UN TEOREMA DI CONVERGENZA DEL METODO DI COLLOCAZIONE PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI EQUAZIONI FUNZIONALI LINEARI (*)

di ALFREDO BELLEN (a Trieste) e SERGIO GUERRA (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *In questa Nota si considera il metodo di collocazione in relazione al calcolo degli autovalori di una certa classe di equazioni funzionali lineari e si assegnano condizioni atte ad assicurarne la convergenza. Una applicazione ad un classico problema della Fisica matematica evidenzia la notevole efficacia numerica del metodo.*

SUMMARY. - *The collocation method for a class of linear functional equations is here considered and some conditions which ensure the convergence are given. The strenght of the method is tested by a classic problem of Mathematical Physic.*

In [1] abbiamo stabilito due teoremi di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di equazioni differenziali lineari ordinarie. In [2] abbiamo osservato come tali teoremi possano estendersi al caso, più generale, di equazioni integro-differenziali lineari ordinarie.

In questa Nota esaminiamo l'applicabilità del metodo di collocazione al calcolo degli autovalori di una certa classe di equazioni funzionali lineari, osservando come, anche per questo tipo di equazioni, si

(*) Pervenuto in Redazione il 2 settembre 1974.
Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.
(**) Indirizzo degli Autori: Alfredo Bellen, Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste; Sergio Guerra, Accademia Navale — 57100 Livorno.

le considerazioni relative, in [1] (3), agli operatori T e K; che la tesi, in [1], del lemma del n^0 3 è ora sostituita da: $\lim_{n \to \infty} \| Q_n \|_{L_{2,w}} = 0$ (4); e, infine, che, se u^* è un'autofunzione di (1) associata all'autovalore λ^*, l'ipotesi che figura nell'enunciato del teorema implica $u^* \in C^0 [a, b]$.

2. Come applicazione consideriamo il problema della determinazione delle frequenze proprie della membrana circolare, di raggio unitario, fissa al bordo, che si traduce, analiticamente, nella determinazione degli autovalori del problema seguente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda f = 0 \text{ in } A : x^2 + y^2 \leq 1 \\ f = 0 \text{ su } \partial A, \end{cases}$$

ovvero, passando da coordinate cartesiane ortogonali a coordinate polari, del problema

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial g}{\partial \varrho} + \dfrac{1}{\varrho^2} \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \lambda g = 0 \text{ in } A : \varrho \leq 1 \\ g = 0 \text{ su } \partial A. \end{cases}$$

Com'è ben noto (5), gli autovalori di (5) sono tutti e soli i numeri λ quadrati degli zeri positivi delle funzioni di Bessel di 1^a specie di indice ν intero non negativo

$$J_\nu (x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + k + 1) \cdot k!} \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^k$$

e le corrispondenti autofunzioni sono del tipo

$$\text{(6)} \qquad (A_\nu \cos \nu\theta + B_\nu \operatorname{sen} \nu\theta) \cdot J_\nu (\sqrt{\lambda} \cdot \varrho),$$

con A_ν e B_ν costanti arbitrarie.

(3) Cfr. il n^0 3.

(4) $$\| Q_n \|_{L_{2,w}} = \sqrt{\int_a^b w(x)\, Q_n^2 (x)\, dx}.$$

(5) Cfr., ad esempio, [4], pp. 286-298.

Poiché solo per $\nu=0$ la (6) fornisce una semplice infinità di autofunzioni, gli autovalori semplici di (5) sono tutti e soli i quadrati degli zeri di $J_0(x)$.

Scritta la (6) nella forma

$$(A_\nu \cos \nu\theta + B_\nu \operatorname{sen} \nu\varrho)\, z(\varrho)$$

e sostituendo in (5) segue subito che il calcolo degli autovalori di (5) è equivalente a quello degli autovalori del seguente problema differenziale lineare ordinario

$$\begin{cases} z'' + \dfrac{1}{\varrho} z' - \dfrac{\nu^2}{\varrho^2} z + \lambda z = 0 \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

che, posto

$$z = \varrho^\nu v,$$

può scriversi nella forma

(7) $$\begin{cases} \varrho^\nu v'' + (2\nu + 1)\varrho^{\nu-1} v' + \lambda\varrho^\nu v = 0 \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Sia, dapprima, $\nu=0$.

Scritta l'equazione di (7) nella forma equivalente

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho v') + \lambda\varrho v = 0,$$

da essa, integrando ogni suo termine tra 0 e ρ, segue la

$$v' + \frac{\lambda}{\varrho} \cdot \int_0^\varrho \xi v(\xi)\, d\xi = 0$$

e, pertanto, posto

(8) $$v' = \varrho u,$$

il problema (7) riesce equivalente alla seguente equazione

(9) $$u(\varrho) - \frac{\lambda}{\varrho^2} \int_0^\varrho \left(\xi \int_\xi^1 \eta u(\eta)\, d\eta \right) d\xi = 0.$$

Sia ora $\nu>0$.

