SULLE COLLINEAZIONI DEI PIANI DI RIFRAZIONE GENERALIZZATI (*)

di LUIGI PROFERA (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Si studia il gruppo delle collineazioni dei piani di rifrazione generalizzati che non sono piani di* MOULTON-PICKERT (*nè piani ordinati desarguesiani); tra l'altro, si prova che tali piani ordinati appartengono alla classe* II 1 *di* LENZ-BARLOTTI.

SUMMARY. - *The collineation group of generalized refracted planes which are neither* MOULTON-PICKERT *nor Desarguesian is studied; among other results, such ordered planes are proved to be of* LENZ-BARLOTTI *class* II 1.

Introduzione.

In [13] (1) abbiamo introdotto i piani di rifrazione generalizzati come piani ordinati sopra sistemi cartesiani ordinati ciascuno dei quali si desume da un corpo ordinato e da una sua funzione di rifrazione f nel modo seguente: il gruppo additivo ordinato del sistema cartesiano coincide con quello del corpo ordinato, mentre la moltiplicazione $\bigcirc$ del sistema cartesiano si definisce in termini della moltiplicazione del corpo ordinato ponendo $x \bigcirc y = f(x)\, y$ se x e y sono entrambi negativi, $x \bigcirc y = xy$ altrimenti. Sfruttando la nozione di semitransitività dovuta a J. ANDRÉ, [1], e quella di omologia relativa a un insieme di rette dovuta a F. BARTOLOZZI [6], abbiamo caratterizzato i piani di rifrazione generalizzati come M_1-piani.

(*) Pervenuto in Redazione il 26 aprile 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica «Renato Caccioppoli» — Via Mezzocannone 8 — 80134 Napoli.

(1) I numeri in [ ] rimandano alla Bibliografia in fine.

I piani di MOULTON - PICKERT, ossia i piani di rifrazione generalizzati relativi a funzioni di rifrazione f del tipo $f(x)=xk$ con k positivo e diverso da 1, sono stati caratterizzati da J. ANDRÉ in [1] e [2] come M-piani (propri) e recentemente F. BARTOLOZZI, [7], ne ha studiato le collineazioni per determinare le loro immagini M-epimorfe.

Il presente lavoro è dedicato allo studio delle collineazioni degli M_1-piani che non sono M-piani (nè piani ordinati desarguesiani); i risultati più significativi che stabiliamo sono i seguenti:

1) Un M_1-piano non desarguesiano appartiene alla classe III di H. LENZ, [8], se e solo se è M-piano (2).

2) Un M_1-piano π_1 che non è M-piano (nè piano ordinato desarguesiano) appartiene alla classe II 1 di LENZ-BARLOTTI (H. LENZ, [8], A. BARLOTTI, [5]). Se la retta v e il suo punto V individuano la classe di π_1, le dilatazioni non identiche del piano affine $\pi_{1,v}$, ottenuto assumendo v come retta impropria, se sono traslazioni, hanno tutte direzione V, altrimenti hanno centro appartenente a una opportuna retta di direzione V; anzi, se P è un punto (proprio) di tale retta, il gruppo delle dilatazioni che fissano P è semitransitivo (nel senso di J. ANDRÉ, [11]) e non esistono dilatazioni che fissano P e associano punti allineati con P e separati da P nell'ordinamento di $\pi_{1,v}$.

3) Se π_1 è M_1-piano ma non è M-piano (nè piano ordinato desarguesiano), allora è piano di rifrazione generalizzato, [13], ed è, quindi, coordinatizzato da un sistema cartesiano ordinato $C(+,\circ,<)$ desunto da un corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e da una sua funzione di rifrazione nel modo già indicato all'inizio dell'introduzione; se π è il piano ordinato desarguesiano sul corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$, l'insieme dei punti propri di π_1 e quello dei punti propri di π si identificano col prodotto cartesiano $C\times C$. Ebbene, ogni collineazione ω di π_1 è affine ed è di uno dei seguenti tipi:

I) ω è collineazione affine di π,

II) esiste una coppia (ω_1, ω_2) di collineazioni affini di π tale che

$$\omega((x,y))=\omega_1((x,y)) \text{ se } x\leq 0; \quad \omega((x,y))=\omega_2((x,y)) \text{ se } x>0.$$

Inoltre sono caratterizzate le collineazioni affini ω e le coppie (ω_1, ω_2) di collineazioni affini del piano ordinato desarguesiano π atte a fornire,

(2) Il « se » è stato provato da J. C. D. S. YAQUB in [15]; per provare il « solo se » sfruttiamo una caratterizzazione degli M-piani dovuta a J. ANDRÉ, [3], e a J. C. D. S. YAQUB, [16].

secondo quanto già precisato, tutte e sole le collineazioni dello M_1-piano π_1. Se ne deduce, tra l'altro, che ogni collineazione dello M_1-piano π_1 conserva il suo ordinamento, ossia la relazione di « giacenza tra » che compete ad ogni retta di π_1 in quanto piano affine ordinato ([3]).

1. Richiami e notazioni.

Sia $\pi=\pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ un piano proiettivo che ha $\mathfrak{P}$ come insieme dei punti, $\mathfrak{R}$ come insieme delle rette ([4]). Se $A, B\in \mathfrak{P}$ e $A\neq B$, indichiamo con $A+B$ la retta contenente A e B; se $a, b\in \mathfrak{R}$ e $a\neq b$, indichiamo con $a\cap b$ il punto comune alle rette a e b. Una *collineazione* del piano proiettivo π è un'applicazione bigettiva σ: $\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ tale che $\sigma(C)\in \sigma(A)+\sigma(B)$ se $A, B, C\in\mathfrak{P}$, $A\neq B$, $C\in A+B$. Se $\rho\subseteq \mathfrak{R}$ e $(P,l)\in\mathfrak{P}\times\mathfrak{R}$, una *$(P, l)$-$\rho$-omologia* o, se si vuole, una *ρ-omologia di centro P e asse l* ([5]), è un'applicazione bigettiva σ: $\mathfrak{P}\to\mathfrak{P}$ tale che

1) $\sigma(X)=X$ se $X=P$ oppure $X\in l$,

2) $\sigma(X)\in X+P$ se $X\in\mathfrak{P}$, $X\neq P$,

3) $\sigma(C)\in\sigma(A)+\sigma(B)$ se $A, B, C\in\mathfrak{P}$, $A\neq B$, $C\in A+B, A+B\in\rho$.

Se $\rho'\subseteq\rho\subseteq\mathfrak{R}$, ogni (P, l)-ρ-omologia è anche (P, l)-ρ'-omologia; pertanto le (P, l)-omologie (che sono esattamente le (P, l)-$\mathfrak{R}$-omologie) sono (P, l)-ρ-omologie per ogni insieme ρ di rette del piano proiettivo. Il piano proiettivo π è *(P, l)-ρ-transitivo* se, per ogni retta m contenente P e diversa da l, esiste almeno una (P, l)-ρ-omologia σ tale che $\sigma(A)=B$, essendo $A, B\in m$, $A\neq P\neq B$, $A \neq l\cap m\neq B$; se, inoltre, $\rho=\mathfrak{R}$, il piano proiettivo π è *(P, l)-transitivo*.

Un riferimento del piano proiettivo $\pi=\pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ è una quaterna di suoi punti a tre a tre non appartenenti alla medesima retta. Siano (O, E, U, V) un riferimento di π, C un insieme equipotente all'insieme C' dei punti della retta $O+E$ non appartenenti alla retta $U+V$,

(3) W. A. PIERCE ha introdotto in [9] una classe di piani che comprende i piani di rifrazione generalizzati desunti da campi ordinati; alcuni risultati sulle collineazioni di tali piani sono già stati stabiliti dallo stesso W. A. PIERCE in [10] e [11].

(4) Penseremo sempre le rette come insiemi di punti.

(5) Tale definizione è dovuta a F. BARTOLOZZI ([6]; definizione 1.3).

$\varphi\colon C' \to C$ un'applicazione bigettiva; siano, inoltre, $0=\varphi(O)$, $1=\varphi(E)$. L'applicazione $\psi\colon \mathbb{P} - (U+V) \to C^2$, definita ponendo $\psi(P)=(x,y)$ se $\varphi((P+V)\cap(O+E))=x$ e $\varphi((P+U)\cap(O+E))=y$, è bigettiva. Se $\psi(P)=(x,y)$ scriviamo anche $P=(x,y)$ identificando P e (x,y); pertanto $O=(0,0)$, $E=(1,1)$. Inoltre, se $A=(1,a)$, $B=(0,b)$ e $C=(c,c)$, poniamo $(a)=(O+A)\cap(U+V)$, $[a,b]=B+(a)$, $[c]=C+V$; pertanto risulta $\mathbb{P}=\{(x,y),(a),V|x,y,a\in C\}$, $\mathbb{R}=\{[a,b],[c],U+V|a,b,c\in C\}$. Definiamo l'applicazione $T\colon C^3 \to C$ ponendo $T(a,x,b)=y$ se $(x,y)\in$ $\in[a,b]$; inoltre, se $a,b\in C$, definiamo $a+b=T(1,a,b)$, $a\bigcirc b=T(a,b,0)$. La struttura algebrica $C(+,\bigcirc)$, che dicesi *legata al riferimento* (O,E,U,V) *del piano proiettivo* π, è sistema cartesiano (6) se e solo se il piano proiettivo π è $(V,U+V)$-transitivo. Quando π è $(V,U+V)$-transitivo risulta $(x,y)\in[a,b]$ se e solo se $y=a\bigcirc x+b$; allora si dice che il sistema cartesiano $C(+,\bigcirc)$ *coordinatizza il piano proiettivo* π *nel riferimento* (O,E,U,V). Anzi, se $C(+,\bigcirc)$ è un sistema cartesiano, prendendo come insieme dei punti $\mathcal{P}=C^2$ e come insieme delle rette $\mathcal{R}=\{[a,b],[c]\mid a,b,c\in C\}$ essendo $[a,b]=\{(x,y)\in\mathcal{P}\mid y=a\bigcirc x+b\}$, $[c]=\{(x,y)\in\mathcal{P}\mid x=c\}$, si ottiene un piano affine; si consideri la quaterna (O,E,U,V) dove $O=(0,0)$, $E=(1,1)$ (0 e 1 sono, rispettivamente, lo zero e l'unità del sistema cartesiano $C(+,\bigcirc)$), U è la direzione della retta $[0,0]$ e V è la direzione della retta $[0]$. Il piano proiettivo desunto da tale piano affine è $(V,U+V)$-transitivo, è coordinatizzato dal sistema cartesiano $C(+,\bigcirc)$ nel riferimento (O,E,U,V) e si chiama anche *il piano proiettivo sopra il sistema cartesiano* $C(+,\bigcirc)$. Se il piano proiettivo $\pi=\pi(\mathbb{P},\mathbb{R})$ è $(V,U+V)$-transitivo (essendo U e V punti distinti di π) e se $C(+,\bigcirc)$ è il sistema cartesiano che coordinatizza π in un riferimento (O,E,U,V), allora le applicazioni $\tau_c\colon \mathbb{P}\to\mathbb{P}$ definite da $\tau_c((x,y))=(x,y+c)$, $\tau_c((a))=(a)$, $\tau_c(V)=V$, se $c\in C$, sono esattamente le $(V,U+V)$-omologie; inoltre, π è piano proiettivo ordinato se e solo se $C(+,\bigcirc)$ è sistema cartesiano ordinato (7).

Il piano proiettivo $\pi=\pi(\mathbb{P},\mathbb{R})$ sia ordinato. Se $U,V\in\mathbb{P}$ e $U\neq V$, sulla retta $U+V$ possiamo considerare esattamente due intervalli di estremi U e V (U e V inclusi); chiamiamo i_{UV} uno di essi e i'_{UV} l'altro. Inoltre poniamo $\rho_{UV}=\{r\in\mathbb{R}\mid r\neq U+V,\ r\cap(U+V)\in i_{UV}\}$, $\rho'_{UV}=$ $=\{r\in\mathbb{R}\mid r\neq U+V,\ r\cap(U+V)\in i'_{UV}\}$. Se $(P,l)\in\mathbb{P}\times\mathbb{R}$ e $P\notin l$, il pia-

(6) Per la definizione di sistema cartesiano rimandiamo a G. PICKERT ([12]; pag. 90).

