SU UN PROBLEMA RELATIVO AI SISTEMI DI STEINER DISGIUNTI (*)

di GIOVANNI FERRERO (a Parma) (**)

SOMMARIO. - *Si determina il massimo numero di sistemi di Steiner disgiunti aventi ordine 3^n ed uno stesso gruppo regolare e transitivo di automorfismi.*

SUMMARY. - *The maximal number of disjoint Steiner systems is determined which have order 3^n and the same regular transitive group of automorphisms.*

Un sistema (di terne) di Steiner è una struttura di incidenza (costituita da punti e rette) tale che

a) per due punti passa una ed una sola retta,

b) ogni retta possiede esattamente tre punti.

Per la bibliografia sull'argomento si veda [2], [5].

Due sistemi di Steiner dotati degli stessi punti si dicono disgiunti se non hanno rette in comune. In [1] si indica con $D(\nu)$ il massimo numero di sistemi di Steiner disgiunti aventi ordine ν e si forniscono limitazioni per tale numero. In [6] si determina $D(3^n)$ (⁰).

Diciamo *regolare* un sistema di Steiner dotato di un gruppo di automorfismi regolare e transitivo sui suoi punti. In [3], [4], [5] abbiamo elaborato varie tecniche per costruire e studiare tali sistemi, e affrontare alcuni problemi posti da [1].

(*) Pervenuto in Redazione il 20 giugno 1974.

Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. nell'ambito del G.N.S. A.G.A.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica - Università - 43100 Parma.

(⁰) Cfr. anche MULLIN, R. C. e NEMETH, E. *On the nonexistence of orthogonal Steiner systems of order* 9, Canad. Math. Bull. 13 (1970), 131-134.

Usando le nostre tecniche vogliamo qui individuare il massimo numero di sistemi di Steiner disgiunti aventi ordine $\nu=3^n$ ed uno stesso gruppo regolare e transitivo di automorfismi.

1. Sia G un gruppo additivo. Diciamo funzione di Steiner α (definita su G) ogni involuzione α di G in G che tenga fermo l'elemento neutro (zero) [1] di G e tale che inoltre sia $\alpha(-x)=\alpha(x)-x$, $\forall x \in G$.

Sia α una funzione di Steiner definita su G, e si chiamino punti gli elementi di G, rette gli insiemi che si ottengono trasformando quelli della forma $(0, a, \alpha(a))_{a \in G-0}$ con le traslazioni $x \to x+b$ $(x, b \in G)$. Si ottiene allora un sistema (di terne) di Steiner S_α, che diremo associato alla funzione α. Ovviamente S_α ammette come gruppo di automorfismi il cayleiano destro di G. Si ha anche che ogni sistema di Steiner che ammetta un gruppo di automorfismi regolare e transitivo (sui suoi punti) può essere ottenuto a partire da un gruppo e da una funzione di Steiner operando come sopra indicato.

Se α è una funzione di Steiner definita sul gruppo G chiamiamo gruppo di Steiner associato ad α (e indichiamo con ζ_α) il gruppo delle permutazioni degli elementi di G generato dalla α e dalla inversione i: $x \to -x$ $(x \in G)$. Una traiettoria (diversa da quella banale ridotta al solo zero di G) di un gruppo di Steiner ζ_α può essere costituita da sei o da due elementi. Nel secondo caso verrà detta traiettoria fine.

Una traiettoria fine di ζ_α costituisce, insieme allo zero, un sottogruppo di G, ed ivi la α opera come la inversione i (Cfr. il teorema 2 di [3]). Viceversa α opera come la i soltanto sullo zero e sulle traiettorie fini di ζ_α.

Per ragioni tipografiche a volte parleremo di traiettoria della funzione di Steiner α anziché del gruppo di Steiner ζ_α.

