UN PROBLEMA ESTREMALE RELATIVO AI GRAFI CON UN CICLO HAMILTONIANO (*)

di Aldo G. Ventre (a Napoli) (**)

Sommario. - *Si determina il massimo numero di spigoli di un grafo semplice d'ordine assegnato, privo di triangoli, con un ciclo hamiltoniano.*

Summary. - *We determine the maximum number of edges of a triangle-less hamiltonian graph of a given order.*

Introduciamo alcune notazioni e definizioni.

$G(n; k)$ denota un grafo non orientato finito semplice con n vertici e k spigoli.

Tratteremo solo di questi grafi. $V(G)$, $E(G)$ denotano rispettivamente l'insieme dei vertici e l'insieme degli spigoli di G. $\{x, y\}$ denota lo spigolo di G avente estremi x, y. L'intero $|V(G)| = n$ dicesi *ordine* di G (1).

A P. Turán [6] si deve il seguente risultato del quale ci serviremo (2):

indicato con $\{\Gamma_n\}$ *l'insieme dei grafi semplici di ordine n, privi di triangoli, il numero degli spigoli di un grafo qualunque di* $\{\Gamma_n\}$ *è* $\leq [n^2/4]$ (3); *esiste un grafo di* $\{\Gamma_n\}$*, e uno soltanto, avente* $[n^2/4]$ *spigoli: il grafo bipartito completo* $K([n/2], \{n/2\})$.

(*) Pervenuto in Redazione il 12 giugno 1974.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica della Facoltà di Architettura — Università — 80134 Napoli.

(1) Per il significato dei termini che adoperiamo cfr. Berge [1].

(2) Cfr. anche: Harary [4], p. 12.

(3) Il simbolo $[r]$, con r reale, denota il più grande intero non maggiore di r; $\{r\}$ il più piccolo intero non minore di r.

Vogliamo far vedere che per i grafi dotati di un ciclo hamiltoniano si può rendere più stretta la limitazione del Turán solo se n è dispari.

Ci proponiamo di dimostrare, infatti, il seguente

TEOREMA: *Denotato con* $\{G_n\}$ *l'insieme dei grafi finiti e semplici di ordine* n, *privi di triangoli, dotati di un ciclo hamiltoniano, vale, per* $n \geq 4$, *la relazione*

$$\max_{G_n \in \{G_n\}} |E(G_n)| = \left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n. \tag{1}$$

Per la dimostrazione distinguiamo i due casi: n pari, n dispari.

1) n pari.

La dimostrazione è ricondotta al risultato del Turán, osservando che il grafo bipartito completo $K([n/2], \{n/2\}) = K(n/2, n/2)$ è dotato di un ciclo hamiltoniano (Berge [1], p. 215) e che, per $n=2k$, si ha

$$\left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n = \left[\frac{n^2}{4}\right];$$

difatti è

$$\left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n = \left[\frac{2k-4}{2}\right]\left[\frac{2k}{2}\right] + 2k = k^2 = \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

2) n dispari.

Premettiamo qualche definizione e qualche proprietà.

Su ogni grafo G_n, $n>5$, *di* $\{G_n\}$, distinto dal ciclo di lunghezza n, $G(n; n)$, fissiamo un ciclo hamiltoniano $h_n(G_n)$. Denotiamo con $\gamma_k(h_n)$ ogni ciclo elementare di G_n di lunghezza k tale che esattamente $k-1$ spigoli di esso siano su h_n; sia $\{G_n^k\}$ il sottoinsieme di $\{G_n\}$ tale che ogni suo grafo abbia almeno un ciclo $\gamma_k(h_n)$ e non abbia un ciclo $\gamma_{k'}(h_n)$, con $k'<k$.