(7) Per la definizione di piano ordinato e di sistema cartesiano ordinato rimandiamo a G. PICKERT ([12]; pag. 221 e segg.).

no proiettivo π è (P, l)-*semitransitivo* [8] se per una (e, quindi, per ogni) retta m contenente P esiste una (e, quindi, una sola) (P, l)-omologia σ tale che $\sigma(A)=B$ quando $A, B \in m-\{P, l \cap m\}$ e le coppie (A, B) e $(P, l \cap m)$ non sono separate nella relazione di « separazione tra coppie di punti » subordinata sulla retta m dall'ordinamento di π. Con tali dati, π si dice M_1-*piano rispetto alla quaterna* (O, U, V, ρ_{UV}) o, brevemente, (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-*piano*, essendo $O \notin U+V$, se è $(V, U+V)$-transitivo, $(O, U+V)$-semitransitivo e $(U, U+V)$-ρ_{UV}-transitivo. π si dice M_1-*piano* se è M_1-piano rispetto a qualche quaterna (O, U, V, ρ_{UV}). Inoltre, il piano proiettivo ordinato π si dice M-*piano rispetto alla terna* (O, U, V) di suoi punti non appartenenti alla medesima retta o, brevemente, (O, U, V)-M-*piano* [9] se è $(V, U+V)$-transitivo, $(O, U+V)$-semitransitivo e $(V, O+U)$-semitransitivo. π si dice M-*piano* [10] se è M-piano rispetto a qualche terna (O, U, V) di suoi punti. Un sistema cartesiano ordinato $C(+, \bigcirc, <)$ si dice M_1-*sistema* ([13]; definizione 2) quando $(a+b)\bigcirc c=a\bigcirc c+b\bigcirc c$, $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a\bigcirc(b\bigcirc c)$ se $a, b, c \in C$, $0<c$ e $a\bigcirc(b+c)=a\bigcirc b+a\bigcirc c$ se $a, b, c \in C$, $0<a$; quando, inoltre, $(a\bigcirc b)\bigcirc c=a\bigcirc(b\bigcirc c)$ se $a, b, c \in C$, $0<a$, $C(+, \bigcirc, <)$ si dice M-*sistema* [11]. Gli M_1-sistemi sono le strutture algebriche ottenute per rifrazione da corpi ordinati ([13]; definizioni 3, 4 e teoremi 2, 3); i piani proiettivi ordinati sopra gli M_1-sistemi sono gli M_1-piani ([13]; teorema 1). Pertanto ([13]; teorema 4), gli M_1-piani sono i *piani di rifrazione generalizzati,* definiti come piani proiettivi ordinati sopra sistemi cartesiani ordinati ottenuti per rifrazione da corpi ordinati [12]. Tra i piani di rifrazione generalizzati i piani di MOULTON-PICKERT sono i piani proiettivi ordinati sui sistemi cartesiani ordinati ottenuti per rifrazione da corpi ordinati e da loro funzioni di rifrazione f del tipo $f(x)=xk$, con k positivo e diverso da 1; J. ANDRÉ ha provato in [1] e [2] che tali sistemi cartesiani ordinati sono gli M-sistemi propri

(8) Tale definizione è dovuta a J. ANDRÉ ([1]; definizione 2.1).

(9) Dimostreremo, tra l'altro, che un piano proiettivo ordinato π è (O, U, V)-M-piano se e solo se è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano e (O, U, V, ρ'_{UV})-M_1-piano.

(10) A differenza di J. ANDRÉ ([1]; definizione 2.2. [2]), includiamo nella definizione di M-piano i piani ordinati desarguesiani; chiamiamo M-*piano proprio* un M-piano non desarguesiano.

(11) A differenza di J. ANDRÉ ([1]; pag. 296. [2]) includiamo nella definizione di M-sistema i corpi ordinati; chiamiamo M-*sistema proprio* un M-sistema che non è corpo ordinato.

(12) In [13] abbiamo trattato i piani di rifrazione generalizzati a livello affine; qui è più comodo trattarli a livello proiettivo.

e che tali piani proiettivi ordinati sono gli M-piani propri. Un riferimento (O, E, U, V) di un piano proiettivo ordinato π (in particolare, π può essere M_1-piano o, addirittura, M-piano) è M_1-riferimento (rispettivamente, M-riferimento) se la struttura algebrica ad esso legata è M_1-sistema (rispettivamente, M-sistema). Se il piano proiettivo ordinato π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano ogni riferimento (O, E, U, V), con $O+E\in\rho_{UV}$, è M_1-riferimento; viceversa, se (O, E, U, V) è M_1-riferimento di π allora π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, essendo ρ_{UV} individuato da $O+E\in\rho_{UV}$ ([13]; teorema 1).

H. Lenz in [8] e A. Barlotti in [5] hanno classificato i piani proiettivi mediante le possibili configurazioni delle coppie punto-retta di transitività. J. C. D. S. Yaqub ha provato in [15] che i piani di Moulton-Pickert, cioè gli M-piani propri, appartengono alla classe III 1 oppure alla classe III 2 di Lenz-Barlotti.

Nel seguito faremo spesso riferimento agli ultimi risultati richiamati.

2. Dilatazioni e classe di Lenz degli M_1-piani. M_1-riferimenti e M-riferimenti.

Usufruendo delle notazioni introdotte al n. 1, entriamo nel vivo della nostra trattazione.

Lemma 1. *Il piano proiettivo ordinato $\pi=\pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ sia, contemporaneamente, (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano e (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano, con $D\in U+V$ (e $D\neq V$). Sia, inoltre, $C(+, \bigcirc, <)$ lo M_1-sistema che coordinatizza π in un M_1-riferimento (O, E, U, V) con $O+E\in\rho_{UV}$; allora, se $D=(d)$ con $d\in C$, posto $\rho_d=\{[a, b], [c] \mid a, b, c\in C, d\leq a\}$ e $\rho_d'=\{[a, b], [c] \mid a, b, c\in C, a\leq d\}$, risulta, ovviamente, $\rho_{DV}=\rho_d$ oppure $\rho_{DV}=\rho_d'$.*

Con tali dati, se τ è una $(D, D+V)$-ρ_{DV}-omologia, si ha

$$\tau((x, y))=(\varphi(x), d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+y)$$

essendo $(x, y)\in C\times C=\mathbb{P}-(U+V)$, $\varphi(x)=x'$ se (e solo se) $\tau((x, d\bigcirc x))=(x', d\bigcirc x')$.

Inoltre, se $A\in U+V$, $O+A\in\rho_{DV}$, $A=(a)$, posto $c=\varphi(0)$, risulta

$$d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x-d\bigcirc c=a\bigcirc\varphi(x)-a\bigcirc x-a\bigcirc c \qquad \textit{se } x\in C.$$

Dimostrazione. Se τ è una $(D, D+V)$-ρ_{DV}-omologia, essendo $\tau(V)=V$, risulta $\tau((x, y))=(\varphi(x), \psi(x, y))$ con $\varphi(x)=x'$ se (e solo se)

$\tau((x, d\bigcirc x))=(x', d\bigcirc x')$ e, posto $P=(x, y)$ si ha $\psi(x, y) = d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+y$ perché $\tau((x, y))=(\varphi(x), \psi(x, y))\in P+D$. Inoltre, se $A\in U+V$, $O+A\in\rho_{DV}$, $A=(a)$, posto $c=\varphi(0)$, $C=(c, d\bigcirc c)$, risulta $\tau((x, y))\in C+A$ se $(x, y)\in O+A$, pertanto è $d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+a\bigcirc c=a\bigcirc\varphi(x)-a\bigcirc x+d\bigcirc c$ e il lemma è provato.

TEOREMA 1. *Il piano proiettivo ordinato* $\pi=\pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ *sia* (O, U, V, ρ_{UV})*-*M_1*-piano. Siano, inoltre,* $C(+, \bigcirc, <)$ *lo* M_1*-sistema che coordinatizza* π *in un riferimento* (O, E, U, V) *con* $O+E\in\rho_{UV}$, $C(+,\cdot,<)$ *il corpo ordinato ed* f *la sua funzione di rifrazione dai quali lo* M_1*-sistema* $C(+, \bigcirc, <)$ *si ottiene per rifrazione.*

Con tali dati, se $d\in C$, *posto* $\rho_d=\{[a, b]\ [c]\mid a, b, c\in C, d\leq a\}$ *e* $\rho_d'=\{[a, b]\ [c]\mid a, b, c\in C, a\leq d\}$, *sussistono le seguenti asserzioni:*

1) π *è* (O, D, V, ρ_{DV})*-*M_1*-piano se* $D=(d)$, $0<d$ *e* $\rho_{DV}=\rho_d$.

2) *Se* $D=(d)$, $0<d$ *e* $\rho_{DV}=\rho_d'$ *allora* π *è* (O, D, V, ρ_{DV})*-*M_1*-piano se e solo se è piano ordinato desarguesiano (cioè, se e solo se* f *è la funzione di rifrazione identica).*

3) π *è (contemporaneamente* (O, U, V, ρ_{UV}) *-* M_1 *- piano e)* (O, U, V, ρ'_{UV})*-*M_1*-piano se e solo se è* (O, U, V)*-M-piano (cioè, se e solo se* $f(x)=xk$, *con* $0<k=(-1)\bigcirc(-1)$, *quando* $x\in C$, $x<0$).

4) *Se* $D=(d)$, $d<0$, $\rho_{DV}=\rho_d$ *allora* π *è* (O, D, V, ρ_{DV})*-*M_1*-piano se e solo se* $f(x)=x$ *quando* $x\in C$, $d\leq x<0$.

5) *Se* $D=(d)$, $d<0$, $\rho_{DV}=\rho'_d$ *allora* π *è* (O, D, V, ρ_{DV})*-*M_1*-piano se e solo se esiste* $k\in C$, $0<k$, *tale che* $f(x)=(x-d)k+f(d)$ *quando* $x\in C$, $x\leq d$.

Dimostrazione. 1) Se $D=(d), 0<d$ e $\rho_{DV}=\rho_d$, per provare che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano basta osservare che è $(D, D+V)$-ρ_{DV}-transitivo; le $(D, D+V)$-ρ_{DV}-omologie sono le applicazioni τ_c: $\mathbb{P}\rightarrow\mathbb{P}$, se $c\in C$, individuate da $\tau_c((x, y))=(x+c, y+dc)$.

2) Con $D=(d)$, $0<d$ e $\rho_{DV}=\rho_d'$, se π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano, le applicazioni τ_c: $\mathbb{P}\rightarrow\mathbb{P}$, se $c\in C$, individuate da $\tau_c((x, y))=(x+c, y+dc)$ sono $(D, D+V)$-ρ_d'-omologie; esse sono, per quanto provato in 1), anche $(D, D+V)$-ρ_d-omologie. Perciò tali applicazioni sono $(D, D+V)$-omologie (essendo $\rho_d\cup\rho_d'=\mathbb{R}$) e, per il teorema 5 di [13], f la funzione di rifrazione identica. Il viceversa è ovvio.

3) e 5) Con $D=(d)$, $d\leq 0$, $\rho_{DV}=\rho_d'$, se π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano, sia τ' la $(D, D+V)$-ρ_{DV}-omologia individuata da $\tau'((-1, d\bigcirc(-1)))=(1, d)$. Per il lemma 1 risulta $\tau'((x, y))=(\varphi(x), d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+y)$,

con $\varphi(x)=x'$ se (e solo se) $\tau'((x, d\bigcirc x))=(x', d\bigcirc x')$; allora $\varphi(-1)=1$. Inoltre, se $a<d$, risulta, ancora per il lemma 1, $d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x-d\bigcirc c'=$ $=a\bigcirc\varphi(x)-a\bigcirc x-a\bigcirc c'$ dove $c'=\varphi(0)$; da cui, se $x=-1$, si ha $d-d\bigcirc(-1)-d\bigcirc c'=a-a\bigcirc(-1)-a\bigcirc c'$. Se $d=0$ è $a\bigcirc c'=$ $=a-a\bigcirc(-1)<0$; perciò risulta $0<c'$, $ac'=a+f(a)$, $a(c'-1)=$ $=f(a)<0, 0<c'-1$ e si conclude che risulta $f(a)=ak$, con $0<k=c'-1$. In tal caso, per quanto provato da J. ANDRÉ in [1] e [2] (si tengano presenti le note (10) e (11)), $C(+, \bigcirc, <)$ è M-sistema, cioè π è (O, U, V)-M-piano. Mentre, se $d<0$, è $0<d-a+f(d)-f(a)=d\bigcirc c'-$ $-a\bigcirc c'$; perciò è $0<c'$ e si ha $d-a+f(d)-f(a)=(d-a)c'$ e $0<$ $<(d-a)^{-1}(f(d)-f(a))=c'-1$. Posto $k=c'-1$, si conclude $f(a)=$ $=(a-d)k+f(d)$ se $a\leq d$. Ancora nell'ipotesi che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano (con $D=(d)$, $d\leq 0$, $\rho_{DV}=\rho_d'$), con le notazioni del lemma 1, scriviamo le $(D, D+V)$-ρ_d'-omologie. Se τ è una $(D, D+V)$-ρ_d'-omologia non identica risulta $\tau((x, y))=(\varphi(x), d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+y)$. Posto $c=$ $=\varphi(0)$, se $0<c$, risulta

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\varphi(x)=x+c && \text{quando} && 0\leq x,\\ &\varphi(x)=kx+c && \text{quando} && -k^{-1}c\leq x<0,\\ &\varphi(x)=x+k^{-1}c && \text{quando} && x<-k^{-1}c; \end{aligned}$$

mentre, se $c<0$, risulta

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\varphi(x)=x+c && \text{quando} && x\leq 0,\\ &\varphi(x)=k^{-1}x+c && \text{quando} && 0<x\leq -kc,\\ &\varphi(x)=x+kc && \text{quando} && -kc<x. \end{aligned}$$

Per concludere la prova di 3) basta osservare che il viceversa segue dai risultati stabiliti da J. ANDRÉ in [1] e [2] e dal teorema 1 di [13]. Mentre, per concludere la prova di 5) stabiliamo il viceversa osservando quanto segue. Se $f(x)=(x-d)k+f(d)$, con $0<k$, quando $x\in C$, $x\leq d$, per provare che π risulta (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)$, $d<0$, $\rho_{DV}=\rho_d'$, basta notare che π è $(D, D+V)$-ρ_d'-transitivo; le $(D, D+V)$-ρ_d'-omologie non identiche sono le applicazioni τ_c: $\mathbb{P}\to\mathbb{P}$, se $c\in C$, $c\neq 0$, individuate da $\tau_c((x, y))=(\varphi(x), d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x+y)$ dove, se $0<c$, φ è data da (1), mentre, se $c<0$, φ è data da (2).