OSSERVAZIONE 1. *Siano G un gruppo additivo, α una funzione di Steiner definita su G. Supponiamo che α possiede tre traiettorie fini X, Y, Z. Posto $T=X \cup Y \cup Z$ possiamo asserire che G possiede una funzione di Steiner α' che opera come la α su $G-T$ ed ammette T come traiettoria se e solo se T contiene due elementi a, b non appartenenti ad una stessa traiettoria di α tali che $b-a$ appartenga a T.*

Se infatti esistono gli elementi a, b previsti dall'enunciato si consideri l'involuzione α' che opera come la α su $G-T$ e tale che inoltre

$$\alpha'(a)=b, \quad \alpha'(-a)=b-a, \quad \alpha'(-b)=a-b.$$

(1) Per semplificare indicheremo con 0 tanto l'elemento neutro di G che il sottoinsieme di G cui appartiene soltanto 0.

Una semplice verifica diretta mostra che la α' è una funzione di Steiner e che T è una sua traiettoria. Questo basta a dimostrare una parte dell'enunciato.

Sia viceversa α' una funzione di Steiner che operi come la α su $G-T$ ed ammetta T come traiettoria. Scelto un elemento $a\in T$ poniamo $\alpha'(a)=b$. Ricordiamo ora che ζ_α, contiene la i: $x \to -x$ e che dunque la T contiene, accanto ad un qualunque elemento x, il suo opposto $-x$. Possiamo dunque dire che la T contiene $-a$ e anzi anche $\alpha'(-a)$. Ora $\alpha'(-a)=\alpha(a)-a=b-a$, di modo che $b-a\in T$. Abbiamo così trovato gli elementi richiesti dall'altra parte dell'enunciato, e la dimostrazione è così completata.

OSSERVAZIONE 2. *Se α è una funzione di Steiner definita sul gruppo G e φ è un automorfismo di G, allora $\alpha^\varphi=\varphi\circ\alpha\circ\varphi^{-1}$ è una funzione di Steiner. Le traiettorie di α^φ sono gli insiemi che si ottengono operando con φ sulle traiettorie di α.*

La prima parte del nostro enunciato non è che un richiamo all'osservazione 1 di [5]; per la seconda è sufficiente ad esempio una verifica diretta. Notiamo ancora che dall'Osservazione (e ricordando che φ è una biiezione) segue subito che φ manda le traiettorie fini di α nelle traiettorie fini di α^φ.

2. Veniamo ora al risultato principale del presente lavoro.

TEOREMA 3. *Il massimo numero di sistemi di Steiner di ordine 3^n due a due disgiunti e dotati di uno stesso gruppo di automorfismi regolare e transitivo è $(3^n-1)/2$.*

Per la dimostrazione ricordiamo intanto che due funzioni di Steiner α, α' definite sullo stesso gruppo G individuano sistemi di Steiner $S_\alpha, S_{\alpha'}$, disgiunti se e solo se non ci sono elementi non nulli di G su cui α, α' operano allo stesso modo (lemma 12 di [5]).

Sia ora G un gruppo di ordine 3^n e sia α una qualunque funzione di Steiner definita su G. L'ordine di G è congruo a 3 modulo sei, e dunque il gruppo di Steiner ζ_α possiede almeno una traiettoria fine F (corollario 4 di [3]). Inoltre l'unione di F con lo zero di G è un sottogruppo $F^0=F\cup 0$ di G avente ordine 3, ed ivi la α opera come la i: $x \to -x$ (teorema 2 di [3]). Ora G possiede al più $(3^n-1)/2$ sottogruppi di ordine 3 e dunque ne segue che su G non è possibile definire più di $(3^n-1)/2$ funzioni di Steiner senza che almeno due di queste operino allo stesso modo (e precisamente come la i) su almeno un elemento di G. Dunque, per quanto sopra ricordato, non più di

$(3^n-1)/2$ funzioni di Steiner definite su G danno luogo a sistemi di Steiner due a due disgiunti. D'altronde i sistemi di Steiner che ammettono come gruppo di automorfismi il cayleiano destro di G provengono tutti da funzioni di Steiner definite su G, ed ogni gruppo regolare e transitivo di permutazioni è il cayleiano di qualche gruppo astratto. Ne segue subito che $(3^n-1)/2$ *è un limite superiore* per il numero dei sistemi di Steiner previsti dall'enunciato. Si nota inoltre che *tale limite può essere effettivamente raggiunto al più* quando G ammette $(3^n-1)/2$ sottogruppi di ordine tre, *al più quando cioè G ha esponente* 3.

