B. I. B. DESIGNS E GRAFI DI DIMENSIONE n (*)

di MARIO GIONFRIDDO (a Messina) (**)

SOMMARIO - *Dopo brevi richiami sui B. I. B. Designs e sugli n-Grafi si dimostra una certa analogia tra Block Design e Grafo n dimensionale, si definiscono gli n-Grafi associati ai B. I. B. Designs e si studiano alcune loro proprietà. Si trovano, infine, i grafi di dimensione* 1 *che possono essere associati a B. I. B. Designs simmetrici.*

SUMMARY. - *After short references to B. I. B. Designs and n-Graphs we show that there exist a certain analogy between Block Design and Graph of dimension n; n-Graphs associated to B. I. B. Designs are defined and some of their properties are studied. We determine at last the graphs of dimension* 1 *which can be associated to a simmetric B. I. B. Design.*

1. Introduzione.

Richiamiamo brevemente alcuni concetti della teoria dei B. I. B. Designs e degli n-Grafi o Grafi di dimensione n.

Ricordiamo che si definisce *B. I. B. Design* (Balanced Incomplete Block Design) un insieme non vuoto di v oggetti $a_1, a_2, \dots, a_v$ suddivisi in b blocchi $B_1, B_2, \dots, B_b$ tali che:

1.1. ogni blocco contiene esattamente k oggetti distinti;

1.2. ogni oggetto è contenuto in r blocchi distinti;

1.3. ogni coppia di oggetti distinti a_i, a_j è contenuta contemporaneamente in d blocchi.

Tra i parametri introdotti sussistono le relazioni:

(1) $$b \cdot k = v \cdot r;$$ (2) $$r(k-1) = d(v-1)$$

(*) Pervenuto in Redazione il 14 aprile 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Via C. Battisti - 98100 Messina.

Un B. I. B. Design è rappresentabile mediante una matrice, detta « matrice d'incidenza », $A=(a_{ij})$ con $i=1,2,\dots,v$ $j=1,2,\dots,b$ e dove:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i \in B_j \\ 0 & \text{se } a_i \notin B_j \end{cases}$$

Un B. I. B. Design è detto «simmetrico» se $v=b$ (e $k=r$, per la (1)).

Fissati un B. I. B. Design $\mathcal{B}$ simmetrico ed un suo blocco B_k, si definiscono il B. I. B. Design «derivato» ed il B. I. B. Design «residuo».

Il B. I. B. Design derivato, che indicheremo con $\mathcal{B}'$, ha per blocchi:

$$B_1', B_2', \dots, B'_{k-1}, B'_{k+1}, \dots, B_b'$$

dove B_i' è costituito dai d oggetti comuni a B_k e B_i.

Il B. I. B. Design residuo, che indicheremo con $\mathcal{B}^0$, ha per blocchi:

$$B^0_1, B^0_2, \dots, B^0_{k-1}, B^0_{k+1}, \dots, B^0_b$$

dove B_i^0 è costituito dagli oggetti di B_i che non sono oggetti di B_k.

Per il B. I. B. Design derivato sussistono le relazioni:

$$v'=k;\ b'=b-1=v-1;\ r'=r-1=k-1;\ k'=d;\ d'=d-1$$

Per il B. I. B. Design residuo sussistono le relazioni:

$$v^0=v-k;\ b^0=b-1=v-1;\ r^0=r=k;\ k^0=k-d;\ d^0=d$$

Nella teoria dei B. I. B. Designs si dimostrano i seguenti teoremi:

TEOR. 1.1.: *In un B. I. B. Design simmetrico, se v è pari, $k-d$ è un quadrato.*

TEOR. 1.2. (di *Bruck, Ryser, Chowla*): *In un B. I. B. Design simmetrico , posto $n=k-d$, si ha:*

a) se v è pari, n è un quadrato;

b) se v è dispari, $z^2=n\cdot x^2+(-1)^{v-1/2}dy^2$ ha una soluzione in interi x, y, z non tutti nulli.

Per altre considerazioni sui B. I. B. Designs rimandiamo a [1].

Ricordiamo che si definisce *n-Grafo* o *Grafo* di dimensione n una terna (V, S, f), dove V è un insieme non vuoto, finito, i cui elementi vengono chiamati «vertici», S un insieme i cui elementi vengono chiamati «simplessi» ed infine f è un'applicazione di S in V', insieme delle

$(n+1)$-ple non ordinate di elementi di V. Indicheremo con n', m, n rispettivamente il numero dei vertici, dei simplessi e la dimensione di un n-grafo G.