4) Con $D=(d)$, $d<0$, $\rho_{DV}=\rho_d$, se π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano, con le notazioni del lemma 1, risulta $d\bigcirc\varphi(x)-d\bigcirc x-d\bigcirc c=a\bigcirc$ $\bigcirc\varphi(x)-a\bigcirc x-a\bigcirc c$ se a, $x\in C$, $d\leq a$; tale uguaglianza sussiste per

$a=0$ e $a=1$, pertanto $\varphi(x)=x+c$. Inoltre, se $d \leq a < 0$ risulta $a \bigcirc \varphi(x) - a \bigcirc x - a \bigcirc c = 0$, cioè $a \bigcirc (x+c) = a \bigcirc x + a \bigcirc c$ e, tenendo presente che π è $(D, D+V)$-ρ_{DV}-transitivo, se $0<c$ e $-c<x<0$, risulta $a(x+c)=f(a)\,x+ac$, cioè $f(a)=a$ se $d \leq a < 0$. Ancora con le notazioni del lemma 1, le $(D, D+V)$-ρ_d-omologie sono le applicazioni τ_c: $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$, se $c \in C$, definite da $\tau_c((x,y)) = (x+c, d \bigcirc (x+c) - d \bigcirc x + y) = (x+c, y+dc)$. Viceversa, se $f(x)=x$ quando $x \in C$, $d \leq x < 0$, per provare che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)$, $d<0$, $\rho_{DV}=\rho_d$, basta osservare che π è $(D, D+V)$-ρ_d-transitivo; le $(D, D+V)$-ρ_d-omologie sono esattamente le applicazioni τ_c: $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$, se $c \in C$, individuate da $\tau_c((x,y)) = (x+c, y+dc)$.

Il teorema è così provato.

Corollario 1. *Con i dati del teorema 1, se π è (O, U, V)-M-piano proprio, allora è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano, con $D \in U+V$, $D=(d)$, se e solo se $0 \leq d$ e $\rho_{DV}=\rho_d$ oppure $d \leq 0$ e $\rho_{DV}=\rho_d'$.*

Dimostrazione. Basta tener presenti le asserzioni 1), 2) e 3) del teorema 1.

Osservazione 1. Con i dati del teorema 1, se π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)$, $d \leq 0$, $\rho_{DV}=\rho_d'$, le $(D, D+V)$-ρ_d'-omologie non identiche sono le applicazioni τ_c: $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$, se $c \in C$, $c \neq 0$, definite da $\tau_c((x,y)) = (\varphi(x), d \bigcirc \varphi(x) - d \bigcirc x + y)$ dove, se $0<c$, φ è data da (1), mentre, se $c<0$, φ è data da (2).

Osservazione 2. Con i dati del teorema 1, se $\pi=\pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ è (O, U, V)-M-piano, risulta $(U, U+V)$-ρ_0-transitivo e $(U, U+V)$-ρ_0'-transitivo; però appena esistono una $(U, U+V)$-ρ_0-omologia e una $(U, U+V)$-ρ_0'-omologia non identiche che coincidono come applicazioni da $\mathbb{P}$ a se stesso, π risulta desarguesiano perché una tale applicazione è $(U, U+V)$-omologia non identica ([13]; teorema 5).

Corollario 2. *Con i dati del teorema 1, se π non è piano ordinato desarguesiano, risulta (O, D, V)-M-piano, con $D \in U+V$, $D=(d)$, se e solo se $d \leq 0$ e $f(x)=x$ quando $d \leq x < 0$, $f(x)=(x-d)\,k+d$ quando $x<d$, con $0<k \neq 1$.*

Dimostrazione. Basta tener presenti le asserzioni 3), 4) e 5) del teorema 1.

Lemma 2. *Con i dati del teorema 1, se π non è piano ordinato desarguesiano, non esistono $(P, U+V)$-omologie non identiche se*

$P \notin O+V$. Inoltre, π è (B, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano se e solo se $B \in O+V$ $(B \neq V)$.

Dimostrazione. Se $B \in O+V$, per provare che π è (B, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano basta provare che è $(B, U+V)$-semitransitivo.

A tale scopo, se $B=(0, b)$, fissato $s \in C$ con $b<s$, se $l \in C$ e $b<l$, proviamo che esiste la $(B, U+V)$-omologia σ tale che $\sigma((0, s))=(0, l)$. Si considerino la $(V, U+V)$-omologia τ individuata da $\tau((0,0))=(0,b)$ e la $(O, U+V)$-omologia ω individuata da $\omega((0, 1))=(0,a)$ essendo a l'elemento positivo dato da $(s-b) \bigcirc a=l-b$. Ponendo $\sigma=\tau\omega\,\tau^{-1}$ risulta $\sigma((x, y))=\tau\omega\,\tau^{-1}((x, y))=\tau\omega((x, y-b))=\tau((x \bigcirc a, (y-b) \bigcirc a))=(x \bigcirc a, (y-b) \bigcirc a+b)$; pertanto $\sigma((0, b))=(0, b)$, $\sigma((0, s))=(0, (s-b) \bigcirc a+b)= =(0, l-b+b)=(0, l)$ e π è $(B, U+V)$-semitransitivo.

Proviamo, ora, che, se $P \notin O+V$, l'unica $(P, U+V)$-omologia è quella identica.

Se $P \in U+V$ (e $P \neq V$ perché $P \notin O+V$) l'asserto segue dal teorema 5 di [13]. Se $P \notin U+V$ (e $P \notin O+V$), per quanto già provato non è restrittivo supporre $P \in O+U$. Osservato che è $O \neq P \neq U$, per raggiungere l'asserto ragioniamo per assurdo supponendo che esiste una $(P, U+V)$-omologia non identica σ. In tale ipotesi, posto $C=\sigma(O)$, risulta $C \in O+U$, $O \neq C \neq U$ e il piano π $(C, U+V)$-semitransitivo. Infatti, se $A, B \in C+V$ non sono separati da C e V allora $A'=(A+P) \cap (O+V)$ e $B'=(B+P) \cap (O+V)$ sono punti di $O+V$ non separati da O e V; pertanto, se α è la $(O, U+V)$-omologia individuata da $\alpha(A')=B'$, tenendo presente che risulta $\sigma(A')=A$ e $\sigma(B')=B$, si conclude che $\omega=\sigma\alpha\sigma^{-1}$ è la $(C, U+V)$-omologia tale che $\omega(A)=B$ e π risulta $(C, U+V)$-semitransitivo. Poiché $O \neq C \neq U$, se $C=(c, 0)$, risulta $c \neq 0$; se $c<0$, i punti O e $C'=(-c, 0)$ sono punti di $O+U$ non separati da C e U. Pertanto esiste, poiché π è $(C, U+V)$-semitransitivo, la $(C, U+V)$-omologia σ' tale che $\sigma'(O)=C'$. Come prima si riconosce che π è $(C', U+V)$-semitransitivo. Perciò si può supporre che π è $(C, U+V)$-semitransitivo con $C=(c, 0)$ e $0<c$. Allora, se $D=(0, c)$, $L=(c, c)$, $M=(O+L) \cap (D+C)$, risulta $M=(2^{-1} c, 2^{-1} c)$; inoltre, tenendo presente che è $0<2^{-1} c<c$ e che π è $(O, U+V)$-semitransitivo e $(C, U+V)$-semitransitivo, esistono la $(C, U+V)$-omologia φ tale che $\varphi(D)=M$ e la $(O, U+V)$-omologia ψ tale che $\psi(M)=L$. Si conclude che $\psi\varphi$ è $(U, U+V)$-omologia non identica risultando $\psi\varphi(D)=\psi(M)=L$, $\psi\varphi(O) \in O+U$ e, per il teorema 5 di [13], π risulta desarguesiano; assurdo.

Per quanto già provato, se $B \notin O+V$, π non può essere (B, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano dovendo risultare, in tal caso, $(B, U+V)$-semitransitivo.

Il lemma è così provato.

LEMMA 3. *Gli M_1-piani propri appartengono alla classe II oppure alla classe III di* LENZ.

Dimostrazione. Per raggiungere l'asserto basta provare che negli M_1-sistemi propri non valgono le proprietà distributive (G. PIKERT [12]; pp. 107-108). Siano $C(+, \bigcirc, <)$ un M_1-sistema proprio, $C(+, \cdot, <)$ il corpo ordinato ed f la sua funzione di rifrazione dai quali lo M_1-sistema $C(+ \bigcirc, <)$ si ottiene per rifrazione. Supponiamo che risulta $a \bigcirc (b+c) = a \bigcirc b + a \bigcirc c$ se $a, b, c \in C$; allora, se $a<0$, $b<0$, $0<c<-b$ è $f(a)(b+c)=f(a)\,b+ac$, $f(a)=a$ (se $a<0$) e $C(+, \bigcirc, <)$ è corpo ordinato, assurdo. Supponiamo che risulta $(a+b) \bigcirc c = a \bigcirc c + b \bigcirc c$ se $a, b, c \in C$; allora, se $a<0, c<0$, $-a<b$, è $(a+b)\,c=f(a)\,c+bc, f(a)=a$ (se $a<0$) e $C(+, \bigcirc, <)$ è corpo ordinato, assurdo.

Il lemma è così provato.

LEMMA 4. (J. C. D. S. YAQUB). *Gli M-piani propri appartengono alla classe III di* LENZ.

Dimostrazione. Tenendo presenti i risultati stabiliti da J. ANDRÉ in [1] e [2], l'asserto segue dal teorema 3 di J. C. D. S. YAQUB [15].

LEMMA 5. *Se $\pi = \pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ è M_1-piano proprio appartenente alla classe III di* LENZ *e se $(A, b) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$, con $A \notin b$, individua la classe di π (cioè, con $P \in l$, π è (P, l)-transitivo se e solo se $P \in b$ e $l = P + A$) allora, se $U = A$ e $O + V = b$, π risulta (O, U, V)-M-piano.*

Dimostrazione. Se π è M_1-piano proprio appartenente alla classe III di LENZ, sia $(O', U', V', \rho_{U'V'})$ una quaterna rispetto a cui π è M_1-piano. Se $(A, b) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$, con $A \notin b$, individua la classe di π, risulta $U' \in A + V'$ e $V' \in b$, essendo $\pi\,(V', V' + U')$-transitivo. Proviamo che risulta $b = O' + V'$. Siano σ una $(O', U' + V')$-omologia non identica (esistente perché π è $(O', U' + V')$-semitransitivo) e $B \in b$ con $O' \neq B \neq V'$. π risulta $(\sigma(B), \sigma(B) + \sigma(A))$-transitivo perché è $(B, B + A)$-transitivo; pertanto $\sigma(B) \in b$. Allora, essendo $\sigma(B) \neq B$, si conclude che risulta $b = O' + V'$ e, perciò, $O' \in b$. Per dimostrare che π è (O, U, V)-M-piano, se $U = A$ e $O + V = b$, con lo stesso ordinamento che gli compete in quanto $(O', U', V', \rho_{U'V'})$-$M_1$-piano, per quanto stabilito da J. ANDRÉ in [3] e da J. C. D. S. YAQUB in [16], basta notare che π è $(O', U' + V')$-semitransitivo e provare che, se $(P, l) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$ con $P \notin l$, $P \in b$ e $A \in l$, allora il gruppo delle (P, l)-omologie divide la retta b, da cui si tolgono i punti

P e $b \cap l$, esattamente in due parti di transitività. Se $(P, l) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$ con $P \notin l$, $P \in b = O' + V'$ e $A \in l$, si fissi un punto $B \in b$, con $O' \neq B \neq P$ e $B \notin l$, e si consideri la $(B, B+A)$-omologia α tale che $\alpha(O') = P$. Allora, poiché π è $(O', A+V')$-semitransitivo (infatti risulta $U'+V' = A+V'$ e π è $(O', U', V' \rho_{U'V'})$-M_1-piano), il gruppo delle $(\alpha(O'), \alpha(A)+\alpha(V'))$-omologie, cioè delle $(P, A+\alpha(V'))$-omologie, divide la retta b, tolti i punti P e $(A+\alpha(V')) \cap b$, esattamente in due parti di transitività. Inoltre, posto $b \cap l = C$, risulta $l = A+C$ e, considerata la $(P, P+A)$-omologia β tale che $\beta(\alpha(V')) = C$ (si noti che è $C \neq P \neq \alpha(V')$), il gruppo delle $(\beta(P), \beta(A)+\beta(\alpha(V')))$-omologie, cioè delle $(P, A+C)$-omologie, divide la retta b, da cui si tolgono i punti P e C, esattamente in due parti di transitività.

Il lemma è così provato.

TEOREMA 2. *Gli M_1-piani, che non sono M-piani, appartengono alla classe II di* LENZ.

Dimostrazione. Se π è M_1-piano ma non è M-piano, per il lemma 3, appartiene alla classe II oppure alla classe III. La classe III è esclusa dal lemma 5; pertanto π appartiene alla classe II e il teorema è provato.

TEOREMA 3. *Se $\pi = \pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ è M-piano proprio, per il lemma* 4 (J. C. D. S. YAQUB), *appartiene alla classe III di* LENZ. *Allora, se $(A, b) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{R}$, con $A \notin b$, individua la classe di* LENZ *di π (cioè, con $P \in l$, π è (P, l)-transitivo se e solo se $P \in b$ e $l = P+A$), risulta*:

1) *π è (O, U, V)-M-piano se e solo se $U = A$ e $O+V = b$; pertanto (O, E, U, V) è M-riferimento di π se e solo se $U = A$ e $O+V = b$.*

2) *π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano se e solo se $O+V = b$, $U \in A+V$ e $\rho_{UV} \subseteq \rho_{AV}$ oppure $\rho_{UV} \subseteq \rho'_{AV}$; pertanto (O, E, U, V) è M_1-riferimento di π se e solo se $O+V = b$, $U \in A+V$, $O+E \in \rho_{UV}$ con $\rho_{UV} \subseteq \rho_{AV}$ oppure $\rho_{UV} \subseteq \rho'_{AV}$.*

Dimostrazione. 1) Se π è (O, U, V)-M-piano risulta piano di MOULTON-PICKERT (J. ANDRÉ, [1] e [2]) e, per quanto provato da J. C. D. S. YAQUB in [15], appartiene alla classe III di LENZ e la coppia $(U, O+V)$ ne individua la classe. Allora è $U = A$ e $O+V = b$. Per stabilire il viceversa si può tener presente il lemma 5.