Consideriamo ora un 3-gruppo abeliano elementare G di ordine 3^n, e sia F^0 un sottogruppo di G avente ordine 3. Sia Φ l'insieme dei sottogruppi di G aventi ordine 9 e contenenti F^0. Ovviamente Φ è un ricoprimento di G (2) e l'intersezione di due suoi qualunque elementi è F^0.

Sia H un elemento di Φ. In esso l'inversione i è una funzione di Steiner (come si vede con verifica diretta o ricordando l'osservazione 8 di [3]), e tutte le traiettorie di ζ_i sono fini (o banali). Scegliamo due elementi $a, b \in H-F^0$ in modo che $b-a$ non appartenga ad F^0 (3). Indicati rispettivamente con A, B, C i sottogruppi di H generati da $a, b, b-a$ si ha subito che tali gruppi sono due a due distinti, che anzi gli insiemi $X=A-0$, $Y=B-0$, $Z=C-0$ sono traiettorie fini di ζ_i e soddisfano alle condizioni dell'Osservazione 1. Possiamo pertanto costruire su H una funzione di Steiner α_H tale che $T=X \cup Y \cup Z$ sia una traiettoria di α_H ed inoltre $\alpha_H(x)=i(x)=-x$ per $x \in H-T$.

Possiamo concluderne che ogni $H \in \Phi$ possiede una funzione di Steiner α_H che opera come la i su F^0 ed ammette soltanto $F=F^0-0$ come traiettoria fine.

Riformuliamo ora l'osservazione 9 di [4] per adeguarla alle attuali notazioni: sia G un gruppo e Φ un sistema di suoi sottogruppi che lo ricopra. Su ogni $H \in \Phi$ sia definita una funzione di Steiner α_H. Se per ogni H, K di Φ le restrizioni di α_H ed α_K ad $H \cap K$ coincidono, allora l'unione α delle α_H è una funzione di Steiner definita su tutto G.

Ora nel caso attualmente prospettato l'intersezione di due qualunque elementi distinti di Φ è F^0, e tutte le α_H operano su F^0 come la i. Per il risultato appena richiamato si ha subito che *l'unione α della α_H è*

(2) Nel senso che ogni elemento di G appartiene almeno ad un elemento di Φ.

(3) Poiché H è abeliano elementare di ordine 9 tale scelta non presenta problemi.

una funzione di Steiner; inoltre, in base a quanto osservato a suo tempo, si ha ancora subito che la α *ammette soltanto* $F=F^0-0$ *come traiettoria fine*. Dalla costruzione risulta ancora che l'unione di F^0 e di una traiettoria non fine della α è un sottogruppo di G avente ordine 9.

Sia ora F_i^0 uno dei $(3^n-1)/2$ sottogruppi del nostro G che hanno ordine 3, e sia φ_i un automorfismo di G che trasformi F^0 in F_i^0 (4), tale cioè che $\varphi_i(F^0)=F_i^0$. Allora $\alpha^{\varphi_i}=\varphi_i \circ \alpha \circ \varphi_i^{-1}$ è di Steiner (Osservazione 2). Inoltre, sempre per tale osservazione, $F_i=F_i^0-0$ è l'unica traiettoria fine di α^{φ_j}, visto che F^0 è l'unica traiettoria fine di α.

Si ha così un modo per associare ad ogni sottogruppo F_i^0 di G avente ordine tre una funzione di Steiner α_i che ammette come unica traiettoria fine $F_i=F_i^0-0$. Siano α_i, α_j due funzioni ottenute come sopra, e siano F_i, F_j (con $F_i \neq F_j$) le relative traiettorie fini.

Mostriamo che α_i, α_j *non operano allo stesso modo su alcun elemento non nullo di* G, che cioè se $\alpha_i(x)=\alpha_j(x)$, allora $x=0$.

Se infatti, per assurdo, $\alpha_i(x)=\alpha_j(x)$, con $x \neq 0$: allora le funzioni di Steiner α_i, α_j avrebbero in comune una traiettoria non banale $T \neq F_i$ (5) contenente x, per la definizione stessa di gruppo di Steiner associato ad una funzione di Steiner.

