SU ALCUNE DISUGUAGLIANZE PUNTUALI PER I MODULI DELLE DERIVATE DI UN POLINOMIO ALGEBRICO DI DUE VARIABILI (*)

di GENNARO GIANNUZZI (a Livorno) (**)

SOMMARIO. - *In questa nota sono stabilite disuguaglianze per i moduli delle derivate di un polinomio algebrico, a coefficienti reali, di due variabili reali, che, per particolari classi di polinomi, risultano migliori di quelle del tipo di Markoff e Bernstein.*

SUMMARY. - *Inequalities for the absolute value of the derivatives of polynomials in two variables, with real coefficients, are obtained.*

These inequalities, for particular classes of polynomials result better than Markoff and Bernstein type.

In [1] (1) è stata stabilita una maggiorazione del modulo della p-esima derivata di un polinomio algebrico

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

a coefficienti reali, di grado n, valida per ogni x dell'intervallo $[0,1]$, maggiorazione che, per certe classi di polinomi, risulta più forte (2) della ben nota disuguaglianza di Markoff [2].

Con ovvie modifiche alla relativa dimostrazione si consegue la seguente disuguaglianza puntuale

$$(*) \qquad | P_n^{(p)}(x) | \leq | P_n(x) | + M_c \sum_{i=1}^{p} | R_{n+1-i}(x) |, \qquad \forall x$$

(*) Pervenuto in Redazione il 13 maggio 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: — Accademia Navale — 57100 Livorno.

(1) I numeri in parentesi [ ] si riferiscono alla bibliografia posta in fine.

(2) Cfr. in [1] l'osservazione a pag. 403.

nella quale:

M_c rappresenta il massimo modulo dei numeri λ_{k+i} definiti attraverso il sistema

$$\sum_{k=0}^{n-1} c(k)\, \lambda_{k+1} = i\,!\; a_i \qquad (i=0, 1, \dots, n),$$

essendo $c(k)$ una qualunque funzione dell'intero non negativo k soddisfacente la condizione $c(o) \neq 0$;

$R_{n+1-i}(x)$ rappresenta il polinomio

$$\sum_{k=0}^{n+1-i} c(k) \frac{x^{n+1-i-k}}{(n+1-i-k)!}.$$

Come facilmente può constatarsi, la (*) può, in certi casi, risultare, a sua volta, più forte della ben nota disuguaglianza di Bernstein [3] (3).

Scopo di questa breve nota è quello di stabilire disuguaglianze puntuali, dello stesso tipo della (*), per le derivate di polinomi algebrici, a coefficienti reali, di due variabili reali (4).

1. I polinomi $R_n^{(r)}(x, y)$.

Siano k, n ed r tre interi non negativi e sia $c(k)$ una funzione qualsiasi del primo di essi. Con il simbolo $R_n{}^{(r)}(x, y)$ indicheremo il polinomio algebrico, di grado n nel complesso delle variabili, così definito:

$$R_n^{(r)}(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{r} c(k) \frac{x^{n-k}\, y^k}{(n-k)!\, K!}, & \text{se} \quad r \leq n \\ R_n^{(n)}(x, y), & \text{se} \quad r > n \end{cases}$$

(3) Per quanto riguarda l'estensione al caso di più variabili delle classiche disuguaglianze di Markoff e Bernstein, cfr. [4].

(4) Solo per ragioni di semplicità limitiamo le nostre considerazioni al caso di polinomi in due indeterminate; quanto esporremo può ripetersi, con varianti esclusivamente formali, nel caso di polinomi di quante si vogliono variabili.

OSSERVAZIONE I. Qualunque siano gli interi p e $q \left(0 < \frac{p}{q} \leq n\right)$, risulta:

$$\frac{\partial^p R_n^{(r)}(x, y)}{\partial x^p} = R_{n-p}^{(r)}(x, y),$$

$$\frac{\partial^q R_n^{(r)}(y, x)}{\partial y^q} = R_{n-q}^{(r)}(y, x).$$

OSSERVAZIONE II. Se per ogni k, è $c(k) \neq 0$, allora un qualsivoglia polinomio algebrico in x, y,

$$(1) \qquad P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} a_i^{(r)} x^{i-r} y^r \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} a_i^{(i-r)} x^r y^{i-r} \right),$$

si può rappresentare, in uno ed in un sol modo, o nella forma

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} R_i^{(r)}(x, y) \right)$$

ovvero nella

$$(2') \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)} R_i^{(r)}(y, x) \right).$$