2) Se π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, tenendo presente che (A, b) ne individua la classe di LENZ, risulta $V \in b$ e $U \in A+V$ perché π è

$(V, U+V)$-transitivo. Per il lemma 5 π è (O', A, V)-M-piano se $O' \in b$, pertanto, per il lemma 2, risulta $O \in b$ perché π è $(O, U+V)$-semitransitivo (infatti è $U+V=A+V$). Perciò risulta $O+V=b$ e, ancora per il lemma 5, π è anche (O, A, V)-M-piano (si noti che π è (O, A, V, ρ_{AV})-M_1-piano e (O, A, V, ρ'_{AV})-M_1-piano per il teorema 1); allora, per il corollario 1 è $\rho_{UV} \subseteq \rho'_{AV}$, oppure $\rho_{UV} \subseteq \rho'_{AV}$.

Viceversa (si tenga presente che π appartiene alla classe III di LENZ e (A, b) ne individua la classe), se $O \neq V$, $O+V=b$, $U \in A+V$ e $\rho_{UV} \subseteq \rho_{AV}$, oppure $\rho_{UV} \subseteq \rho'_{UV}$, allora π risulta, per il lemma 5, (O, A, V)-M-piano e, per il corollario 1, (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano.

Il teorema è così provato.

TEOREMA 4. *Se $\pi = \pi(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ è M_1-piano ma non è M-piano, per il teorema 2, appartiene alla classe II di* LENZ. *Siano $(O', U', V', \rho_{U'V'})$ una quaterna rispetto alla quale π è M_1-piano, (O', E', U', V'), con $O'+E' \in \rho_{U'V'}$, un suo riferimento* ([13]), *$C(+, \cdot, <)$ il corpo ordinato ed f la sua funzione di rifrazione dai quali si ottiene per rifrazione lo M_1-sistema $C(+, \circ, <)$ che coordinatizza π nel riferimento (O', E', U', V').*

Allora risulta:

1) *$(V', U'+V')$ individua la classe di* LENZ *di π (cioè, con $P \in l$, π è (P, l)-transitivo se e solo se $P=V'$ e $l=U'+V'$).*

2) *π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano se e solo se $V=V'$, $U \in U'+V'$, $O \in O'+V'$ e, con $U=(d)$ nel riferimento (O', E', U', V'), $\rho_{UV} \subseteq \rho_{U'V'}$ oppure $\rho_{U'V'} \subset \rho_{UV}$* ([14]), *nel qual caso è $d<0$, e $f(x)=x$ quando $d \leq x < 0$ oppure $\rho_{UV} \subset \rho'_{U'V'}$, nel qual caso è $d<0$, e $f(x)=(x-d)k+f(d)$, con $0<k$, quando $x \leq d$.*

3) *(O, E, U, V) è M_1-riferimento di π se e solo se $V=V'$, $U \in U'+V'$, $O \in O'+V'$, $O+E \in \rho_{UV}$ e, con $U=(d)$ nel riferimento (O', E', U', V'), $\rho_{UV} \subseteq \rho_{U'V'}$ oppure $\rho_{U'V'} \subset \rho_{UV}$, nel qual caso è $d<0$, e $f(x)=x$ quando $d \leq x < 0$ oppure $\rho_{UV} \subset \rho'_{U'V'}$, nel qual caso è $d<0$, e $f(x)=(x-d)k+f(d)$, con $0<k$, quando $x \leq d$.*

Dimostrazione. 1) Basta osservare che π è $(V', U'+V')$-transitivo.

([13]) Si noti che (O', E', U', V') è M_1-riferimento, mentre (O', E, U', V'), con $O'+E \in \rho'_{U'V'}$, non è mai M_1-riferimento; infatti, in tal caso, π sarebbe M-piano per l'asserzione 3 del teorema 1.

([14]) Col simbolo $\subset$ intendiamo l'inclusione propria.

2) Se π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, risultando $(V, U+V)$-transitivo, per 1) è $V=V'$, $U+V=U'+V'$; pertanto $U \in U'+V'$. Per il lemma 2 risulta $O \in O'+V'$ perché π è $(O,U+V)$-semitransitivo. Se $U=(d)$ risulta ovviamente, $\rho_{UV}=\rho_d=\{[a, b], [c] | a, b, c \in C, d \leq a\}$ oppure $\rho_{UV}=\rho'_d=$ $=\{[a,b],[c] | a,b, c \in C, a \leq d\}$. Se è $0 \leq d$ non può essere $\rho_{UV}=\rho_d'$, perché π sarebbe desarguesiano oppure M-piano per le assersioni 2 e 3 del teorema 1; in tal caso è, perciò, $\rho_{UV} \subseteq \rho_{U'V'}$. Se è $d<0$ e $\rho_{UV}=\rho_d$, per l'asserzione 4 del teorema 1, è $f(x)=x$ quando $d \leq x<0$. Se è $d<0$ e $\rho_{VU}=\rho_d$, per l'asserzione 5 del teorema 1, è $f(x)=(x-d)k+f(d)$, con $0<k$, quando $x \leq d$.

Viceversa, in ogni caso, per il lemma 2, π risulta $(O, U', V', \rho_{U'V'})$-M_1-piano e, per il teorema 1, (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano.

3) Basta tener presente la prova di 2) e il teorema 1 di [13].
Il teorema è così provato.

OSSERVAZIONE 3. Per il teorema 3 e per il corollario 2, un M_1-piano è M-piano proprio se e solo se ogni M_1-sistema $C(+, \circ, <)$ che lo coordinatizza si ottiene per rifrazione da un corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e da una sua funzione di rifrazione f per cui esistono $d, k \in C$, $d \leq 0$, $0<k \neq 1$, tali che

$$f(x)=x \qquad \text{quando} \quad d \leq x<0,$$

$$f(x)=(x-d)k+d \qquad \text{quando} \quad x<d.$$

Pertanto, ogni piano ordinato sopra un M_1-sistema, ottenuto per rifrazione da un corpo ordinato e da una sua funzione di rifrazione non identica che non è di questo tipo, è M_1-piano ma non è M-piano e, per il teorema 2, appartiene alla classe II di LENZ.

OSSERVAZIONE 4. Tenendo presente il teorema 1, con quei dati, $\pi=\pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ sia M_1-piano ma non M-piano; se π è $(O', U', V' \rho_{U'V'})$-M_1-piano, per il teorema 4, risulta $V'=V$, $U'+V'=U+V$ e $O' \in O+V$. Siano, allora, $\mathcal{D}_1$ l'insieme degli elementi $d \in C$ tali che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)$, $\rho_{DV}=\rho_d$ e $\mathcal{D}_2$ l'insieme degli elementi $d \in C$ tali che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)$, $\rho_{DV}=\rho_d'$. Si noti che π è (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano se e solo se è (O', D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $O' \in O+V$; perciò non è restrittivo definire $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ fissando il punto O.

L'insieme $\mathcal{D}_1$ contiene tutti gli elementi non negativi; $\mathcal{D}_1$ contiene un elemento a negativo se e solo se $f(x)=x$ quando $a \leq x < 0$. Inoltre, $\mathcal{D}_1$ contiene un elemento se e solo se contiene tutti gli elementi maggiori di esso (basta notare che da $f(x)=x$ se $d<x<0$ segue $f(d)=d$).

Se l'insieme $\mathcal{D}_2$ non è vuoto, ogni elemento di $\mathcal{D}_2$ risulta minore di ogni elemento di $\mathcal{D}_1$ (se esistessero $d' \in \mathcal{D}_1$ e $d'' \in \mathcal{D}_2$ tali che $d'' \geq d'$, π sarebbe piano ordinato desarguesiano oppure M-piano); pertanto $\mathcal{D}_2$ è costituito da elementi negativi (se non è vuoto). L'insieme $\mathcal{D}_2$ contiene un elemento a (necessariamente negativo) se e solo se esiste $k \in C$, $0<k$, tale che $f(x)=(x-a)k+f(a)$ quando $x \leq a$; inoltre si riconosce che l'insieme $\mathcal{D}_2$ contiene un elemento se e solo se contiene tutti gli elementi minori di esso. In ogni caso $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono disgiunti.

Se $\mathcal{D}_1$ è dotato di minimo d_1, risulta $d_1 \leq 0$; se, inoltre, $\mathcal{D}_2$ è dotato di massimo d_2, risulta $d_2 < d_1$ (si tenga presente che π non è M-piano).

ESEMPIO 1. Il piano ordinato sopra lo M_1-sistema $C(+, \bigcirc, <)$ ottenuto per rifrazione dal campo reale $C(+,\cdot,<)$ e dalla sua funzione di rifrazione f definita ponendo $f(x)=2x$ quando $-1 \leq x < 0$, $f(x)=x-1$, quando $x<-1$, è M_1-piano ma non è M-piano (cfr. osservazione 3).

Notato che π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, essendo $O=(0,0)$, $U=(0)$, V la direzione della retta $[0,0]$, ρ_{UV} individuato da $O+E \in \rho_{UV}$ $(E=(1,1))$, con riferimento ai dati del teorema 1, essendo $k=1$ e $d=-1$, π risulta (O, D, V, ρ_{DV})-M_1-piano con $D=(d)=(-1)$, $\rho_{DV}=\rho'_d=\rho'_{-1}$; perciò è soddisfatta la terza possibilità di 2) del teorema 4 (risultando $\rho_{DV} \subset \rho'_{UV}$).

Con riferimento ai dati dell'osservazione 4 risulta $\mathcal{D}_1 = \{d \in C \mid 0 \leq d\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{d \in C \mid d \leq -1\}$, perciò 0 è il minimo di $\mathcal{D}_1$ e -1 è il massimo di $\mathcal{D}_2$.

ESEMPIO 2. Il piano ordinato sopra lo M_1-sistema $C(+, \bigcirc, <)$ ottenuto per rifrazione dal campo reale $C(+,\cdot,<)$ e dalla sua funzione di rifrazione definita da $f(x)=x^3$ se $x<0$, è M_1-piano ma non è M-piano (cfr. osservazione 3).

Notato che π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, essendo $O=(0,0)$, $U=(0)$, V la direzione della retta $[0,0]$, ρ_{UV} individuato da $O+E \in \rho_{UV}$ $(E=(1,1))$, con riferimento ai dati (del teorema 1 e) dall'osservazione 4, risulta $\mathcal{D}_1=\{d \in C \mid 0 \leq d\}$, perciò 0 è il minimo di $\mathcal{D}_1$; mentre $\mathcal{D}_2$ è vuoto.

ESEMPIO 3. Se $F(+,\cdot,<)$ è un corpo ordinato e σ è un suo automorfismo ordinato, sia $C=\{\{a_n\} \mid n \in \mathbb{Z},\ a_n \in F$ e esiste un intero q

tale che $a_n=0$ se $n<q\}$; se $\{a_n\}\in C$ e non è $a_n=0$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$, il minimo p, degli interi n tali che $a_n\neq 0$, è l'ordine, e a_p è il termine polare, di $\{a_n\}$. Se $\{a_n\},\{b_n\}\in C$, ponendo

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{c_n\} \text{ con } c_n=a_n+b_n,$$

$$\{a_n\}\{b_n\}=\{d_n\} \text{ con } d_n=\sum_{i+j=n} a_i\,\sigma^i(b_j),$$

si definiscono due operazioni su C rispetto alle quali C è corpo non commutativo $C(+,\cdot)$ se σ non è l'automorfismo identico di $F(+,\cdot,<)$. Inoltre, $C(+,\cdot)$ è corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ rispetto all'insieme (dei suoi elementi positivi) costituito dagli elementi di C con termine polare positivo nell'ordinamento di $F(+,\cdot,<)$ ([15]).

Se $a=\{a_n\}$ è elemento negativo di C di ordine p (perciò il termine polare a_p è negativo nell'ordinamento di $F(+,\cdot,<)$), ponendo

$$f(a)=a \text{ se } p\geq 0,\ f(a)=2a \text{ se } p<0,$$

si definisce una funzione di rifrazione del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$.

Il piano ordinato π sopra lo M_1-sistema $C(+,\bigcirc,<)$, ottenuto per rifrazione dal corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e dalla sua funzione di rifrazione f, è M_1-piano ma non è M-piano (cfr. osservazione 3).

Notiamo che π risulta (O,U,V,ρ_{UV})-M_1-piano, essendo $O=(0,0)$, $U=(0)$, V la direzione della retta $[0,0]$, ρ_{UV} individuato da $O+E\in\rho_{UV}$ $(E=(1,1))$. Allora, con riferimento ai dati (del teorema 1 e) dell'osservazione 4, l'insieme $\mathcal{D}_1$ è formato dagli elementi non negativi e dagli elementi $a=\{a_n\}$ negativi di C di ordine $p\geq 0$ (si tenga presente l'asserzione 4 del teorema 1). L'insieme $\mathcal{D}_2$ è formato dagli elementi negativi $a=\{a_n\}$ di C di ordine $p<0$, cioè risulta $\mathcal{D}_2=C-\mathcal{D}_1$. Per provarlo, poiché $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\emptyset$ (cfr. osservazione 4), basta dimostrare che risulta $C-\mathcal{D}_1\subseteq\mathcal{D}_2$. Sia, perciò, $d=\{d_n\}$ elemento negativo di C di ordine $p<0$; se $a=\{a_n\}\in C$ e $a\leq d$, risulta $f(a)=(a-d)\,2+f(d)$ (infatti è $2a=2a-2d+2d=(a-d)\,2+2d$) e, per l'asserzione 5 del teorema 1, è $d\in\mathcal{D}_2$.

Notiamo che $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ danno C per unione disgiunta: $\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2=C$, $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\emptyset$.