Un vertice che compare $r \leq n+1$ volte in una stessa $(n+1)$-pla si dice «multiplo» di molteplicità r. Due simplessi si dicono in «parallelo» se hanno gli stessi vertici e con la stessa molteplicità. Un n-grafo privo di simplessi in parallelo e di simplessi a vertici tutti coincidenti si dice «semplice», se invece è privo di simplessi in parallelo e di simplessi a vertici anche solo parzialmente coincidenti si dice «simpliciale». Un n-grafo è detto «connesso» se è possibile, per ogni coppia di vertici V', V'', fissare una successione di simplessi:

(3) $$s_1, s_2, \dots, s_n$$

nella quale due simplessi consecutivi hanno almeno un vertice in comune ed inoltre $V' \in s_1$, $V'' \in s_n$.

Una tale successione di simplessi prende il nome di «catena» tra V' e V''. Tale catena si dice «aperta» se s_1 ed s_n non hanno alcun vertice in comune, si dice «chiusa» se s_1 ed s_n hanno almeno un vertice in comune. Una catena si dice «semplice» se un simplesso non figura mai più di una volta in essa, si dice «elementare» se non passa per alcun vertice mai più di una volta. Si definisce «grado» di un vertice di G il numero dei simplessi che si incontrano in quel vertice. Si definisce «specie» di un simplesso il numero di simplessi aventi almeno un vertice in comune con quel simplesso. Un n-grafo è detto «regolare» di grado r se tutti i suoi vertici hanno grado r (in tal caso tutti i simplessi hanno la stessa specie). Si definisce «caratteristica dei vertici» di G la seguente n'-pla:

$$(g_1, g_2, \dots, g_{n'})$$

nella quale le g_i sono i gradi dei vertici di G. Si definisce «caratteristica dei simplessi» di G la seguente m-pla:

$$(h_1, h_2, \dots, h_m)$$

nella quale le h_j sono le specie dei simplessi di G.

Fissato un n-grafo G si definisce «grafo p-sezione» di G quel grafo di dimensione p avente per vertici i vertici di G e per simplessi tutte le possibili $(p+1)$-ple di vertici di ogni simplesso di G. Ovviamente $p<n$.

Un n-grafo simpliciale è rappresentabile con una matrice, detta «matrice d'incidenza» (vertici per simplessi), così fatta:

$$(4) \qquad A=(a_{ij}) \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } V_i \text{ è estremo di } s_j \\ 0 & \text{se } V_i \text{ non è estremo di } s_j. \end{cases}$$

Un n-grafo è anche rappresentabile con matrici quadrate (vertici per vertici oppure simplessi per simplessi) nel modo seguente:

$$(5) \qquad A=(a_{ij}) \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists\, \bar{s}: V_i, V_j \text{ siano estremi di } \bar{s} \\ 0 & \text{se } \nexists\, \bar{s}: V_i, V_j \text{ siano estremi di } \bar{s} \end{cases}$$

oppure:

$$(6) \qquad A=(a_{ij}) \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists\, \bar{V}: \bar{V} \in s_i \cap s_j \\ 0 & \text{se } s_i \cap s_j = \emptyset. \end{cases}$$

Ovviamente la matrice (5) è di ordine n', la matrice (6) è di ordine m.

Per altre considerazioni sugli n-grafi rimandiamo a [3].

2. n-Grafi associati a B. I. B. Designs.

Fatte queste premesse dimostriamo il seguente:

TEOREMA 2.1.: *Un B. I. B. Design $\mathcal{B}$ (di parametri v, k, b, d, r) determina un n-grafo G con $n'=v$ vertici, $m=b$ simplessi e tale che:*

a) $n=k-1$ *(G è un $(k-1)$-grafo)*

b) $\forall V_i \in V$, $g(V_i)=r$ *(G è regolare di grado r)*

c) ogni simplesso del grafo 1-sezione di G è comune a d simplessi di G.

