UN METODO DI IMMERSIONE DI UNO SPAZIO TOPOLOGICO DI HAUSDORFF IN UNO SPAZIO TOPOLOGICO DI HAUSDORFF ASSOLUTAMENTE CHIUSO (*)

di DOMENICO LENZI (a Lecce) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro si introduce un metodo per l'immersione di uno spazio topologico di Hausdorff in uno spazio topologico di Hausdorff assolutamente chiuso (ved.* [*B*], *pag.* 160, *es.* 19)*; questo metodo elimina alcuni inconvenienti di quello riportato in* [*B*] (*pag.* 162, *es.* 25) *e sembra pertanto preferibile.*

SUMMARY. - *In this work we introduce a method for the embedding of a Hausdorff topological space in an absolutely closed Hausdorff topological space (see* [*B*], *pag.* 160, *exerc.* 19)*; this method eliminates some shortcomings of the method reported in* [*B*] (*pag.* 162, *exerc.* 25) *and seems therefore preferable.*

Introduzione.

Il concetto di spazio topologico compatto è stato generalizzato in svariati modi (cfr. [N] pag. 139). In questo lavoro vogliamo riferirci alla nozione di spazio topologico assolutamente chiuso, intendendo con ciò uno spazio in cui ogni filtro di insiemi avente una base di aperti ammette almeno un punto di aderenza, (cfr. [B], pag. 160, exerc. 19). Come viene mostrato in [B] (pag. 162, exerc. 25) ogni spazio di Hausdorff $(S,\mathcal{T})$ è sottospazio di uno spazio di Hausdorff assolutamente chiuso $(S',\mathcal{T}')$. Però l'immersione riportata in [B] appare non

(*) Pervenuto in Redazione il 17 luglio 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica - Università - 73100 Lecce.

Per la prima parte della 2) basta osservare che, essendo h continua ed avendo gli elementi di F_1' intersezione non vuota con $h(S)$, gli elementi di F_1 sono aperti in $(S,\mathcal{T})$ ed hanno a due a due intersezione non vuota, onde $\mathcal{B}_1$ è base per un filtro aperto di $(S,\mathcal{T})$. La seconda parte della 2) non presenta difficoltà dimostrative. c. v. d.

Ponendosi nelle ipotesi del teor. 1 si ricava agevolmente il seguente

COROLLARIO 1. *Se F è un filtro aperto di $(S,\mathcal{T})$, F' il filtro aperto di $(S',\mathcal{T}')$ associato ad F ed F_1 il filtro aperto di $(S,\mathcal{T})$ associato ad F' in base al teor. 1. si ha che $F \supset F_1$.*

TEOREMA 2. *Sia $(S,\mathcal{T})$ un sottospazio topologico denso nello spazio $(S',\mathcal{T}')$.*

1) *Se F' è un ultrafiltro aperto di $(S',\mathcal{T}')$ ed F è l'insieme degli aperti ottenuti intersecando gli elementi di F' con S allora F è un ultrafiltro aperto di $(S,\mathcal{T})$.*

2) *Se F_1 è un ultrafiltro aperto di $(S,\mathcal{T})$ ed F_1' è l'insieme degli aperti di $(S',\mathcal{T}')$ che includono qualche elemento di F allora F_1' è un ultrafiltro aperto di $(S',\mathcal{T}')$; inoltre $\bigcap_{X \in F_1} \bar{\bar{X}} = \bigcap_{X \in F_1'} \bar{\bar{X}}$.*

DIM. [3]. Per il punto 1) si osserva (essendo S denso in S') che $\emptyset \notin F$ e che l'intersezione di due elementi di F è ancora un elemento di F. Inoltre, dati $A \in \mathcal{T}$ e $B \in F$ tali che $B \subset A$, esistono $A' \in \mathcal{T}'$ e $B' \in F'$ tali che $A = A' \cap S$ e $B = B' \cap S$. Orbene, $A' \cup B' \supset B'$, quindi $A' \cup B' \in F'$. Poiché $(A' \cup B') \cap S = (A' \cap S) \cup (B' \cap S) = A$, si può concludere che $A \in F$, onde F risulta essere un filtro aperto di $(S,\mathcal{T})$. Infine se $A \in \mathcal{T}$ è tale che per ogni $B \in F$ $A \cap B \neq \emptyset$, preso $A' \in \mathcal{T}'$ tale che $A' \cap S = A$ e preso un qualsiasi $B' \in F'$, si ha $A' \cap B' \supset (A' \cap S) \cap (B' \cap S) = A \cap (B' \cap S) \neq \emptyset$; quindi $A' \in F'$, per cui $A \in F$ ed F risulta essere massimale.