([15]) Questo esempio di corpo ordinato non commutativo è dovuto a D. Hilbert (cfr. E. Artin [4]; pp. 49-52).

L'insieme $\mathcal{D}_1$ non è dotato di minimo. Infatti, per ogni elemento $a=\{a_n\}$ di $\mathcal{D}_1$, con termine polare a_p, esiste almeno un elemento $a'=\{a'_n\}$ di $\mathcal{D}_1$ minore di esso; ad esempio, $a'=\{a'_n\}$ essendo $a'_p= =a_p-1$ e $a'_n=a_n$ se $n \neq p$. Analogamente si riconosce che l'insieme $\mathcal{D}_2$ non è dotato di massimo.

3. Collineazioni e classe di Lenz-Barlotti degli M_1-piani che non sono M-piani.

Gli M-piani propri e gli M_1-piani che non sono M-piani appartengono a classi di LENZ diverse (III e II, rispettivamente); tale diversità si riflette sulle collineazioni dei piani. Le collineazioni degli M-piani propri sono state studiate da F. BARTOLOZZI in [7] per determinare le immagini M-epimorfe di tali piani. Questo numero è dedicato allo studio delle collineazioni degli (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piani che non sono M-piani. Tali collineazioni trasformano in sé la retta $U+V$, perciò è sufficiente lo studio affine. A conclusione del numero dimostriamo che gli M_1-piani, che non sono M-piani, appartengono alla classe II 1 di LENZ-BARLOTTI. Si completa, così, la classificazione di LENZ-BARLOTTI dei piani di rifrazione generalizzati.

Se $\pi=\pi(\mathbb{P},\mathbb{R})$ è un piano proiettivo e $\omega\colon \mathbb{P}\to\mathbb{P}$ una sua collineazione, per il seguito, è opportuno precisare quanto segue. Se $r\in\mathbb{R}$, l'insieme $\omega(r)=\{\omega(P)\mid P\in r\}$ è una retta di π: $\omega(r)\in\mathbb{R}$; in conseguenza, se $\rho\subseteq\mathbb{R}$, l'insieme $\omega(\rho)=\{\omega(r)\mid r\in\rho\}$ è un insieme di rette di π: $\omega(\rho)\subseteq\mathbb{R}$. Con (O, E, U, V) riferimento di π, se $\omega(U+V)=U+V$, dovendo esprimere la collineazione ω, affine rispetto alla retta $U+V$, in tale riferimento, possiamo descriverla soltanto in termini dei punti di π non appartenenti a $U+V$ (l'azione di ω sui punti di $U+V$ essendo individuata in conseguenza).

LEMMA 6. *Siano $\pi=\pi(\mathbb{P},\mathbb{R})$ un piano proiettivo, $(P, l)\in\mathbb{P}\times\mathbb{R}$, $\rho\subseteq\mathbb{R}$, ω una collineazione di π. Con tali dati, π è (P, l)-ρ-transitivo se e solo se è $(\omega(P), \omega(l))-\omega(\rho)$-transitivo.*

Dimostrazione. Notato che l'applicazione $\omega'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $\omega'(l)=\omega(l)$ è bigettiva, per raggiungere l'asserto basta provare che π risulta $(\omega(P), \omega(l))-\omega(\rho)$-transitivo nell'ipotesi che è (P, l)-ρ-transitivo. Se σ è (P,l)-ρ-omologia, allora $\omega\sigma\omega^{-1}$ è $(\omega(P), \omega(l))-\omega(\rho)$-omologia. Infatti risulta $\omega\sigma\omega^{-1}\omega(P)=\omega\sigma(P)=\omega(P)$, se $X\in\omega(l)$ è $\omega\sigma\omega^{-1}(X)= =\omega\sigma(\omega^{-1}(X))=\omega\omega^{-1}(X)=X$, se $X\neq\omega(P)$ è $\omega\sigma\omega^{-1}(X)\in X+\omega(P)$

perché $\sigma\,\omega^{-1}(X) \in \omega^{-1}(X)+P$; inoltre, se $A \neq B$, $C \in A+B$, $A+B \in \omega(\rho)$, allora $\omega^{-1}(C) \in \omega^{-1}(A) + \omega^{-1}(B)$, $\omega^{-1}(A) + \omega^{-1}(B) \in \rho$, $\sigma\ \omega^{-1}(C) \in \in \sigma\,\omega^{-1}(A) + \sigma\,\omega^{-1}(B)$ e $\omega\sigma\,\omega^{-1}(C) \in \omega\sigma\omega^{-1}(A) + \omega\,\sigma\omega^{-1}(B)$. Se $R \neq \omega(P) \neq S$, $S \in R + \omega(P)$ allora $\omega^{-1}(R) \neq P \neq \omega^{-1}(S)$, $\omega^{-1}(S) \in \in \omega^{-1}(R)+P$ e, siccome π è (P, l)-ρ-transitivo, esiste una (P, l)-ρ-omologia σ tale che $\sigma\,\omega^{-1}(R) = \omega^{-1}(S)$; allora $\omega\sigma\,\omega^{-1}(R) = S$ e π è $(\omega(P), \omega(l)) - \omega(\rho)$-transitivo.

Il lemma è così provato.

Per studiare le collineazioni degli M_1-piani che non sono M-piani, poniamo in evidenza i seguenti dati A.

DATI A. Il piano proiettivo ordinato $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}_1, \mathbb{R}_1)$ sia M_1-piano ma non M-piano; siano, inoltre, (O, U, V, ρ_{UV}) una quaterna rispetto alla quale π_1 risulta M_1-piano, (O, E, U, V) un suo M_1-riferimento ([16]), $C(+, \bigcirc, <)$ lo M_1-sistema che coordinatizza π_1 nel riferimento (O, E, U, V), $C(+, \cdot, <)$ il corpo ordinato ed f la sua funzione di rifrazione dai quali lo M_1-sistema $C(+, \bigcirc, <)$ si ottiene per rifrazione. Sia, infine, $\pi = \pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ il piano ordinato desarguesiano sopra il corpo ordinato $C(+, \cdot, <)$.

Notato che lo M_1-piano π_1 è (a meno d'isomoformismi ordinati) il piano ordinato sopra lo M_1-sistema $C(+, \bigcirc, <)$, è lecito identificare l'insieme dei punti propri di π_1 con l'insieme dei punti propri di π, cioè col prodotto cartesiano $C \times C$. Inoltre, se $a, b, c \in C$, poniamo $[a, b]_1 = = \{(x, y) \in C \times C \mid y = a \bigcirc x + b\}$, $[c]_1 = [c] = \{(x, y) \in C \times C \mid x = c\}$, $[a, b] = \{(x, y) \in C \times C \mid y = ax + b\}$.

Con i dati A, notiamo che, per il teorema 2, π_1 appartiene alla classe II di LENZ e $(V, U+V)$ ne individua la classe (cioè, con $P \in l$, π_1 è (P, l)-transitivo se e solo se $P = V$ e $l = U+V$).

LEMMA 7. *Con i dati A, se ω è collineazione dello M_1-piano π_1 risulta* $\omega(V) = V$, $\omega(U+V) = U+V$, $\omega(O+V) = O+V$.

Dimostrazione. La coppia $(V, U+V)$ individua la classe di LENZ di π_1 e, per il lemma 6, π_1 risulta $(\omega(V), \omega(U+V))$-transitivo; perciò è $\omega(V) = V$ e $\omega(U+V) = U+V$. Poiché $\omega(V) = V$, per provare che risulta $\omega(O+V) = O+V$, basta provare che è $\omega(O) \in O+V$. Se fosse $\omega(O) \notin O+V$, considerata una $(O, U+V)$-omologia non identica σ (esistente perché π_1 è $(O, U+V)$-semitransitivo), $\omega\sigma\,\omega^{-1}$ sarebbe $(\omega(O), U+V)$-omologia non identica, contro il lemma 2.

([16]) Si noti che dev'essere $O+E \in \rho_{UV}$; infatti, se fosse $O+E \notin \rho_{UV}$ (cioè, se fosse $O+E \in \rho'_{UV}$), π_1 sarebbe M-piano (cfr. teorema 1).

Il lemma è così provato.

Con i dati A, se ω è collineazione di π_1, definiamo le seguenti permutuazioni di C: φ, τ e ψ.

Definizione di φ. Poiché $\omega(O+V)=O+V$ e $\omega(V)=V$ (cfr. lemma 7), se $B \in O+V$, $B \neq V$, risulta $\omega(B) \in O+V$, $\omega(B) \neq V$; pertanto, se $y \in C$, ponendo $\varphi(y)=y'$, se $\omega((0,y))=(0,y')$, si definisce un'applicazione bigettiva φ: $C \to C$.

Definizione di τ. Poiché $\omega(V)=V$ e $\omega(U+V)=U+V$ (cfr. lemma 7), se $l \in \mathbb{R}_1$, $l \neq U+V$, $V \in l$, allora risulta $V \in \omega(l)$, $\omega(l) \neq U+V$; pertanto, se $x \in C$, ponendo $\tau(x)=x'$ se $\omega([x])=[x']$, si definisce un'applicazione bigettiva τ: $C \to C$.

Definizione di ψ. Poiché $\omega(V)=V$ e $\omega(U+V)=U+V$ (cfr. lemma 7), se $D \in U+V$, $D \neq V$, allora $\omega(D) \in U+V$, $\omega(D) \neq V$; pertanto, se $d \in C$, ponendo $\psi(d)=d'$ se $\omega((d))=(d')$, si definisce un'applicazione bigettiva ψ: $C \to C$.

OSSERVAZIONE 5. Con i dati A, se ω è collineazione di π_1, per il lemma 7, risulta $\omega(V)=V$, $\omega(U+V)=U+V$ e $\omega(O+V)=O+V$. *Inoltre, si può supporre, a meno di una $(V, U+V)$-omologia e di una $(O, U+V)$-omologia, che risulta* $\omega(O)=O$ *e* $\omega((0,1)) = (0,1)$ *oppure* $\omega((0,1))=(0,-1)$.

Infatti, se δ è la $(V, U+V)$-omologia tale che $\delta(\omega(O))=O$ allora $\omega'=\delta\omega$ è una collineazione tale che $\omega'(O)=O$ (e $\omega'(V)=V, \omega'(U+V)= =U+V$). Ancora, osservato che è $\omega'((0,1)) \in O+V$, se $\omega'((0,1))= =(0,a)$ con $0<a$, detta σ la $(O, U+V)$-omologia tale che $\sigma((0,a))= =(0,1)$, la collineazione $\omega''=\sigma\omega'$ è tale che $\omega''((0,1))=(0,1)$ (e $\omega''(O)=O$, $\omega''(V)=V$, $\omega''(U+V)=U+V$); se, invece, $\omega'((0,1))= =(0,a)$ con $a<0$, detta σ' la $(O, U+V)$-omologia tale che $\sigma'((0,a))= =(0,-1)$, la collineazione $\omega'''=\sigma'\omega'$ è tale che $\omega'''((0,1))=(0,-1)$ (e $\omega'''(O)=O$, $\omega'''(V)=V$, $\omega'''(U+V)=U+V$). Lo studio delle collineazioni di π_1 si riconduce, così, allo studio delle collineazioni ω tali che $\omega(V)=V$, $\omega(U+V)=U+V$, $\omega(O)=O$ e $\omega((0,1))=(0,1)$ oppure $\omega((0,1))=(0,-1)$.

Con i dati A, sia ω una collineazione di π_1; per il lemma 7 risulta $\omega(V)=V$, $\omega(U+V)=U+V$, $\omega(O+V)=O+V$. Tenendo presente l'osservazione 5 supponiamo, inoltre, che risulta $\omega(O)=O$ e $\omega((0,1))= =(0,1)$. Con tali dati osserviamo che è $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\tau(0)=0$, poniamo $\alpha=\psi(0)$, $\beta=\tau^{-1}(1)$, $\gamma=\psi(1)$ e stabiliamo i seguenti lemmi 8, ..., 16.

LEMMA 8. *Se $x, y, a \in C$ risulta:*

1) $\omega((x, y))=(\tau(x), \alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(y))$,

2) *φ è automorfismo del gruppo $C(+)$ (che è, contemporaneamente, il gruppo additivo dello M_1-sistema $C(+, \bigcirc, <)$ e del corpo ordinato $C(+, \cdot <)$),*

3) $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=\psi(a) \bigcirc \tau(x)$.

Dimostrazione. Notiamo che, se $a, b, c \in C$, si ha $\omega([a,b]_1)=[\psi(a), \varphi(b)]_1$, $\omega([c])=[\tau(c)]$. Pertanto, se $x, y \in C$, risulta $\omega((x, y))=(\tau(x), \alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(y))$ perché $(x, y) \in [x]$ e $(x, y) \in [0, y]$, perciò $\omega((x, y)) \in [\tau(x)]$ e $\omega((x, y)) \in [\alpha, \varphi(y)]_1$. Inoltre, se $x \in C$, risulta

$$\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x+b)=\psi(a) \bigcirc \tau(x)+\varphi(b) \tag{3}$$

perché $\omega((x, a \bigcirc x+b))=(\tau(x), \alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x+b)) \in [\psi(a), \varphi(b)]_1$ Da (3), se $b=0$, si ha $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=\psi(a) \bigcirc \tau(x)$, perciò (anche quando $b \neq 0$) è $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)+\varphi(b)=\psi(a) \bigcirc \tau(x)+\varphi(b)$, e per (3) risulta $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x+b)=\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)+\varphi(b)$ e, se $x=1$, $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ concludendo che φ è automorfismo del gruppo $C(+)$. Da (3) si ricava, allora, $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=\psi(a) \bigcirc \tau(x)$ e il lemma è provato.