La dimostrazione segue immediatamente dalle definizioni precedentemente date. Fissato, infatti, un B. I. B. Design $\mathcal{B}$, consideriamo i seguenti insiemi:

$V=\{a_1, a_2, \dots, a_v\}$ insieme degli oggetti di $\mathcal{B}$

$S=\{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ insieme dei blocchi di $\mathcal{B}$

$V'=\{X \subset V: |X| = k\}$

$\mathcal{B}$ stabilisce un'applicazione f di S in V': associando ad ogni blocco B_i k oggetti di V (dunque un elemento di V'). La terna (V, S, f) è un grafo G di dimensione n. I vertici di G sono gli oggetti di $\mathcal{B}$, i simplessi sono i blocchi. Si ha dunque per G: $n'=v$, $m=b$.

Dalla 1.1. e dal fatto che gli elementi di V' hanno cardinalità k, segue che G ha dimensione $n=k-1$, che dimostra la a). Dalla 1.2. si ha che in ogni vertice di G si incontrano r simplessi distinti, dunque ogni vertice ha grado r, da cui la b). Dalla 1.3. si ha che ogni coppia di vertici, dunque ogni simplesso del grafo 1-sezione, appartiene a d simplessi, da cui la c). Il teorema è così dimostrato.

Fissato un B. I. B. Design $\mathcal{B}$, l'n-grafo da esso determinato prende il nome di « *n-grafo associato a* $\mathcal{B}$».

TEOREMA 2.2.: *Relativamente all'n-grafo G associato ad un B. I. B. Design $\mathcal{B}$ si ha:*

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = n'(r-1)\,r = vr\,(r-1) \tag{7}$$

inoltre i simplessi di G hanno tutti la seguente specie:

$$h_j = (n+1)\,(r-1) = k\,(r-1). \tag{8}$$

Ricordando infatti che per un n-grafo si ha: (cfr. [4])

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = \sum_{i=1}^{n'} g_i\,(g_i-1)$$

ne segue:

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = n'\,r\,(r-1) = vr\,(r-1), \qquad \text{cioè la (7);}$$

essendo inoltre: (cfr. [4])

$$h_j = \sum_{i=1}^{n+1} g_{ji} - (n+1)$$

dove h_j è la specie di un simplesso s_j e le g_{ji} sono i gradi dei vertici di s_j, si ha:

$$h_j = r\,(n+1) - (n+1) = (r-1)\,(n+1) = k\,(r-1), \text{ cioè la (8).} \quad \text{(c. v. d.)}$$

COROLLARIO: *Sussiste per G la seguente relazione:*

$$\frac{n'}{m} = \frac{n+1}{r} \tag{9}$$

cioè il rapporto tra il numero dei vertici e quello dei simplessi è uguale al rapporto tra il numero dei vertici che ci sono in un simplesso e quello dei simplessi che si incontrano in un vertice.

La (9) segue immediatamente dalle (7) e (8). Si ha infatti:

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = m \cdot h_j \; (= b \cdot h_j) \tag{10}$$

da cui:

$$n' r\,(r-1) = m\,(r-1)\,(n+1)$$

$$n' r = m\,(n+1)$$

$$\frac{n'}{m} = \frac{n+1}{r}. \qquad \text{(c. v. d.)}$$

OSSERVAZIONE 1: La (9) è particolarmente importante perché dimostra per altra via, mediante gli n-grafi, la relazione (1) nota per i B. I. B. Designs. Da essa si ha infatti:

$$n' r = m\,(n+1) \Rightarrow vr = bk\,.$$

OSSERVAZIONE 2: L'n-grafo associato ad un B. I. B. Design ha per caratteristica dei vertici e per caratteristica dei simplessi rispettivamente:

$$V(G) = [(r)_{n'}]\,; \qquad S(G) = [(k\,(r-1))_b]\,.$$

TEOREMA 2.3.: *Nell'n-grafo associato ad un B. I. B. Design simmetrico ogni coppia di simplessi ha in comune un simplesso del grafo* $(d-1)$*-sezione.*

Dalla (1.3.) segue, infatti, che due blocchi hanno in comune d oggetti e questo significa, per quanto detto finora, che presi due simplessi dell'n-grafo associato al B. I. B. Design, questi hanno in comune d vertici, ossia un simplesso del grafo $(d-1)$-sezione. (c. v. d.)

Dal teorema 2.3. e dalla c) del teorema 2.1. segue che x simplessi, con $2<x<d$, hanno in comune un simplesso del grafo y-sezione con $1<y<d-1$.

