)\right] du \leq m\cdot\frac{\pi^2}{2(n+2)}.$$

Poiché, per $0 \leq u_i \leq \frac{\pi}{2}$, è $\frac{2u_i}{\pi} \leq \operatorname{sen} u_i$, riesce

$$\frac{1}{\pi^m}\int_Q |u_i|\,\varphi_n(u)\,du = \frac{1}{\pi^{m-1}}\int_Q \frac{2}{\pi}\left|\frac{u_i}{2}\right|\varphi_n(u)\,du \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^{m-1}}\int_Q \operatorname{sen}\left|\frac{u_i}{2}\right|\varphi_n(u)\,du;$$

per la disuguaglianza di Schwartz e per essere

$$\frac{1}{\pi^m}\int_Q \varphi_n(u)\,du = 1, \tag{13}$$

segue, inoltre,

$$\frac{1}{\pi^{m-1}}\int_Q \operatorname{sen}\left|\frac{u_i}{2}\right|\varphi_n(u)\,du \leq \frac{1}{\pi^{m-1}}\sqrt{\int_Q \operatorname{sen}^2\frac{u_i}{2}\,\varphi_n(u)\,du}\cdot\sqrt{\int_Q \varphi_n(u)\,du} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi^m}\int_Q (1-\cos u_i)\,\varphi_n(u)\,du} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\pi^m}\int_Q \cos u_i\,\varphi_n(u)\,du} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\varrho^{(n)}_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_i\dots\varepsilon_m}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n+2}}{2}} = \pi\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+2)} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2(n+2)}.$$

Se, allora, sommiamo membro a membro le m disuguaglianze che si deducono da quella ora ottenuta dando all'indice i successivamente i valori $1, \dots, m$ si perviene alla tesi.

LEMMA III. *$\delta(n)$ verifichi le condizioni* (3). *Per ogni $g(\theta) \in G$, risulta*

$$\max_{\theta \in Q} |g(\theta) - A_n(g;\theta)| \leq \left[1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2(n+2)\delta(n)}\right] \cdot \omega_g(\delta(n)),$$

essendo ω_g *il modulo di continuità relativo a* $g(\theta)$ (7).

In virtù della (13) si può scrivere

$$g(\theta) = \frac{1}{\pi^m} \int_Q g(\theta)\, \varphi_n(u)\, du$$

e quindi, per la (11),

$$A_n(g;\theta) - g(\theta) = \frac{1}{\pi^m} \int_Q [g(u+\theta) - g(\theta)]\, \varphi_n(u)\, du.$$

Da questa, per una nota proprietà del modulo di continuità e per il lemma II, segue allora

$$|A_n(g;\theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{\pi^m} \int_Q |g(u+\theta) - g(\theta)|\, \varphi_n(u)\, du \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^m} \int_Q \omega_g(\|u\|)\, \varphi_n(u)\, du = \frac{1}{\pi^m} \int_Q \omega_g\left(\delta(n) \cdot \frac{\|u\|}{\delta(n)}\right) \varphi_n(u)\, du \leq$$

$$\leq \omega_g(\delta(n)) \cdot \frac{1}{\pi^m} \int_Q \left(1 + \frac{\|u\|}{\delta(n)}\right) \varphi_n(u)\, du =$$

$$= \omega_g(\delta(n)) \left[1 + \frac{1}{\pi^m\, \delta(n)} \int_Q \|u\|\, \varphi_n(u)\, du\right] \leq$$

$$\leq \omega_g(\delta(n)) \left\{1 + \frac{1}{\delta(n)} \cdot \frac{1}{\pi^m} \int_Q \left[\sum_{i=1}^{m} |u_i|\, \varphi_n(u)\right] du\right\} \leq$$

$$\leq \left[1 + m\, \frac{\pi^2}{2(n+2)\delta(n)}\right] \cdot \omega_g(\delta(n))$$

e cioè la tesi.

(7) Si ha, precisamente:

$$\omega_g(\delta(n)) = \max_{\|\theta - \tilde{\theta}\| \leq \delta(n)} |g(\theta) - g(\tilde{\theta})|, \quad \|\theta - \tilde{\theta}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\theta_i - \tilde{\theta}_i)^2}.$$

4. Sia ora C_m la classe delle funzioni, a valori reali, di m variabili reali, definite e continue sull'ipercubo

$$U \equiv \{ x = (x_1, \dots, x_m) \mid -1 \leq x_i \leq 1, \; i = 1, \dots, m \}$$

di $\mathbb{R}^m$.