Per il punto 2) è immediato provare che F_1' è un filtro aperto di $(S',\mathcal{T}')$. Sia allora $A' \in \mathcal{T}'$ tale che $A' \cap B' \neq \emptyset$ per ogni $B' \in F_1'$. Orbene per un qualsiasi $B \in F_1$, poiché esso è del tipo $B_1' \cap S$ (con $B_1' \in F_1'$) e poiché S è denso in S', si ha che $\emptyset \neq A' \cap B_1' \cap S = (A' \cap S) \cap (B_1' \cap S) = (A' \cap S) \cap B$. Ne consegue, essendo F_1 massimale, che $A' \cap S \in F_1$, onde $A' \in F_1'$ ed F_1' risulta essere massimale.

[3] In questa dimostrazione faremo tacito riferimento alla caratterizzazione dei filtri massimali di un reticolo dotato di elemento minimo riportata nell'ultimo periodo del *NB* iniziale.

Infine si fa osservare che $\bigcap_{X\in F_1}\overline{\overline{X}} \subset \bigcap_{X\in F_1'}\overline{\overline{X}}$; allora perché il teorema sia completamente dimostrato basta provare che da $x\in\bigcap_{X\in F_1'}\overline{\overline{X}}$ consegue che $x\in\bigcap_{X\in F_1}\overline{\overline{X}}$. Infatti se $x\in\bigcap_{X\in F_1'}\overline{\overline{X}}$ l'ultrafiltro aperto F_1' converge ad x rispetto a $\mathcal{T}'$ (vedi Oss. 1), per cui un qualsiasi intorno aperto A' (rispetto a $\mathcal{T}'$) di x risulta appartenere ad F_1'. Tenendo conto di come è stato definito F_1' si ha che A' ha intersezione non vuota con ogni elemento di F_1, donde la tesi. c. v. d.

TEOREMA 3. *Se* $(S,\mathcal{T})$ *è un sottospazio topologico denso nello spazio di Hausdorff* $(S',\mathcal{T}')$ *ed è tale che per ogni ultrafiltro aperto* F *di* $(S,\mathcal{T})$ $\bigcap_{X\in F}\overline{X}\neq\emptyset$ (*naturalmente* $\overline{\overline{X}}$ *è la chiusura di* X *in* $(S',\mathcal{T}')$) *allora* $(S',\mathcal{T}')$ *è assolutamente chiuso.*

DIM. Sia F' un ultrafiltro aperto di $(S',\mathcal{T}')$, sia inoltre F l'ultrafiltro aperto ottenuto intersecando gli elementi di F' con S (vedi teorema 2). Allora $\emptyset\neq\bigcap_{X\in F}\overline{\overline{X}}=\bigcap_{X\in F'}\overline{\overline{X}}$ e dall'osservazione 1 si ha subito la tesi. c. v. d.

OSSERVAZIONE 2. Naturalmente ogni spazio compatto è assolutamente chiuso. Di conseguenza ogni spazio topologico può essere immerso (nel senso topologico) in uno spazio topologico assolutamente chiuso, basta infatti immergerlo in uno spazio compatto. Però soltanto se lo spazio di partenza è uno spazio di Hausdorff completamente regolare (Spazio di Tychonoff) esso ammette una compattificazione di Hausdorff (cfr. [K], pag. 145).

Ci proponiamo ora di fornire un metodo di immersione di uno spazio topologico di Hausdorff in uno spazio di Hausdorff assolutamente chiuso. Definiamo all'uopo una relazione R nell'insieme $\mathcal{F}$ degli ultrafiltri aperti di uno spazio di Hausdorff $(S,\mathcal{T})$ ponendo F_1RF_2 se e solo se $F_1=F_2$ oppure F_1 ed F_2 convergono ad uno stesso $x\in S$.