Ora, grazie alla costruzione delle α_i si ha che $\varphi_i^{-1}(T) \cup F^0$, unione di F^0 e di una traiettoria (necessariamente non fine) di α, risulterebbe essere un sottogruppo di G avente ordine 9. Sarà pertanto ancora un sottogruppo di G avente ordine 9 il suo trasformato mediante φ_i, l'insieme cioè $\varphi_i(\varphi_i^{-1}(T) \cup F^0)=T \cup F_i^0$.

Per la stessa ragione anche $T \cup F_j^0$ dovrebbe essere un sottogruppo di ordine 9. Allora $(T \cup F_i^0) \cap (T \cup F_j^0)=T \cup 0$ (perché $F_i^0 \neq / F_j^0$), e dunque $T \cup 0$ sarebbe un gruppo rispetto alla somma. Ma $T \cup 0$ contiene sette elementi (perché T è banale e non fine), e non può essere certamente un sottogruppo di $T \cup F_i^0$, che ha nove elementi.

Ricordato ora il corollario 15 di [5], secondo cui due funzioni di Steiner definite sullo stesso gruppo G individuano sistemi di Steiner disgiunti se e solo se il loro prodotto è privo di coincidenze non nulle o (che è lo stesso) se e solo se non operano allo stesso modo su nessun elemento non nullo di G, possiamo concludere che i sistemi associati ad α_i, α_j sono disgiunti.

(4) Un tale φ_i esiste certamente perché G è abeliano elementare.

(5) Se $T=F_i$ infatti α_i, α_j opererebbero allo stesso modo sull'unica traiettoria fine F_i di α_i e sarebbe $F_i=F_j$, contro una delle posizioni iniziali.

Facendo ora variare φ_i su un insieme di automorfismi tale che per ognuno dei $(3^n-1)/2$ sottogruppi F_i^0 di ordine 3 esista uno ed un solo φ_i tale che $\varphi_i(F^0)=F_i^0$ si ottiene una classe di $(3^n-1)/2$ sistemi di Steiner due a due disgiunti ammettenti il cayleiano destro di G come gruppo transitivo e regolare di automorfismi, il che dimostra l'enunciato.

3. Completiamo il lavoro con qualche immediato complemento.

COROLLARIO 4. *L'enunciato del Teorema 3 continua a valere anche se si chiede anche che i sistemi in questione siano due a due isomorfi.*

Basta notare che i sistemi individuati dalle funzioni α_i della dimostrazione precedente sono tutti isomorfi a quello individuato da α, perché se φ è un automorfismo di G i sistemi associati ad α, α^φ sono isomorfi. (osservazione 1 di [5]).

COROLLARIO 5. *Per ogni n maggiore di 1 esistono disegni regolari* (6) *con* $k=\lambda=3$ *che ammettono un gruppo regolare e transitivo di automorfismi abeliano elementare di ordine* 3.

Tali disegni si possono infatti ottenere semplicemente prendendo l'unione di tre dei sistemi di Steiner disgiunti construiti a norma del precedente Teorema 3.

(6) Cioè BIB-disegni in cui i blocchi sono identificabili con sottoinsiemi: per risultati analoghi cfr. il corollario 2 di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DOYEN, *Constructions of disjoint Steiner triple Systems,* Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 409-416.

[2] J. DOYEN - A. ROSA, *A bibliografy and survey of Steiner systems,* Boll. U. M. I., (4) 7 (1973), 392-419.

[3] G. FERRERO, *Gruppi di Steiner e sistemi fini,* Le matematiche (Catania), 27 (1972) 167-190.

[4] G. FERRERO, *Sui gruppi che ammettono funzioni di Steiner,* Rend. Ist. di Mat. Univ. Trieste, 4 (1972), 156-170.

[5] G. FERRERO, *Deformazioni, raffinamenti e composizioni di funzioni di Steiner,* I Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972), 125-142.

[6] L. TEIRLINCK, *On the maximun numer of disjoint Steiner triple systems,* Disc. Mat. 6 (1973).