LEMMA 9. *Se $x, a \in C$ risulta:*

1) $\psi(a)=\alpha+\varphi(a \bigcirc \beta)$,

2) $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=(\alpha+\varphi(a \bigcirc \beta)) \bigcirc \tau(x)$,

3) *se $\tau(x)>0$ è $\varphi(a \bigcirc x)=\varphi(a \bigcirc \beta)\, \tau(x)$ e $\varphi(x)=\varphi(\beta)\, \tau(x)$.*

Dimostrazione. Se $a \in C$ e $x=\beta$, da 3) del lemma 8 si ha $\alpha+\varphi(a \bigcirc \beta)=\psi(a)$ e, perciò, se a, $x \in C$, risulta $\alpha \bigcirc \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=(\alpha+\varphi(a \bigcirc \beta)) \bigcirc \tau(x)$; da qui, se $\tau(x)>0$, è $\alpha\, \tau(x)+\varphi(a \bigcirc x)=(\alpha+\varphi(a \bigcirc \beta))\, \tau(x)=\alpha \tau(x)+\varphi(a \bigcirc \beta)\, \tau(x)$, $\varphi(a \bigcirc x)=(a \bigcirc \beta)\, \tau(x)$ e, se $a=1$, $\varphi(x)=\varphi(\beta)\, \tau(x)$.

Il lemma è così provato.

LEMMA 10. *Se $x \in C$, $x \neq 0$, risulta $\tau(x)\, \tau(-x)=\tau(x) \bigcirc \tau(-x)<0$* (17).

(17) Il prodotto del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e dello M_1-sistema $C(+,\bigcirc,<)$, in questo caso, coincidono; infatti, provato che, con una delle due moltiplicazioni, il prodotto di $\tau(x)$ per $\tau(-x)$ è negativo, allora $\tau(x)$ e $\tau(-x)$, entrambi diversi da o, hanno segni opposti.

Dimostrazione. Consideriamo la moltiplicazione del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e notiamo, intanto, che, se $x\neq 0$, risulta $\tau(x)\,\tau(-x)\neq 0$. Per provare l'asserto ragioniamo per assurdo.

Se è $\tau(x)\,\tau(-x)>0$ allora $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.

Se $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ sono entrambi positivi, per il lemma 9, risulta $\varphi(x)=\varphi(\beta)\,\tau(x)$ e $\varphi(-x)=\varphi(\beta)\,\tau(-x)$ e, poiché φ è automorfismo di $C(+)$, si ha $\varphi(\beta)\,\tau(x)=\varphi(x)=-\varphi(-x)=-\varphi(\beta)\,\tau(-x)$. Allora, poiché è $\varphi(\beta)\neq 0$, risulta $\tau(x)=-\tau(-x)$; pertanto è $\tau(x)\,\tau(-x)<0$ e l'ipotesi che $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ sono entrambi positivi è assurda.

Se $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ sono entrambi negativi si raggiunge un assurdo ragionando come segue. Notiamo, intanto, che, se $x\neq 0$, risulta

$$\varphi(x)=\gamma\bigcirc\tau(x)-\alpha\bigcirc\tau(x). \tag{4}$$

Infatti, da 2) del lemma 9, se $a=1$, risulta $\alpha\bigcirc\tau(x)+\varphi(x)=(\alpha+\varphi(\beta))\bigcirc\bigcirc\tau(x)$, da cui, osservato che da 1) del lemma 9, se $a=1$, risulta $\gamma=\alpha+\varphi(\beta)$, si conclude che è $\alpha\bigcirc\tau(x)+\varphi(x)=\gamma\bigcirc\tau(x)$ e (4) è provata. Per (4) risulta $\varphi(-x)=\gamma\bigcirc\tau(-x)-\alpha\bigcirc\tau(-x)$; perciò è $\gamma\bigcirc\tau(x)-\alpha\bigcirc\tau(x)=\varphi(x)=-\varphi(-x)=-\gamma\bigcirc\tau(-x)+\alpha\bigcirc\tau(-x)$, cioè

$$\alpha\bigcirc\tau(x)+\alpha\bigcirc\tau(-x)=\gamma\bigcirc\tau(x)+\gamma\bigcirc\tau(-x). \tag{5}$$

Se $\alpha\geq 0$ e $\gamma\geq 0$, da (5) si ha $\alpha(\tau(x)+\tau(-x))=\gamma(\tau(x)+\tau(-x))$ e (poiché risulta $\tau(x)+\tau(-x)\neq 0$) è $\alpha=\gamma$; assurdo perché ψ è applicazione bigettiva. Se $\alpha\geq 0$ e $\gamma<0$ da (5) si ha $\alpha(\tau(x)+\tau(-x))=$ $=f(\gamma)(\tau(x)+\tau(-x))$ e $f(\gamma)=\alpha$, assurdo perché si ha $f(\gamma)<0\leq\alpha$. Gli altri casi ($\alpha<0,\gamma\geq 0$; $\alpha<0,\gamma<0$) si esaminano in modo analogo concludendo che, se $x\neq 0$, l'ipotesi che $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ sono entrambi negativi è assurda.

Pertanto, se $x\neq 0$, $\tau(x)$ e $\tau(-x)$ hanno segni opposti e il lemma è provato.

LEMMA 11. *φ è automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$.*

Dimostrazione. Preliminarmente notiamo che da 3) del lemma 9, se a, $x\in C$ e $\tau(x)>0$, risulta

$$\varphi(a\bigcirc x)=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(x), \tag{6}$$

$$\varphi(x)=\varphi(\beta)\,\tau(x). \tag{7}$$

Risulta $\tau(1)>0$ oppure $\tau(1)<0$ perché è $\tau(1)\neq 0$.

Esaminiamo, dapprima, il caso $\tau(1)>0$.

Da (7), se $x=1$, si ha $1=\varphi(1)=\varphi(\beta)\,\tau(1)=\tau(1)\,\varphi(\beta)$; da (6), se $x=1$, si ha $\varphi(a)=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(1)$. Allora $\varphi(a)\,\varphi(\beta)=$ $=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(1)\,\varphi(\beta)=\varphi(a\bigcirc\beta)$ e da (6) e da (7), se $a, x\in C$ e $\tau(x)>0$, si ottiene $\varphi(a\bigcirc x)=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(x)=\varphi(a)\,\varphi(\beta)\,\tau(x)=\varphi(a)\,\varphi(x)$. Pertanto, se $a, x\in C$, $a>0$ e $\tau(x)>0$, risulta

$$\varphi(ax)=\varphi(a)\,\varphi(x). \tag{8}$$

Per il lemma 10 notiamo che, se $x\in C$, $x\neq 0$, risulta $\tau(x)>0$ oppure $\tau(-x)>0$; inoltre, se $a, x\in C$, risulta $\varphi(ax)=-\varphi(a(-x))=\varphi((-a)(-x))$ perché φ è automorfismo del gruppo $C(+)$. Pertanto, da (8) (nell'ipotesi che è $\tau(1)>0$), se $a, x\in C$, risulta $\varphi(ax)=\varphi(a)\,\varphi(x)$ e φ è automorfismo del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$.

Il caso $\tau(1)<0$ si esamina in modo analogo concludendo che φ è automorfismo.

Resta da provare che φ è automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$.

A tale scopo proviamo, intanto, che, se $x\in C$ e $\beta>0$ risulta

$$x<0 \text{ se e solo se } \tau(x)<0, \tag{9}$$

mentre, se $x\in C$ e $\beta<0$, risulta

$$x>0 \text{ se e solo se } \tau(x)<0. \tag{10}$$

Per il lemma 10, per provare (9), basta provare che, se $x<0$ e $\beta>0$, risulta $\tau(x)<0$. Ragionando per assurdo supponiamo che esiste $x_1\in C$, $x_1<0$ tale che $\tau(x_1)>0$. Allora, se $a\in C$, per 3) del lemma 9, è $\varphi(a\bigcirc x_1)=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(x_1)$ e, se $a<0$, $\varphi(f(a))\,\varphi(x_1)=\varphi(f(a)\,x_1)=$ $=\varphi(a\bigcirc x_1)=\varphi(a\bigcirc\beta)\,\tau(x_1)=\varphi(a)\,\varphi(\beta)\,\tau(x_1)$, da cui, siccome è $\varphi(x_1)=\varphi(\beta)\,\tau(x_1)\neq 0$, risulta $\varphi(f(a))=\varphi(a)$, cioè $f(a)=a$ (se $a<0$), assurdo. In modo analogo a (9) si prova (10).

Concludiamo provando che, se $x\in C$, risulta $x>0$ se e solo se $\varphi(x)>0$.

Basta provare che, se $x>0$, allora $\varphi(x)>0$. Se $x>0$ e $\beta>0$ risulta per (9), $\tau(x)>0$. Da (9), siccome $1>0$, risulta $\tau(1)>0$ e da (7), se $x=1$, $1=\varphi(1)=\varphi(\beta)\,\tau(1)$; pertanto è $\varphi(\beta)>0$ e, per (7), $\varphi(x)>0$. Se $x>0$ e $\beta<0$ allora $-x<0$ e per (10), $\tau(-x)>0$; allora, per (7), risulta

(11) $$\varphi(-x)=\varphi(\beta)\,\tau(-x).$$

Da (10), siccome $-1<0$, risulta $\tau(-1)>0$ e da (11), se $x=1$, risulta $-1=\varphi(-1)=\varphi(\beta)\,\tau(-1)$; pertanto è $\varphi(\beta)>0$ e, per (11), $\varphi(-x)<0$. Si conclude che risulta $\varphi(x)=-\varphi(-x)>0$.

Il lemma è così provato.

Per porre in evidenza (9) e (10) della dimostrazione del lemma 11, enunciamo il seguente lemma 12.

LEMMA 12. *Se P $(-P)$ è l'insieme degli elementi positivi (negativi) del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$, risulta:*

$\tau(P)=P$ (e, quindi, $\tau(-P)=-P$) se $\beta>0$, $\tau(P)=-P$ (e quindi, $\tau(-P)=P$) se $\beta<0$.

Pertanto, in ogni caso, risulta $\tau^2(P)=P$ (e, quindi, $\tau^2(-P)=-P$).

Con i dati già specificati, ponendo, se $d\in C$, $P_d=\{x\in C \mid d\leq x\}$, $P_d'=\{x\in C \mid x\leq d\}$, $\rho_d=\{[a,b]_1, [c] \mid a, b, c\in C, d\leq a\}$, $\rho_d'=\{[a,b]_1, [c] \mid a, b, c\in C, a\leq d\}$, stabiliamo i seguenti lemmi 13 e 14.

LEMMA 13. *Se $\beta>0$ risulta $\psi(P_0)=P_\alpha$ e π_1 è (O, M, V, ρ_{MV})-M_1-pian, con $M=(\alpha)$ e $\rho_{MV}=\rho_\alpha$.*

Pertanto, se $\alpha<0$, dev'essere $f(x)=x$ quando $x\in C$, $\alpha\leq x<0$.

Dimostrazione. Se $a\in C$, $a\geq 0$, risulta $\psi(a)=\alpha+\varphi(a\beta)\geq\alpha$ perché è $\varphi(a\beta)\geq 0$; inoltre, se $a'\geq\alpha$, l'elemento $a=\varphi^{-1}(a'-\alpha)\,\beta^{-1}\geq 0$ è (l'unico elemento di C) tale che $\psi(a)=a'$. Pertanto $\psi(P_0)=P_\alpha$. Allora, per il lemma 6, π_1 è $(M, M+V)$-ρ_α-transitivo e, perciò, (O, M, V, ρ_α)-M_1-piano. Tenendo presente l'asserzione 4 del teorema 1 si conclude la prova del lemma.

LEMMA 14. *Se $\beta<0$ risulta $\psi(P_0)=P_\alpha'$ e π_1 è (O, M, V, ρ_{MV})-M_1-piano, con $M=(\alpha)$, $\rho_{MV}=\rho_\alpha'$.*

Pertanto, dev'essere $\alpha<0$ e $f(x)=(x-\alpha)\,k+f(\alpha)$ con $0<k=$ $=\varphi(\beta^{-1})\,(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))$, se $x\in C$, $x\leq\alpha$.

Dimostrazione. Se $a\in C$, $a>0$, risulta $\psi(a)=\alpha+\varphi(a\beta)<\alpha$ perché è $\varphi(a\beta)<0$; inoltre, se $a'<\alpha$, l'elemento $a=\varphi^{-1}(a'-\alpha)\,\beta^{-1}\geq 0$ è (l'unico elemento di C) tale che $\psi(a)=a'$. Pertanto $\psi(P_0)=P_\alpha'$; per il lemma 6, π_1 è $(M, M+V)$-ρ_α'-transitivo e, perciò, (O, M, V, ρ_α')-M_1-piano. Allora dev'essere $\alpha<0$ perché, altrimenti, π_1 sarebbe M-piano (se $\alpha=0$; cfr. asserzione 3 del teorema 1) oppure piano ordinato desarguesiano (se

$\alpha>0$; cfr. asserzione 2 del teorema 1). Per l'asserzione 5 del teorema 1 risulta $f(x)=(x-\alpha)\,k+f(\alpha)$, con $0<k$, se $x\in C$, $x\leq\alpha$; inoltre, siccome è $\alpha+\varphi(\beta)<\alpha$, risulta $f(\alpha+\varphi(\beta))=(\alpha+\varphi(\beta)-\alpha)\,k+f(\alpha)$, cioè $k=\varphi(\beta^{-1})\,(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))$ e il lemma è provato.