Si osservi che il grado $d(x_i)$ di un qualunque vertice x_i di G_n^k soddisfa la limitazione

$$d(x_i) \leq \frac{n-(2k-3)}{2} + 2. \tag{2}$$

Infatti, qualunque sia il grafo G_n^k di $\{G_n^k\}$, denotato con h_n un suo ciclo hamiltoniano, gli estremi delle diagonali di h_n incidenti un vertice x_i, distinti da x_i, non sono da ricercarsi tra i $2(k-2)+1=2k-3$

vertici di G_n^k aventi distanza su h_n da $x_i \leq k-2$ (per la definizione di G_n^k), ma, tra al più $\frac{n-(2k-3)}{2}$ vertici dei restanti $n-(2k-3)$ di G_n^k (4).

Ciò premesso, si verifica agevolmente che la (1) è soddisfatta per $n=5$. Procedendo per induzione su n, per valori dispari, supposto che sia

$$\max_{G_{n-2} \in \{G_{n-2}\}} |E(G_{n-2})| = \left[\frac{(n-2)-4}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] + n - 2, \tag{3}$$

per un fissato $n \geq 7$, proviamo che vale la (1).

Sia h_n un ciclo hamiltoniano di un grafo $G_n^4 \in \{G_n^4\}$, $\gamma_4(h_n)$ un ciclo di G_n^4 del tipo sopra definito, e sia c lo spigolo di $\gamma_4(h_n)$ che non è su h_n. Contrassegnamo i vertici in modo che sia

$$h_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1),$$

$$\gamma_4(h_n) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1), \quad c = \{x_4, x_1\}.$$

Sia G_{n-2} il sottografo di G_n^4 generato da $V(G_n^4) - (\{x_2\} \cup \{x_3\})$. Sarà

$$V(G_{n-2}) = V(G_n^4) - (\{x_2\} \cup \{x_3\}),$$

$$E(G_{n-2}) = E(G_n^4) - (E(x_2) \cup E(x_3)); \tag{4}$$

$E(x_i)$ denota l'insieme degli spigoli di G_n^4 aventi un estremo in x_i. Si noti che $\{x_1, x_4\} \notin E(x_2) \cup E(x_3)$ e quindi $\{x_1, x_4\} \in E(G_{n-2})$.

Evidentemente G_{n-2} ha ordine dispari, non ha triangoli, ha un ciclo hamiltoniano

$$h_{n-2} = (x_1, x_4, \dots, x_n, x_1).$$

Per l'ipotesi (3), si ha:

$$|E(G_{n-2})| \leq \left[\frac{(n-2)-4}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] + n - 2. \tag{5}$$

(4) Si ricordi che G_n^k è privo di triangoli.

Si osservi, in primo luogo, che gli interi $|E(x_2)|$, $|E(x_3)|$ sono i gradi $d(x_2)$, $d(x_3)$ di x_2, x_3 in G_n^4, rispettivamente, e che, per la (2),

$$d(x_i) \leq \frac{n-5}{5} + 2 = \left[\frac{n}{2}\right],$$

per $i=2,3$. Inoltre, dall'essere

$$E(x_2) \cap E(x_3) = \{x_2, x_3\},$$

consegue che il numero degli spigoli di G_n^4 aventi un estremo in x_2, o in x_3, soddisfa la limitazione

$$\text{(6)} \qquad |E(x_2) \cup E(x_3)| = d(x_2) + d(x_3) - 1 \leq 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1 = n - 2.$$

Da (4), (5), (6), qualunque sia $G_n^4 \in \{G_n^4\}$, segue:

$$|E(G_n^4)| = |E(G_{n-2})| + |E(x_2) \cup E(x_3)| \leq$$

$$\leq \left[\frac{(n-2)-4}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] + n - 2 + n - 2,$$

e l'ultima quantità è ovviamente uguale all'intero

$$\left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n.$$

Si trae allora la relazione

$$\max_{G_n^4 \in \{G_n^4\}} |E(G_n^4)| \leq \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right] + n.$$

Mostriamo, di più, che si ha:

$$\text{(7)} \qquad \max_{G_n^4 \in \{G_n^4\}} |E(G_n^4)| = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right] + n.$$

A tale scopo si consideri il grafo bipartito completo $K\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$, sia $h_{n-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1)$ un suo ciclo hamiltoniano, esistente a norma del risultato sopra citato; sia G_n^0 il grafo d'ordine n, così definito:

$$V(G_n^0) = V(K) \cup \{x_n\},$$

$$E(G_n^0) = (E(K) - \{x_{n-1}, x_1\}) \cup \{x_{n-1}, x_n\} \cup \{x_n, x_1\},$$

cioè G_n^0 è il grafo che si ottiene da K introducendo un nuovo vertice x_n e sostituendo lo spigolo $\{x_{n-1}, x_1\}$ di K con la catena (x_{n-1}, x_n, x_1).