La determinazione delle $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ costanti ${}^{(1)}\lambda_i^{(r)}$, ${}^{(1)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}$ è infatti, nei due casi, ricondotta rispettivamente alla risoluzione dei sistemi

$$\left.\begin{aligned} c_k \sum_{r=k}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} &= (i-k)!\; k!\; a_i^{(k)} \\ c_k \sum_{r=k}^{i} {}^{(1)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)} &= (i-k)!\; k!\; a_i^{(i-k)} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, i \end{pmatrix}$$

i cui determinanti sono dati entrambi dal prodotto

$$[c(0)]^{n+1} \cdot [c(1)]^n \cdot \ldots \cdot [c(n-1)]^2 \cdot c(n).$$

2. Due teoremi relativi a polinomi algebrici in due variabili.

Sia $c(k) \neq 0$ per ogni k; per le derivate del polinomio (1) valgono le disuguaglianze espresse dai seguenti teoremi:

TEOREMA I. Risulta

$$(3)\quad \left|\frac{\partial^{p+q}P_n(x,y)}{\partial x^p\,\partial y^q}\right|\leq|P_n(x,y)|+\sum_{j=1}^{p}M_c^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}|R_{i-1}^{(r)}(x,y)-R_i^{(r)}(x,y)|\right)\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\widetilde{M}_{c,p}^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-p-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}|R_{i-1}^{(r)}(y,x)-R_i^{(r)}(x,y)|\right)\right\},$$

essendo $M_c^{(j)}$ ed $\widetilde{M}_{c,p}^{(j)}$, rispettivamente, il massimo valore assoluto dei numeri ${}^{(j)}\lambda_i^{(r)}$, ${}^{(j)}_{\ p}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}$ definiti implicitamente dai sistemi:

$$c(k)\sum_{r=k}^{i}{}^{(j)}\lambda_i^{(r)}=(i+j-1-k)!\;k!\;a_{i+j-1}^{(k)}\begin{pmatrix}i=0,1,\dots,n-j+1\\k=0,1,\dots,i\end{pmatrix}$$

$$c(k)\sum_{r=k}^{i}{}^{(j)}_{\ p}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}=(i+j-1-k)!\;\frac{(k!)^2}{(k-p)!}\,a_{i+j-1}^{(i+j-1-k)}\begin{pmatrix}i=p,p+1,\dots,n-j+1\\k=p,p+1,\dots,i\end{pmatrix}.$$

TEOREMA II. Risulta

$$(3')\quad \left|\frac{\partial^{p+q}P_n(x,y)}{\partial x^p\,\partial y^q}\right|\leq|P_n(x,y)|+\sum_{j=1}^{q}\widetilde{M}_c^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}|R_{i-1}^{(r)}(y,x)-R_i^{(r)}(y,x)|\right)\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{p}M_{c,q}^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-q-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}|R_{i-1}^{(r)}(x,y)-R_i^{(r)}(x,y)|\right)\right\},$$

essendo $\widetilde{M}_c^{(j)}$ ed $M_{c,q}^{(j)}$, rispettivamente, il massimo valore assoluto dei numeri ${}^{(j)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}$, ${}^{(j)}_{\ q}\lambda_i^{(r)}$ definiti implicitamente dai sistemi

$$(4')\quad \begin{aligned}&c(k)\sum_{r=k}^{i}{}^{(j)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}=(i+j-1-k)!\;k!\;a_{i+j-1}^{(i+j-1-k)}\begin{pmatrix}i=0,1,\dots,n-j+1\\k=0,1,\dots,i\end{pmatrix}\\&c(k)\sum_{r=k}^{i}{}^{(j)}_{\ q}\lambda_i^{(r)}=(i+j-1-k)!\;\frac{(k!)^2}{(k-q)!}\,a_{i+j-1}^{(k)}\begin{pmatrix}i=q,q+1,\dots,n-j+1\\k=q,q+1,\dots,i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ci limiteremo a verificare la (3); la (3′) si dimostra in modo del tutto analogo.