LEMMA 15. *Se* $\beta>0$ *risulta* $\varphi(x)=\varphi(\beta)\,\tau(x)$ se $x\in C$.
Allora, se ($\beta>0$ *e*) $\alpha\leq 0$ *è*

$$\psi f(a)=f\psi(a) \text{ se } a\in C, a<0;$$

$$f(x)=x \text{ se } x\in C,\ n\in\mathfrak{N},\ \psi^n(\alpha)\leq x<0;$$

esiste $y\in C$ ($y<0$) *tale che, per ogni* $n\in\mathfrak{N}$, *risulta* $y<\psi^n(\alpha)$.
Mentre, se ($\beta>0$ *e*) $\alpha>0$ *è*

$$\psi f(a)=f\psi(a) \text{ se } a\in C,\ a<-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1};$$

$$f(x)=x \text{ se } x\in C,\ -\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1}\leq x<0.$$

Dimostrazione. Per il lemma 9, risulta, se $a, x\in C$,

$$\alpha\bigcirc\tau(x)+\varphi(a\bigcirc x)=(\alpha+\varphi(a\bigcirc\beta))\bigcirc\tau(x). \tag{12}$$

Da (12), se $x\in C$ e $a=1$, osservato che risulta $\alpha+\varphi(\beta)>\alpha$, per il lemma 13 si ottiene $\alpha\tau(x)+\varphi(x)=(\alpha+\varphi(\beta))\tau(x)$, cioè

$$\varphi(x)=\varphi(\beta)\,\tau(x) \text{ se } x\in C. \tag{13}$$

Se $\alpha=0$, da (12) si ha $\varphi(a\bigcirc x)=\varphi(a\bigcirc\beta)\bigcirc\tau(x)$, da cui, se $a<0$ e $x<0$, risulta $\varphi(f(a)x)=f(\varphi(a\,\beta))\,\tau(x)$ perché è $\varphi(a\bigcirc\beta)<0$, $\tau(x)<0$ (cfr. lemma 12); allora, siccome φ è automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ (cfr. lemma 11) e per (13) si ha $\varphi(f(a))\,\varphi(\beta)\tau(x)=$ $=f(\varphi(a\,\beta))\,\tau(x)$, $\varphi(f(a)\,\beta)=f\varphi(a\,\beta)$, cioè $\psi f(a)=f\psi(a)$ se $a\in C$, $a<0$.

Se $\alpha<0$ (e $\beta>0$), quando $a, x\in C$, $a, x<0$, risulta $\alpha+\varphi(a\,\beta)<\alpha$; inoltre, per il lemma 12 è $\tau(x)<0$, per il lemma 13 è $f(\alpha)=\alpha$, e da (12) si ottiene $\alpha\,\tau(x)+\varphi(f(a))\,\varphi(x)=f(\alpha+\varphi(a\,\beta))\,\tau(x)$, per (13) è $\alpha\tau(x)+\varphi(f(a))\,\varphi(\beta)\,\tau(x)=f(\alpha+\varphi(a\,\beta))\,\tau(x)$ e $\alpha+\varphi(f(a)\,\beta)=$ $=f(\alpha+\varphi(a\,\beta))$, cioè

$$\psi f(a)=f\psi(a) \text{ se } a\in C,\ a<0. \tag{14}$$

Notiamo che, se $a, b, x\in C$ risulta $a\leq x<b$ se e solo se $\psi(a)\leq$ $\leq\psi(x)<\psi(b)$ e teniamo presente che ψ è permutazione di C. Allora, è $\alpha \leq a < 0$ se e solo se $\psi(\alpha) \leq \psi(a) < \alpha$; per il lemma 13, se $\alpha \leq a < 0$, è $f(a) = a$ e (14) diventa $\psi(a) = f(\psi(a))$, pertanto risulta $f(x) = x$ se $\psi(\alpha) \leq x < \alpha$ e, per quanto già osservato, $f(x) = x$ se $\psi(\alpha) \leq x < 0$. Per induzione, notato che $\psi^n(\alpha) < \psi^{n-1}(\alpha)$ se $n \in \mathbb{N}$, si prova che è

$$f(x) = x \text{ se } x \in C,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } \psi^n(\alpha) \leq x < 0;$$

pertanto, esiste $y \in C$, $y < 0$, tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è $y < \psi^n(\alpha)$ (infatti, altrimenti, f sarebbe la funzione di rifrazione identica).

Se $\alpha > 0$ (e $\beta > 0$), da (12) si ha

$$(15) \qquad \alpha\tau(x) + \varphi(a \bigcirc x) = (\alpha + \varphi(a\beta)) \bigcirc \tau(x) \text{ se } a, x \in C.$$

Risulta $\alpha + \varphi(a\beta) < 0$ se e solo se $a < -\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1}$ (<0). Se $a < -\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1}$ e $x < 0$, è $\tau(x) < 0$ (cfr. lemma 12) e da (15) si ha $\alpha\tau(x) + \varphi(f(a))\varphi(x) = f(\alpha + \varphi(a\beta))\tau(x)$ e, per (13), $\alpha\tau(x) + \varphi(f(a))\varphi(\beta)\tau(x) = f(\alpha + \varphi(a\beta))\tau(x)$, cioè $\alpha + \varphi(f(a)\beta) = f(\alpha + \varphi(a\beta))$ e $\psi f(a) = f\psi(a)$ se $a \in C$ e $a < -\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1}$.

Se $x < 0$ e $-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1} \leq a < 0$, da (15) e da (13), tenendo presente che è $\alpha + \varphi(a\beta) \geq 0$, si ha $\alpha\tau(x) + \varphi(f(a))\varphi(\beta)\tau(x) = (\alpha + \varphi(a)\varphi(\beta))\tau(x)$, allora $\varphi(f(a)) = \varphi(a)$ e $f(a) = a$. Pertanto risulta $f(x) = x$ se $x \in C$, $-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1} \leq x < 0$.

Il lemma è così provato.

OSSERVAZIONE 6. Per il lemma 15, se $\beta > 0$, è $\tau(x) = \varphi(\beta^{-1})\varphi(x)$ se $x \in C$; in tal caso, siccome φ è automorfismo del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$, τ è automorfismo del gruppo additivo $C(+)$.

LEMMA 16. *Se $\beta < 0$ è $\alpha < 0$ e risulta*

$$\varphi(x) = \varphi(\beta)\tau(x) \text{ se } x \in C,\ x \leq 0;$$

$$\varphi(x) = (f(\alpha + \varphi(\beta)) - f(\alpha))\tau(x) \text{ se } x \in C,\ x > 0.$$

Inoltre, è

$$f\psi(a) = f(\alpha) + \varphi(a)(f(\alpha + \varphi(\beta)) - f(\alpha)) \text{ se } a \in C,\ a > f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1});$$

$$\psi(a) = f(\alpha) + \varphi(a)(f(\alpha + \varphi(\beta)) - f(\alpha)) \text{ se } a \in C,\ a \leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1}).$$

Dimostrazione. Se $\beta < 0$, per il lemma 14, è $\alpha < 0$. Dal lemma 9 si ha

$$(16) \qquad \alpha \bigcirc \tau(x) + \varphi(a \bigcirc x) = (\alpha + \varphi(a \bigcirc \beta)) \bigcirc \tau(x) \text{ se } a, x \in C.$$

Da (16), se $a=1$ e $x\leq 0$, essendo per il lemma 12, $\tau(x)\geq 0$, si ha $\alpha\tau(x)+\varphi(x)=(\alpha+\varphi(\beta))\,\tau(x)$. Pertanto, risulta $\varphi(x)=\varphi(\beta)\,\tau(x)$ se $x\in C$, $x\leq 0$.

Notiamo che, se $a\in C$, risulta

$$(17)\qquad \psi(a)\geq 0 \text{ se e solo se } a\leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1});$$

infatti, da $\alpha+\varphi(a\bigcirc\beta)\geq 0$ segue $\varphi(a\bigcirc\beta))\geq -\alpha>0$, $\varphi(f(a))\,\varphi(\beta)\geq -\alpha$, $\varphi(f(a))\leq -\alpha\varphi(\beta^{-1})$, $f(a)\leq -\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1}$, $a\leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})$ e viceversa.

Da (16), se $a=1$ e $x>0$, essendo, per (17), $\psi(1)<0$ (infatti, è $1>0>f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1}))$ e, per il lemma 12, $\tau(x)<0$, si ha $f(\alpha)\,\tau(x)+\varphi(x)=f(\alpha+\varphi(\beta))\,\tau(x)$, cioè $\varphi(x)=(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))\,\tau(x)$ se $x\in C$, $x>0$.

Allora, da (16), se $a>f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})$ e $x=1$, essendo, per (17), $\psi(a)<0$ e, per quanto già provato, $1=\varphi(1)=(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))\,\tau(1)$, cioè $f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha)=\tau(1)^{-1}$, tenendo presente che è $\tau(1)<0$, risulta $f(\alpha)\,\tau(1)+\varphi(a)=f\,\psi(a)\,\tau(1)$, cioè $f\,\psi(a)=f(\alpha)+\varphi(a)\,\tau(1)^{-1}$ e si ha $f\,\psi(a)=f(\alpha)+\varphi(a)\,(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))$ se $a\in C$, $a>f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})$.

Inoltre, da (16), se $a\leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})$ e $x=1$, (è $\psi(a)\geq 0$ per (17) e) risulta $f(\alpha)\,\tau(1)+\varphi(a)=\psi(a)\,\tau(1)$, cioè $\psi(a)=f(\alpha)+\varphi(a)\,(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))$ se $a\in C$, $a\leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})$ e il lemma è provato.

I lemmi 8, ..., 16 servono a dimostrare il seguente teorema 5.

Con i dati A, abbiamo osservato (cfr. lemma 7 e osservazione 5) che le collineazioni dello M_1-piano π_1 sono tutte affini; inoltre, per lo studio delle collineazioni dello M_1-piano π_1 è sufficiente lo studio delle collinazioni ω di π_1 tali che $\omega((0,0))=(0,0)$ e $((0,1))=(0,1)$ oppure $\omega((0,1))=(0,-1)$. Il seguente teorema 5 caratterizza le collineazioni ω dello M_1-piano π_1, tali che $\omega((0,0))=(0,0)$ e $\omega((0,1))=(0,1)$, individuando opportune collineazioni affini del piano ordinato desarguesiano π mediante le quali si descrivono.

TEOREMA 5. *Con i dati A, sia φ un automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e, con $\alpha,\beta\in C$, $\beta\neq 0$, siano:*

i) $\omega_1^{(\alpha,\beta)}$ *la collineazione affine del piano ordinato desarguesiano π definita (sui punti propri) da*

$$\omega_1^{(\alpha,\beta)}((x,y))=(\varphi(\beta^{-1})\,\varphi(x),\ \alpha\varphi(\beta^{-1})\,\varphi(x)+\varphi(y)) \textit{ se } x,y\in C;$$

ii) $\omega_2^{(\alpha,\beta)}$ *la collineazione affine del piano ordinato desarguesiano* *π definita (sui punti propri) da*

$$\omega_2^{(\alpha,\beta)}((x, y)) = ((f(\alpha+\varphi(\beta)) - f(\alpha))^{-1}\varphi(x),$$

$$f(\alpha)(f(\alpha+\varphi(\beta)) - f(\alpha))^{-1}\varphi(x) + \varphi(y))$$

se $x, y \in C$, *quando è* $\alpha < 0$ *e* $\beta < 0$;

iii) $\psi^{(\alpha,\beta)}$ *la permutazione di* C *definita da*

$$\psi^{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha + \varphi(x\beta) \text{ se } x \in C, \text{ quando è } \beta > 0,$$

mentre, $\psi^{(\alpha,\beta)}$ *è definita da*

$$\psi^{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha + \varphi(x\beta) \text{ se } x \in C,\ x \geq 0,$$

$$\psi^{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha + \varphi(f(x)\beta) \text{ se } x \in C,\ x < 0$$

quando è $\beta < 0$.

Con tali dati, un'applicazione $\omega\colon C \times C \to C \times C$ *è collineazione affine dello* M_1*-piano* π_1 *che fissa i punti* $(0, 0)$ *e* $(0,1)$ *se e solo se esistono* $\alpha, \beta \in C$, $\beta \neq 0$, *tali che è soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

1) $\beta > 0, \alpha \leq 0, \omega((x, y)) = \omega_1^{(\alpha,\beta)}((x, y))$ *se* $x, y \in C$,

$\psi^{(\alpha,\beta)} f(a) = f\psi^{(\alpha,\beta)}(a)$ *se* $a \in C$ *e* $a < 0$, $f(x) = x$ *se* $x \in C$ *e* $\alpha \leq x < 0$;

2) $\beta > 0, \alpha > 0, \omega((x, y)) = \omega_1^{(\alpha,\beta)}((x, y))$ *se* $x, y \in C$,

$\psi^{(\alpha,\beta)} f(a) = f\psi^{(\alpha,\beta)}(a)$ *se* $a \in C$, $a < -\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1}$,

$f(x) = x$ *se* $x \in C$, $-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1} \leq x < 0$;

3) $\beta < 0$, $\alpha < 0$,

$\omega((x, y)) = \omega_1^{(\alpha,\beta)}((x, y))$ *se* $x, y \in C$, $x \leq 0$,

$\omega((x, y)) = \omega_2^{(\alpha,\beta)}((x, y))$ *se* $x, y \in C$, $x > 0$,

$f\psi^{(\alpha,\beta)}(a) = f(\alpha) + \varphi(a)(f(\alpha+\varphi(\beta)) - f(\alpha))$ *se* $a \in C$,

$a > f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1})$;

$\psi^{(\alpha,\beta)}(a) = f(\alpha) + \varphi(a)(f(\alpha+\varphi(\beta)) - f(\alpha))$ *se* $a \in C$,

$a \leq f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\beta^{-1})$.

Dimostrazione. Con i dati già specificati, se ω è collineazione dello M_1-piano π_1 che fissa i punti $(0,0)$ e $(0,1)$, con le definizioni date per le permutazioni φ, τ, ψ di C legate a ω, (risulta $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ e) valgono i lemmi 8, ..., 16; pertanto, con $\alpha=\psi(0)$, $\beta=\tau^{-1}(1)\neq 0$, è soddisfatta una delle condizioni 1), 2), 3) dell'enunciato del teorema.