Evidentemente $h_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ è un ciclo hamiltoniano di G_n^0, G_n^0 è privo di triangoli e $G_n^0 \in \{G_n^4\}$.

Il numero degli spigoli di G_n^0 è

$$|E(G_n^0)| = |E(K)| + 1 = \left(\frac{(n-1)-4}{2}\,\frac{n-1}{2} + n - 1\right) + 1 =$$

$$= \left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n.$$

Da qui segue la (7).

Si osservi che ogni grafo di $\{G_n\}$ appartiene a qualche sottoinsieme $\{G_n^k\}$, escluso il grafo $G(n; n)$ che, per $n > 5$, non ha, ovviamente, il massimo numero di spigoli.

Mostriamo ora che un grafo di $\{G_n\}$ che ha il massimo numero di spigoli è nel sottoinsieme $\{G_n^4\}$ di $\{G_n\}$; cioè che, per n dispari > 5, si ha

$$(8) \qquad \max_{G_n^4 \in \{G_n^4\}} |E(G_n^4)| = \max_{G_n \in \{G_n\}} |E(G_n)|$$

A tale scopo, si osservi, in primo luogo, che, dalla (2), si ha

$$(9) \qquad 2 \max_{G_n^k \in \{G_n^k\}} |E(G_n^k)| \leq n\left(\frac{n-(2k-3)}{2} + 2\right).$$

Inoltre vale evidentemente, per ogni $k \geq 5$, la diseguaglianza

$$(10) \qquad \frac{n}{2}\left(\frac{n-(2k-3)}{2} + 2\right) < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right] + n.$$

Da (9), (10) si trae, per ogni $k \geq 5$, la relazione

$$\max_{G_n^k \in \{G_n^k\}} |E(G_n^k)| < \max_{G_n^4 \in \{G_n^4\}} |E(G_n^4)|,$$

donde la (8); di qui, per ogni n dispari ≥ 5, la (1), invocando la (7).

Il teorema è dunque dimostrato.

Ne consegue immediatamente il

COROLLARIO: *Qualunque sia l'intero* $k \geq \left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + n + 1$, *il minimo delle lunghezze dei cicli elementari di un grafo semplice* $G(n; k)$ *con un ciclo hamiltoniano è* 3.

Osserviamo che lo scarto tra il massimo fornito dal risultato del Turán [6] e il massimo fornito dalla (1) è, per $n = 2k+1$,

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] - \left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] - n = \left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right] - \left[\frac{2k-3}{2}\right]\left[\frac{2k+1}{2}\right] - 2k - 1 =$$

$$= k - 1 = \frac{n-3}{2}.$$

Osserviamo ancora che un grafo di $\{G_n\}$ che ha il massimo numero di spigoli ha, per la (1), un numero di corde di ogni fissato ciclo hamiltoniano uguale a

$$\left[\frac{n-4}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right].$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BERGE, C.: *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris, 1970.

[2] BIGGS, N.: *Finite groups of automorphisms,* Cambridge Un. Press, 1971.

[3] HARARY, F.: *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[4] HARARY, F. (ed.): *New directions in the theory of graphs,* A. P., New York, 1973.

[5] ORE, O.: *Theory of graphs,* Amer. Math. Soc., College Publ., Providence, 1962.

[6] TURÁN, P.: *An extremal problem in graph theory,* Mat. Fiz. Lapok 48, 1941; vedi anche: On the theory of graphs, Coll. Math. 3, 1954.

[7] WELSH, D. (ed.): *Combinatorial mathematics and its applications,* A. P. New York, 1971.