Per ogni $f \in C_m$ indicheremo con $E_n(f)$ la sua migliore uniforme approssimazione mediante polinomi algebrici di ordine non superiore ad n rispetto a ciascuna delle m variabili $x_1, \dots, x_m$.

In corrispondenza ad ogni funzione $\delta(n)$ dell'intero positivo n, che verifichi le (3), *esiste una costante assoluta M_m tale che, qualunque sia n, per essa risulta*

$$(1')_m \qquad E_n(f) \leq M_m \, \omega_f(\delta(n)), \quad \forall f \in C_m,$$

essendo ω_f il modulo di continuità relativo ad $f(x)$.

La dimostrazione di quanto ora asserito si consegue attraverso le osservazioni seguenti.

OSSERVAZIONE I. La sostituzione

$$(14) \qquad x_i = \cos \theta_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

muta U in Q, $f \in C_m$ nella $g(\theta) = f(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_m) \in G$ e l'operatore trigonometrico $A_n(g; \theta)$ nel polinomio algebrico, di grado non superiore ad n rispetto ad x_i,

$$P_n(x) = \sum_{0}^{n}{}_{r_1 \dots r_m} \lambda_{r_1 \dots r_m} \cdot \varrho_{r_1 \dots r_m} \cdot a_{r_1 \dots r_m} \cdot T_{r_1}(x_1) \dots T_{r_m}(x_m),$$

essendo $T_{r_i}(x_i)$ il polinomio di Tchebyschev, di 1ª specie, di ordine r_i.

OSSERVAZIONE II. Essendo, per le (14),

$$\| x - \tilde{x} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \tilde{x}_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\cos \theta_i - \cos \tilde{\theta}_i)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\theta_i - \tilde{\theta}_i)^2} = \| \theta - \tilde{\theta} \|,$$

riesce

$$\omega_g(\delta(n)) = \max_{\| \theta - \tilde{\theta} \| \leq \delta(n)} | g(\theta) - g(\tilde{\theta}) | = \max_{\| \theta - \tilde{\theta} \| \leq \delta(n)} | f(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_m) -$$

$$- f(\cos \tilde{\theta}_1, \dots, \cos \tilde{\theta}_m) | \leq \max_{\| x - \tilde{x} \| \leq \delta(n)} | f(x) - f(\tilde{x}) | = \omega_f(\delta(n)).$$

OSSERVAZIONE III. In virtù del lemma III del n. 3 si ha:

$$E_n(f) \leq \max_{x \in U} |f(x) - P_n(x)| = \max_{\theta \in Q} |g(\theta) - A_n(g;\theta)| \leq$$

$$\leq \left[1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2(n+2)\,\delta(n)}\right] \cdot \omega_g(\delta(n)) \leq M_m\, \omega_f(\delta(n)),$$

con $M_m \geq L_\delta^{(m)}$, essendo

$$L_\delta^{(m)} = \sup_n \left[1 + m \cdot \frac{\pi^2}{2(n+2)\,\delta(n)}\right]. \tag{15}$$

Nei riguardi della minima costante $\widetilde{M}_m$, per la quale la $(1')_m$ si realizza, valgono poi i due teoremi seguenti.

TEOREMA I_m. *Per ogni $\delta(n) \in \Delta$, il numero*

$$l_\delta^{(m)} = 1$$

rappresenta, per $\widetilde{M}_m$, una limitazione inferiore.

Per la dimostrazione basta considerare la sottoclasse di C_m costituita dalle funzioni, costanti rispetto a $x_2, \dots, x_m$, che verificano (rispetto ad x_1) il lemma del n. 2 ed applicare il teorema I.

TEOREMA II_m. *Per ogni $\delta(n) \in \Delta$, il numero $L_\delta^{(m)}$, definito con la posizione* (15), *rappresenta, per $\widetilde{M}_m$, una limitazione superiore.*

La dimostrazione segue, ovviamente, dalla osservazione III.