Integrando l'equazione di (7), termine a termine, tra 0 e ρ, si ottiene

$$v' + \frac{\nu+1}{\varrho^{\nu}} \int_0^{\varrho} \xi^{\nu-1} v'(\xi)\, d\xi + \frac{\lambda}{\varrho^{\nu}} \int_0^{\varrho} \xi^{\nu}\, v(\xi)\, d\xi = 0$$

e, pertanto, sempre con la posizione (8), il problema (7) riesce equivalente alla seguente equazione

$$(10) \qquad u(\varrho) + \frac{\nu+1}{\varrho^{\nu+1}} \int_0^{\varrho} \xi^{\nu}\, u(\xi)\, d\xi - \frac{\lambda}{\varrho^{\nu+1}} \int_0^{\varrho} \left(\xi^{\nu} \int_{\xi}^{1} \eta\, u(\eta)\, d\eta \right) d\xi = 0.$$

La (9) e la (10), con $u \in L_2\,[0,1]$ sono equazioni funzionali del tipo (1), la prima con

$$Eu = 0, \quad Hu = \frac{1}{\varrho^2} \int_0^{\varrho} \left(\xi \left(\int_{\xi}^{1} \eta\, u(\eta)\, d\eta \right) \right) d\xi,$$

la seconda con

$$Eu = \frac{\nu+1}{\varrho^{\nu+1}} \int_0^{\varrho} \xi^{\nu}\, u(\xi)\, d\xi, \quad Hu = \frac{1}{\varrho^{\nu+1}} \int_0^{\varrho} \left(\xi^{\nu} \int_{\xi}^{1} \eta\, u(\eta)\, d\eta \right) d\xi.$$

Per esse la (4) si traduce, rispettivamente, nelle due condizioni

$$\det. \left[\frac{1}{2} - \frac{(\varrho_h^{(n)})^{k+2}}{k+4} \right] \neq 0, \quad \det. \left[\frac{1}{\nu+1} - \frac{(\varrho_h^{(n)})^{k+2}}{k+2+(\nu+1)} \right] \neq 0,$$

le quali, come può controllarsi, riescono entrambe verificate (cfr. [5], n^0 3, prop. IV).

Per la (9) l'ipotesi del teorema è verificata ovviamente; per la (10) tale ipotesi riesce verificata valendo, come facilmente può constatarsi, l'implicazione

$$u(\varrho) + \frac{\nu+1}{\varrho^{\nu+1}} \int_0^{\varrho} \xi^{\nu}\, u(\xi)\, d\xi = 0 \;\Rightarrow\; u(\varrho) = 0.$$

Si può, pertanto, concludere che, tanto per l'equazione (9), quanto per l'equazione (10), sussiste la tesi del teorema del n^0 1.

Scelto $q_n(x) = T_n(2x-1)$, essendo $T_n(x)$ il polinomio di Tchebyschev di 1ª specie di ordine n, i risultati da noi ottenuti (6), relativi ai primi 30 autovalori del problema considerato sono riportati nella seguente tabella.

In essa sono trascritte, per ciascun autovalore, solo le cifre che permangono nel passaggio da $n=15$ a $n=16$.

$\lambda_1 = 5{,}78318596294678450$ $(\nu=0)$	$\lambda_{16} = 135{,}02070$ $(\nu=2)$
$\lambda_2 = 14{,}68197064212389$ $(\nu=1)$	$\lambda_{17} = 139{,}04028$ $(\nu=0)$
$\lambda_3 = 26{,}3746164271633$ $(\nu=2)$	$\lambda_{18} = 149{,}452880$ $(\nu=8)$
$\lambda_4 = 30{,}47126234366$ $(\nu=0)$	$\lambda_{19} = 152{,}241153$ $(\nu=5)$
$\lambda_5 = 40{,}706465818200$ $(\nu=3)$	$\lambda_{20} = 169{,}3954$ $(\nu=3)$
$\lambda_6 = 49{,}21845632168$ $(\nu=1)$	$\lambda_{21} = 177{,}5207$ $(\nu=1)$
$\lambda_7 = 57{,}5829409032$ $(\nu=4)$	$\lambda_{22} = 178{,}337341$ $(\nu=9)$
$\lambda_8 = 70{,}84999891$ $(\nu=2)$	$\lambda_{23} = 184{,}66880$ $(\nu=6)$
$\lambda_9 = 74{,}8870068$ $(\nu=0)$	$\lambda_{24} = 206{,}5698$ $(\nu=4)$
$\lambda_{10} = 76{,}93892833$ $(\nu=5)$	$\lambda_{25} = 209{,}54012$ $(\nu=10)$
$\lambda_{11} = 95{,}2775725$ $(\nu=3)$	$\lambda_{26} = 218{,}92020$ $(\nu=2)$
$\lambda_{12} = 98{,}7262724$ $(\nu=6)$	$\lambda_{27} = 219{,}67000$ $(\nu=7)$
$\lambda_{13} = 103{,}499453$ $(\nu=1)$	$\lambda_{28} = 222{,}932$ $(\nu=0)$
$\lambda_{14} = 122{,}427796$ $(\nu=4)$	$\lambda_{29} = 243{,}04335$ $(\nu=11)$
$\lambda_{15} = 122{,}9076002$ $(\nu=7)$	$\lambda_{30} = 246{,}4954$ $(\nu=5)$

(6) I relativi calcoli sono stati eseguiti in doppia precisione (mantissa di 18 cifre) sull'elaboratore I. B. M. 1620, in dotazione dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste. Per quanto riguarda gli accorgimenti di calcolo utilizzati, cfr. [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bellen e S. Guerra, *Il metodo di collocazione e il calcolo degli autovalori di problemi differenziali lineari ordinari. Teoremi di convergenza e applicazioni,* Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena XXIII (1974).

[2] A. Bellen e S. Guerra, *Teoremi di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di equazioni integro differenziali lineari ordinarie,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste vol VI Fasc. II (1974), pp. 149-155.

[3] P. Erdös e P. Turan, *On interpolation,* Ann. of Math., 38, (1937), pp. 142-155.

[4] F. G. Tricomi, *Equazioni a derivate parziali,* Ediz. Cremonese, Roma (1957).

[5] S. Guerra, *Su alcuni determinanti collegati ad un particolare sistema algebrico.* In corso di stampa.