La relazione R è chiaramente una relazione di equivalenza. Consideriamo allora l'applicazione f di S in $\mathcal{F}$, iniettiva, in quanto $(S,\mathcal{T})$ è di Hausdorff, che associa ad ogni $x\in S$ la classe d'equivalenza costituita dagli ultrafiltri aperti di $(S,\mathcal{T})$ che convergono ad x.

Dato ora un qualsiasi aperto $A\in\mathcal{T}$, sia $\widehat{A}$ l'insieme ottenuto dall'unione di $f(A)$ con l'insieme $\{Y\in\frac{\mathcal{F}}{R}-f(S) \mid \exists\, F\in\mathcal{F} : Y=\{F\}$ e *a)* $x \in \mathcal{E} A$ *se e solo se* $f(x) \in \mathcal{E}\widehat{A}$;

b) $x \in \mathcal{F} A$ *se e solo se* $f(x) \in \mathcal{F}\widehat{A}$;

c) x *è un punto d'aderenza per* A *se e solo se* $f(x)$ *è punto d'aderenza per* $\widehat{A}$.

DIM. Per la *a)* basta tener presente che $x \in \mathcal{E} A$ se e solo se esiste $A_1 \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A_1$ ed $A_1 \cap A = \varnothing$, il che è come dire che $f(x) \in \widehat{A_1}$ (cfr. osservazione 3, punto 4)) e $\varnothing = \widehat{A_1 \cap A} = \widehat{A_1} \cap \widehat{A}$. Per la *b)* basta tener presente la *a)* ed il già citato punto 4) dell'osservazione 3. La *c)* è conseguenza immediata di *a)* e di *b)*. c. v. d.

TEOREMA 9. *Dato un qualsiasi ultrafiltro aperto* F *di* $(S, \mathcal{T})$ ed $X_1 \in F$, *il punto* $Y = [F]_R \in \widehat{S}$ *è d'aderenza per* $\widehat{X_1}$; *onde* $\bigcup_{X \in F} \overline{\widehat{X}} \neq \varnothing$.

DIM. Se $\bigcap_{X \in F} \overline{X} = \varnothing$ si ha $Y = \{F\}$ ed $Y \notin f(S)$, per cui si ha $Y \in \widehat{X_1}$ (proprio per definizione di $\widehat{X_1}$).

Se invece $\{x\} = \bigcap_{X \in F} \overline{X}$ allora x è d'aderenza per ogni $X \in F$, onde $Y = f(x)$ è d'aderenza per $\widehat{X}$ qualunque sia $X \in F$ (cfr. teor. 8). c. v. d.

TEOREMA 10. *Lo spazio topologico* $(\widehat{S}, \widehat{\mathcal{T}})$ *è uno spazio di Hausdorff.*

DIM. Siano Y_1 ed Y_2 due elementi distinti qualsiansi di $\widehat{S}$. Possono allora verificarsi i seguenti casi:

a) $Y_1 = f(x_1)$ ed $Y_2 = f(x_2)$, con x_1 ed x_2 elementi opportuni di S;

b) $Y_1 = f(x_1)$, con x_1 elemento opportuno di S, ed $Y_2 \notin f(S)$;

c) $Y_1 \notin f(S)$ ed $Y_2 = f(x_2)$, con x_2 elemento opportuno di S;

d) $Y_1 \notin f(S)$ ed $Y_2 \notin f(S)$.

Nel caso *a)*, essendo $(S, \mathcal{T})$ uno spazio topologico di Hausdorff, esistono un intorno aperto A_1 di x_1 ed un intorno aperto A_2 di x_2 tali che $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Allora $\widehat{A_1}$ ed $\widehat{A_2}$ risultano intorni aperti rispettivamente di $Y_1 = f(x_1)$ e di $Y_2 = f(x_2)$ tali che $\widehat{A_1} \cap \widehat{A_2} = \widehat{A_1 \cap A_2} = \varnothing$.