Viceversa, un'applicazione $\omega: C\times C \to C\times C$ definita, mediante $\alpha, \beta \in C$, con $\beta\neq 0$, con una delle condizioni 1), 2), 3) dell'enunciato del del teorema è collineazione dello M_1-piano π_1. Infatti, si riconosce che, se $a, b, c \in C$, risulta $\omega([a,b]_1) = [\alpha+\varphi(a\beta), \varphi(b)]_1$, $\omega([c]) = [\varphi(\beta^{-1})\varphi(c)]$ quando è $\beta>0$; mentre, quando è $\beta<0$, risulta $\omega([a,b]_1)=[\alpha+\varphi(a\beta),\varphi(b)]_1$ se $a\geq 0$, $\omega([a,b]_1)=[\alpha+\varphi(f(a)\beta),\varphi(b)]_1$ se $a<0$, $\omega([c]) = [(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))^{-1}\varphi(c)]$ se $c>0$, $\omega([c])=[\varphi(\beta^{-1})\varphi(c)]$ se $c\leq 0$.

Il teorema è così provato.

Con i dati A, tenendo presente l'osservazione 5, rimangono da studiare le collineazioni ω dello M_1-piano π_1 tali che $\omega((0,0))=(0,0)$ e $\omega((0,1))=(0,-1)$. Se ω è una tale collineazione, con le definizioni date per le permutazioni φ, τ, ψ di C, risulta $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=-1$ e, posto $\alpha=\psi(0)$, $\beta=\tau^{-1}(1)$ e $\gamma=\psi(1)$, continuano a sussistere i lemmi 8, 9 e 10 perché nella loro dimostrazione non si è sfruttata l'ipotesi $\varphi(1)=1$ fatta allora; con una discussione parallela si provano gli analoghi dei lemmi 11, ..., 16 (ad esempio, si prova che, posto, se $x\in C$, $(-\varphi)(x)=-(\varphi(x))$, $-\varphi: C\to C$ è automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$) e si perviene al seguente teorema 6.

TEOREMA 6. *Con i dati A, sia ϑ un automorfismo ordinato del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e, con $\alpha,\beta\in C$, $\beta\neq 0$, posto $\varphi(x)=-\vartheta(x)$ se $x\in C$ (allora risulta $\vartheta=-\varphi$), siano:*

i) $\omega_1^{(\alpha,\beta)}$ *la collineazione affine del piano ordinato desarguesiano π definita (sui punti propri) da*

$$\omega_1^{(\alpha,\beta)}((x,y)) = (\varphi(\beta^{-1})\varphi(x),\ \alpha\varphi(\beta^{-1})\varphi(x)+\varphi(y)) \quad se\ x,y\in C;$$

ii) $\omega_2^{(\alpha,\beta)}$ *la collineazione affine del piano ordinato desarguesiano π definita (sui punti propri) da*

$$\omega_2^{(\alpha,\beta)}((x,y)) = ((f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))^{-1}\varphi(x),$$
$$f(\alpha)(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha))^{-1}\varphi(x)+\varphi(y))$$

se $x,y\in C$, quando è $\alpha<0$ e $\beta>0$;

iii) $\psi^{(\alpha,\beta)}$ *la permutazione di C definita da* iii) *del teorema* 5.

Con tali dati, un'applicazione ω: $C\times C\to C\times C$ *è collineazione affine dello* M_1*-piano* π_1 *che fissa* $(0,0)$ *e trasforma* $(0,1)$ *in* $(0,-1)$ *se e solo se esistono* $\alpha,\beta\in C$, $\beta\neq 0$, *tali che è soddisfatta una delle seguenti condizioni*:

1) $\beta>0$, $\alpha<0$,

$$\omega((x,y))=\omega_1^{(\alpha,\beta)}((x,y)) \ \textit{se} \ x,y\in C,\ x\geq 0,$$

$$\omega((x,y))=\omega_2^{(\alpha,\beta)}((x,y)) \ \textit{se} \ x,y\in C,\ x<0,$$

$$f\psi(a)=f(\alpha)-\varphi(a)(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha)) \ \textit{se} \ a\in C,\ a\geq 0,$$

$$f\psi(a)=f(\alpha)-\varphi(f(a))(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha)) \ \textit{se} \ a\in C,$$
$$-\varphi^{-1}(\alpha)\ \beta^{-1}\leq a<0,$$

$$\psi(a)=f(\alpha)-\varphi(f(a))(f(\alpha+\varphi(\beta))-f(\alpha)) \ \textit{se} \ a\in C,\ a<-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1};$$

2) $\beta<0$, $\alpha\leq 0$, $\omega((x,y))=\omega_1^{(\alpha,\beta)}((x,y))$ *se* $x,y\in C$,

$$f\psi(a)=\alpha+\varphi(a\beta) \ \textit{se} \ a\in C,\ a<-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1};$$

3) $\beta<0$, $\alpha>0$, $\omega((x,y))=\omega_1^{(\alpha,\beta)}((x,y))$ *se* $x,y\in C$,

$$f(a)=a \ \textit{se} \ a\in C,\ f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1})\leq a<0,$$

$$f\psi(a)=\alpha+\varphi(a\beta) \ \textit{se} \ a\in C,\ a<f^{-1}(-\varphi^{-1}(\alpha)\,\beta^{-1}).$$

Dai teoremi 5 e 6 si deduce il seguente teorema 7.

TEOREMA 7. *Ogni collineazione di un* M_1*-piano che non è* M*-piano conserva l'ordinamento del piano* (18).

Dimostrazione. Per l'osservazione 5, con riferimento ai dati A, ogni collineazione χ dello M_1-piano π_1 è prodotto di una collineazione ω scelta fra quelle caratterizzate dai teoremi 5 e 6 e di una dilatazione (omologia di asse $U+V$) δ. Tenendo presente come si scrivono le dilatazioni di π_1 (cfr. [13] e J. ANDRÉ, [1]), risulta $\delta((x,y))=$ $=(x\bigcirc a, y\bigcirc a+b)=(xa, ya+b)$ se $x,y\in C$, con $a,b\in C$ opportuni e $a>0$; perciò δ conserva l'ordinamento. Inoltre, si verifica che la collineazione ω, che è stata esplicitata nei teoremi 5 e 6, conserva anch'essa

(18) Tale affermazione continua a essere vera anche per gli M-piani propri (cfr. F. BARTOLOZZI, [7]) mentre è notoriamente falsa per i piani ordinati desarguesiani.

l'ordinamento del piano. Si conclude, pertanto, che χ conserva l'ordinamento dello M_1-piano π_1, cioè, tenendo presente che χ è collineazione affine rispetto alla retta $U+V$, χ conserva la relazione di « giacenza tra » (associata all'ordinamento di π_1) del piano affine desunto dal piano proiettivo π_1 assumendo $U+V$ come retta impropria.

Il teorema è così provato.

A conclusione del numero, e del presente lavoro, dimostriamo che gli M_1-piani, che non sono M-piani, appartengono alla classe II 1 di LENZ-BARLOTTI. Premettiamo, a tale scopo, il seguente lemma 17 che serve anche a caratterizzare i piani di rifrazione generalizzati appartenenti alla classe III 2 di LENZ-BARLOTTI.

LEMMA 17. *Se π è piano di rifrazione generalizzato non desarguesiano sono equivalenti le condizioni:*

1) *Esiste (O, U, V, ρ_{UV}) tale che π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano, $(U, O+V)$-ρ_{UV}-transitivo e l'insieme delle $(U, O+V)$-ρ_{UV}-omologie è gruppo (rispetto al prodotto operatorio).*

2) *π è M-piano e, ottenendosi lo M-sistema, che coordinatizza π in un suo M-riferimento, per rifrazione dal corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$ e dalla sua funzione di rifrazione $f(x)=xk$, con $0<k$, se $x \in C$, $x<0$, allora k è elemento centrale del corpo ordinato $C(+,\cdot,<)$.*

3) *π è M-piano e l'insieme C^*, degli elementi non nulli dello M-sistema $C(+,\bigcirc,<)$ che coordinatizza π in un suo M-riferimento, è gruppo moltiplicativo $C^*(\bigcirc)$.*

4) *Esiste (O, U, V, ρ_{UV}) tale che π è (O, U, V, ρ_{UV})-M_1piano e $(U, O+V)$-transitivo.*

5) *π appartiene alla classe* III 2 *di* LENZ-BARLOTTI.

Dimostrazione. Il lemma si deduce dal lemma 5, dal teorema 3 di J. C. D. S. YAQUB, [15], dal teorema 7 e dal lemma 10 di [13].

TEOREMA 8. *Gli M_1-piani, che non sono M-piani, appartengono alla classe* II 1 *di* LENZ-BARLOTTI.

Dimostrazione. Se π è M_1-piano ma non è M-piano, per il teorema 2, appartiene alla classe II di LENZ; per provare che appartiene alla classe II 1 basta escludere la classe II 2 tenendo presente che la classe II 3, come provato da J. C. D. S. YAQUB in [14], è vuota. A tale scopo supponiamo che π sia (O, U, V, ρ_{UV})-M_1-piano e appartenga alla classe II 2 e raggiungiamo un assurdo.

Poiché è $(V, U+V)$-transitivo e appartenente alla classe II 2, π risulta anche (D, l)-transitivo con $D \in U+V$, $D \neq V$, $V \in l$, $l \neq U+V$. Risulta $l=O+V$. Infatti, se σ è una $(O, U+V)$-omologia non identica (esistente perché π è $(O, U+V)$-semitransitivo), essendo $\delta(D)=D$, π è $(D, \sigma(l))$-transitivo e dev'essere $\sigma(l)=l$ per l'ipotesi di classe II 2; poiché $V \in l$, ciò è possibile solo se $l=O+V$. Con riferimento ai dati del teorema 1, i casi possibili sono: $D=U$, $D(d)$ con $d>0$, $D=(d)$ con $d<0$.

Se $D=U$, π risulta $(U, O+V)$-transitivo, è soddisfatta la condizione 4) del lemma 17 e, per tale lemma, appartiene alla classe III 2; assurdo.

Se $D=(d)$ con $d>0$, basta osservare che π è, per l'asserzione 1) del teorema 1, (O, D, V, ρ_d)-M_1-piano per concludere, come nel caso $D=U$, con un assurdo.

Se $D=(d)$ con $d<0$, sfruttando i risultati già acquisiti sulle collineazioni degli M_1-piani che non sono M-piani, dimostriamo che π è (O, D, V, ρ_d)-M_1-piano per raggiungere un assurdo come nel caso $D=U$. Con i dati già indicati, se $\alpha \in C$, $d<\alpha<0$, risulta $f(\alpha)=\alpha$. Infatti, se ω è la $(D, O+V)$-omologia tale che $\omega((0))=(\alpha)$, risulta $\omega(V)=V$, $\omega(U+V)=U+V$, $\omega((0,0))=(0,0)$ e $\omega((0,1))=(0,1)$. Allora, con le definizioni date per φ, τ e ψ, φ risulta l'applicazione identica, $\psi(0)=\alpha$, $\psi(a)=\alpha+a \bigcirc \beta$ se $a \in C$ ($\beta=\tau^{-1}(1)$; cfr. lemma 9) e, siccome $\psi(d)=d$ perché $\omega(D)=D$, risulta $\alpha+d \bigcirc \beta=d$, $d \bigcirc \beta=d-\alpha<0$; pertanto è $\beta>0$ e, per il lemma 13, $f(\alpha)=\alpha$. Si è così provato che risulta $f(x)=x$ se $x \in C$, $d<x<0$ e, in conseguenza, è anche $f(d)=d$. Pertanto, per l'asserzione 4) del teorema 1, π è (O, D, V, ρ_d)-M_1-piano e raggiungiamo un assurdo come nel caso $D=U$.

Il teorema è così provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ, *Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen,* Arch. Math. (Basel) **13** (1962) 290-301.

[2] J. ANDRÉ, *Bemerkung zu meiner Arbeit « Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen »,* Arch. Math. (Basel) **14** (1963) 359-360.

[3] J. ANDRÉ, *Über projektive Ebenen vom Lenz-Barlotti-Typ* III 2, Math. Z. **84** (1964) 316-328.

[4] E. ARTIN, *Algebra geometrica,* Feltrinelli, Milano (1968).

[5] A. BARLOTTI, *Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta* (A, a) *per cui un piano grafico risulta* (A, a)*-transitivo,* Boll. Un. Mat. Ital. **12** (1957) 212-226.

[6] F. BARTOLOZZI, *Piani di Moulton generalizzati,* Ricerche Mat. **21** (1972) 252-269.

[7] F. BARTOLOZZI, *Le immagini M-epimorfe di un M-piano,* Ann. Mat. Pura Appl. (in corso di stampa).

[8] H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen,* Jber. Deutsch. Math.-Verein. **57** (1954) 20-31.

[9] W. A. PIERCE, *Moulton planes,* Canad. J. Math. **13** (1961) 427-436.

[10] W. A. PIERCE, *Collineations of affine Moulton planes,* Cand. J. Math. **16** (1964) 46-62.

[11] W. A. PIERCE, *Collineations of projective Moulton planes,* Canad. J. Math. **16** (1964) 637-656.

[12] G. PICKERT, *Projektive Ebenen,* Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1955).

[13] L. PROFERA, *I piani di rifrazione generalizzati,* Ricerche Mat. **22** (1973) 203-226.

[14] J. C. D. SPENCER, *On the Lenz-Barlotti classification of projective planes,* Quart. J. Mat. Oxford Ser. **11** (1960) 241-257.

[15] J. C. D. S. YAQUB, *On projective planes of class* III, Arch. Math. (Basel) **12** (1961) 146-150.

[16] J. C. D. S. YAQUB, *A geometric characterization of generalized Moulton planes,* Math. Z. **99** (1967) 385-391.