Cominciamo col far vedere che la (3) sussiste nei casi particolari $q=0$ oppure $p=0$, cioè che risulta:

$$(5)\quad \left|\frac{\partial^{p}P_n(x,y)}{\partial x^p}\right|\leq|P_n(x,y)|+\sum_{j=1}^{p}M_c^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}|R_{i-1}^{(r)}(x,y)-R_i^{(r)}(x,y)|\right)\right\}$$

$$(5') \qquad \left|\frac{\partial^q P_n(x,y)}{\partial y^q}\right| \leq |P_n(x,y)| + \sum_{j=1}^{q} \widetilde{M}_c^{(j)} \left\{ \sum_{i=0}^{n-j+1} \left(\sum_{r=0}^{i} R_{i-1}^{(r)}(y,x) - R_i^{(r)}(y,x)| \right) \right\}.$$

La (5) è vera per $p=1$. Infatti, scritto $P_n(x, y)$ nella forma (2) e derivando ambo i membri rispetto ad x, si ha:

$$\frac{\partial P_n(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} R_{i-1}^{(r)}(x,y) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} R_i^{(r)}(x,y) \right) + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} R_{i-1}^{(r)}(x,y) \right) - \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} R_i^{(r)}(x,y) \right) =$$

$$= P_n(x,y) + \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{i} {}^{(1)}\lambda_i^{(r)} \left(R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y) \right) \right\}$$

e quindi:

$$\left|\frac{\partial P_n(x,y)}{\partial x}\right| \leq |P_n(x,y)| + M_c^{(1)} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r=0}^{i} | R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y) | \right) \right\}.$$

Supponiamo ora che la (5) sia vera per l'intero $p-1$ e dimostriamo che essa è vera per p. Per questo si osservi che, se scriviamo il polinomio $\dfrac{\partial^{p-1} P_n(x,y)}{\partial x^{p-1}}$ sotto la forma (2)

$$\frac{\partial^{p-1} P_n(x,y)}{\partial x^{p-1}} = \sum_{i=0}^{n-p+1} \left(\sum_{r=0}^{i} {}^{(p)}\lambda_i^{(r)} R_i^{(r)}(x,y) \right).$$

i coefficienti di tale sostituzione sono forniti dal sistema che si ottiene dal primo dei sistemi (4) facendo in esso $j=p$.

Allora, in ordine a quanto dimostrato per la derivata parziale prima rispetto ad x, risulta:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{p-1} P_n(x,y)}{\partial x^{p-1}} \right) \right| = \left| \frac{\partial^p P_n(x,y)}{\partial x^p} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\partial^{p-1} P_n(x,y)}{\partial x^{p-1}} \right| + M_c^{(p)} \left\{ \sum_{i=0}^{n-p+1} \left(\sum_{r=0}^{i} | R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y) | \right) \right\}$$

da cui, avendo supposto:

$$\left| \frac{\partial^{p-1} P_n(x,y)}{\partial x^{p-1}} \right| \leq |P_n(x,y)| + \sum_{j=1}^{p-1} M_c^{(j)} \left\{ \sum_{i=0}^{n-j+1} \left(\sum_{r=0}^{i} | R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y)| \right) \right\}.$$

segue quanto volevasi.

Ragionando nello stesso modo (purché si operi con la (2′) anziché con la (2)) si perviene poi alla disuguaglianza (5′).

Passiamo ora al caso generale. Poiché

$$\frac{\partial^p P_n(x,y)}{\partial x^p}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{i} a_i^{(i-r)}\, x^r\, y^{i-r}\right)\right\}=\sum_{i=0}^{n-p}\left(\sum_{r=0}^{i}\frac{(r+p)!}{r!}\, a_{i+p}^{(i-r)}\, x^r\, y^{i-r}\right).$$

per la (5′), risulta

$$\left|\frac{\partial^{p+q} P_n(x,y)}{\partial x^p\,\partial y^q}\right|=\left|\frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(\frac{\partial^p P_n(x,y)}{\partial x^p}\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\partial^p P_n(x,y)}{\partial x^p}\right|+\sum_{j=1}^{q}\widetilde{M}_{c,p}^{(j)}\left\{\sum_{i=0}^{n-p-j+1}\left(\sum_{r=0}^{i}\left|R_{i-1}^{(r)}(y,x)-R_i^{(r)}(y,x)\right|\right)\right\}$$

onde, tenendo conto della (5), la tesi.

3. Corollari dei precedenti teoremi.

Se particolarizziamo la funzione $c(k)$ ponendo $c(k)=1$, per ogni k, dalla (3) e dalla (3′), per ogni punto del quadrato

$$Q=\left\{(x,y)\mid 0\leq \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\leq 1\right\},$$

seguono ordinatamente le disuguaglianze espresse dai seguenti corollari:

Corollario I. Risulta

$$\left|\frac{\partial^{p+q} P_n(x,y)}{\partial x^p\,\partial y^q}\right|\leq |P_n(x,y)|+(1+e^{x+y})\cdot\left\{\sum_{j=1}^{p} M^{(j)}+\sum_{j=1}^{q}\widetilde{M}_p^{(j)}\right\},\tag{6}$$

essendo $M^{(j)}$ ed $\widetilde{M}_p{}^{(j)}$, rispettivamente, il massimo valore assoluto delle differenze