Nel caso *b*) Y_2 risulta costituito da un unico filtro massimale F_2 di $\mathcal{T}(\cup, \cap)$. Allora, essendo $\bigcap_{X \in F_2} \overline{X} = \emptyset$, x_1 risulta esterno ad almeno un elemento $A_2 \in F_2$, il che è come dire che esistono un intorno aperto A_1 di x_1 ed un elemento $A_2 \in F_2$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, onde $\widehat{A_1} \cap \widehat{A_2} = \emptyset$. In conclusione, essendo A_1 un intorno aperto di $Y_1 = f(x_1)$, basta osservare che $\widehat{A_2}$ è un intorno aperto di Y_2, dal momento che $A_2 \in F_2$ (cfr. prima parte della dimostrazione del teor. 7).

Nel caso *c*) basta ricondursi al caso *b*).

Nel caso *d*) basta osservare che Y_1 ed Y_2 si riducono rispettivamente ad un unico filtro massimale F_1 e ad un unico filtro massimale F_2. Allora, essendo $Y_1 \neq Y_2$, esistono $A_1 \in F_1$ ed $A_2 \in F_2$ tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, onde $\widehat{A_1} \cap \widehat{A_2} = \emptyset$. Osservato che $\widehat{A_1}$ ed $\widehat{A_2}$ sono intorni aperti rispettivamente di Y_1 e di Y_2 (cfr. prima parte della dimostrazione del teor. 7) il teorema risulta completamente provato.

c. v. d.

TEOREMA 11. *Lo spazio topologico* $(\widehat{S}, \widehat{\mathcal{T}})$ *è assolutamente chiuso ed* $(S, \mathcal{T})$ *risulta essere immerso in esso.*

DIM. Dal momento che $f(S)$ è denso in $(\widehat{S}, \widehat{\mathcal{T}})$ ed $(f(S), \mathcal{T}')$ (dove $\mathcal{T}'$ è la topologia indotta da $\widehat{\mathcal{T}}$ in $f(S)$) è chiaramente omeomorfo ad $(S, \mathcal{T})$ grazie all'applicazione f di cui alle prime pagine, per i teoremi 3 e 9 si ha subito la prima parte del teorema.

c.v.d.

TEOREMA 12. *Siano* $(S, \mathcal{T})$ ed $(S^*, \mathcal{T}^*)$ *degli spazi topologici di Hausdorff ed* $(S^*, \mathcal{T}^*)$ *sia assolutamente chiuso; sia* $(\widehat{S}, \widehat{\mathcal{T}})$ *lo spazio di Hausdorff assolutamente chiuso relativo al teor.* 11 *ed* $(f(S), \mathcal{T}')$ *sia il sottospazio topologico di* $(\widehat{S}, \widehat{\mathcal{T}})$ *avente come sostegno* $f(S)$ *(dove* f *è l'applicazione di* S *in* $\widehat{S}$ *di cui alle prime pagine); sia* φ *un'applicazione di* $f(S)$ *in* S^* *continua ed aperta rispetto ad* $S_0 = \varphi(f(S))$ *munito della topologia* $\mathcal{T}_0$ *indotta da* $\mathcal{T}^*$*; siano* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_0$, *gli insiemi degli ultrafiltri aperti rispettivamente di* $(S, \mathcal{T})$, $(f(S), \mathcal{T}')$, *ed* $(S_0, \mathcal{T}_0)$. *Inoltre dato* $A_0 \in \mathcal{T}_0$ *si ponga* $A_0^* = A_0 \cup \{y \in \overline{\overline{S_0}} - S_0 \mid \exists\, F_0 \in \mathcal{F}_0$ *tale che* $A_0 \in F_0$ *ed* $y \in \bigcap_{X \in F_0} \overline{\overline{X}}\}$.

BIBLIOGRAFIA

[BI] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory*, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1967.

[B] N. BOURBAKI: *Elements de Math.*, Topologie Générale, chap. 1, IVème edition, HERMANN, Paris, 1965.

[D] N. DINCULEANU: *Vector Measures*, Pergamon Press, 1967.

[K] J. L. KELLEY: *General Topology*, Princeton, Van Nostrand, 1968.

[N] J. NAGATA: *Modern General Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[N.W.] S. A. NAIMPALLY - B. D. WARRACK: *Proximity Spaces*, University Press, Cambridge, 1970.

[S] G. SZASZ: *Introd. to Lattice theory*, Academic Press, N.York-London, 1963.