(7)

$$(i+j-1-k)!\,k!\,a_{i+j-1}^{(k)}-(i+j-1-k-1)!\,(k+1)!\,a_{i+j-1}^{(k+1)}$$

$$\begin{pmatrix}i=0,1,\dots,n-j+1\\ k=0,1,\dots,i\end{pmatrix}$$

$$(i+j-1-k)!\,(k+p)!\,a_{i+j-1}^{(i+j-1-k)}-(i+j-1-k-1)!\,\frac{[(k+1)!]^2}{(k+1-p)!}\,a_{i+j-1}^{(i+j-1-k-1)}$$

$$\begin{pmatrix}i=p,p+1,\dots,n-j+1\\ k=p,p+1,\dots,i\end{pmatrix}$$ [5]

[5] Il secondo termine di tali differenze sussiste se e solo se $i+j-1-k-1\geq 0$; così per i secondi termini delle differenze (7′).

COROLLARIO II. Risulta

$$(6') \qquad \left| \frac{\partial^{p+q} P_n(x,y)}{\partial x^p \, \partial y^q} \right| \leq |P_n(x,y)| + (1+e^{x+y}) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{q} \widetilde{M}^{(j)} + \sum_{j=1}^{p} M_q^{(j)} \right\},$$

essendo $\widetilde{M}^{(j)}$ ed $M_q^{(j)}$, rispettivamente, il massimo valore assoluto delle differenze

$$(7') \qquad \begin{aligned} &(i+j-1-k)!\,k!\,a_{i+j-1}^{(i+j-1-k)} - (i+j-1-k-1)!\,(k+1)!\,a_{i+j-1}^{(i+j-1-k-1)} \\ &\qquad\qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, n-j+1 \\ k = 0, 1, \dots, i \end{pmatrix} \\ &(i+j-1-k)!\,(k+q)!\,a_{i+j-1}^{(k)} - (i+j-1-k-1)!\,\frac{[(k+1)!]^2}{(k+1)-q)!}\,a_{i+j-1}^{(k+1)} \\ &\qquad\qquad \begin{pmatrix} i = q, q+1, \dots, n-j+1 \\ k = q, q+1, \dots, i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per la verifica della (6) e della (6′) basta osservare che, se per ogni k è $c(k)=1$, risulta su tutto Q

1) $R_n^{(r)}(x,y) \geq 0$, qualunque siano gli interi n ed r,

2) $R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y) \geq 0$, per $i>0$,

3) $$\sum_{i=0}^{n-j+1} \left(\sum_{r=0}^{i} |R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y)| \right) = R_0^{(0)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\sum_{r=0}^{i} [R_{i-1}^{(r)}(x,y) - R_i^{(r)}(x,y)] \right) =$$

$$= 1 + R_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{n-j} R_i^{(i+1)}(x,y) - \sum_{i=1}^{n-j+1} R_{n-j+1}^{(i)}(x,y) \leq 1 + R_0^{(0)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-j} R_i^{(i+1)}(x,y) = 1 + R_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{n-j} R_i^{(i)}(x,y) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-j} R_i^{(i)}(x,y) = 1 + \sum_{i=0}^{n-j} \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{i-k}\, y^k}{(i-k)!\, k!} \leq 1 + e^{x+y},$$

che altrettanto può dirsi per i polinomi $R_n^{(r)}(y,x)$ e che i sistemi (4) e (4′) forniscono per i parametri ${}^{(j)}\lambda_i^{(r)}$, ${}^{(j)}{}_p\widetilde{\lambda}_i^{(r)}$, ${}^{(j)}\widetilde{\lambda}_i^{(r)}$, ${}^{(j)}{}_q\lambda_i^{(r)}$ i valori indicati in (7) e (7′) rispettivamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. GUERRA, *Qualche osservazione sulla nota disuguaglianza di W. A. Markoff*, Boll. U. M. I. (3) vol. 18 (1963), pp. 398-404.

[2] W. A. MARKOFF, *Sur les fonctions qui s'ecartent le moins de zero* (1892), St. Petersbourg.

[3] S. N. BERNSTEIN, *On estimates of the derivatives of polynomials*, Sochineniga, vol. I (1930), pp. 497-499.

[4] A. ISMAILOV, *Estimation of derivatives of polynomials in several variables*, Akad. Nauk Azerbaidzan SSR DOKL. 12 (1956), pp. 239-243.