La (2) nell'n-grafo associato diventa:

$$\frac{r}{d} = \frac{n'-1}{n} \tag{11}$$

cioè il rapporto tra il numero di simplessi che si incontrano in un vertice ed il numero di vertici comuni a due simplessi è uguale al rapporto tra il numero dei vertici meno uno e il numero dei vertici estremi di un simplesso meno uno.

La (11) si può giustificare facendo un ragionamento analogo a quello che si fa per i B. I. B. Designs e che qui tralasciamo.

Abbiamo visto in precedenza che un B. I. B. Design è rappresentabile con una matrice, detta «matrice d'incidenza», e che un n-grafo è rappresentabile con una delle tre matrici (4), (5), (6). È evidente l'analogia tra la matrice d'incidenza dei B. I. B. Designs e la (4).

Un n-grafo associato ad un B. I. B. Design gode delle seguenti proprietà, di facile verifica:

a) Dalla 1.1.) segue che non esistono in G vertici multipli (cioè tutti i vertici di G hanno molteplicità 1). Questo significa che i simplessi di G hanno estremi tutti distinti.

b) Se $k=d$ un B. I. B. Design può avere blocchi con gli stessi oggetti, in questo caso l'n-grafo associato può avere simplessi in parallelo.

c) Se $d<k$ non ci sono in G simplessi in parallelo e, dunque, G è un n-grafo simpliciale.

d) G è un n-grafo connesso.

e) Se in $\mathcal{B}$ si ha $r=\binom{v-1}{k-1}$, l'n-grafo associato è completo (ricordiamo che un n-grafo si dice «completo» quando ogni vertice ha il grado massimo $g=\binom{n'-1}{n}$, cfr. [4]).

OSSERVAZIONE 3: Ovviamente l'uguaglianza $r=\binom{v-1}{k-1}$ dà una condizione per il B. I. B. Design, precisamente essa rappresenta il massimo numero di blocchi cui può appartenere un oggetto a_i. Si può dunque dire che in un B. I. B. Design si ha:

$$r \leq \binom{v-1}{k-1}.$$

Osserviamo, ancora, che per gli n-grafi si possono dare analoghe enunciazioni, che però qui tralasciamo, dei teoremi 1.1. e 1.2..

Il teorema 2.1. si può invertire nel modo seguente:

TEOREMA 2.4.: *Un n-grafo simpliciale che verifichi le a), b), c) del teorema* 2.1. *determina un B. I. B. Design $\mathcal{B}$ con n' oggetti e m blocchi.*

Basta considerare i vertici di G come oggetti e i simplessi come blocchi. Dalla a) del teor. 2.1.) e dal fatto che G è simpliciale segue che ogni blocco contiene k oggetti distinti, cioè la 1.1.).

Dalla b) segue la 1.2.) ed infine dalla c) la 1.3.).

Dai teoremi 2.1.) e 2.4.) si ha che un B. I. B. Design determina sempre un n-grafo, viceversa non è detto che un qualunque n-grafo determini un B. I. B. Design. A questo proposito, si ha il seguente:

TEOREMA 2.5.: *Un n-albero con $m > 1$ simplessi non è associabile ad alcun B. I. B. Design, se $m = 1$ l' n-albero è associato ad un B. I. B. Design avente $k = v = n'$ e $b = r = d = 1$.*

Cominciamo con l'osservare che, poiché in un n-albero due simplessi o non hanno estremi in comune oppure hanno in comune solo un vertice (cfr. [4]), dal teorema 2.3.) si deduce:

$$d = 1$$

poiché un vertice si può considerare come un simplesso del grafo 0-sezione.

Se, inoltre, consideriamo che in un n-albero $n' = n \cdot m + 1$, per la (9) e per la (11) si ha:

$$\begin{aligned} n' \cdot r &= m(n+1) \\ n \cdot r &= d(n'-1) \\ n' &= n \cdot m + 1 \\ d &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} n'/n = m(n+1)/n'-1 \\ n' = n \cdot m + 1 \end{aligned} \Rightarrow \frac{n'}{n} = \frac{n'-1+m}{n'-1} =$$

$$= 1 + \frac{m}{n'-1} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow n' = n + 1 \Rightarrow m = 1.$$

Da cui segue che un n-albero è associabile ad un B. I. B. Design solo se $m = 1$. Per quanto riguarda il B. I. B. Design si ha:

$$d = 1; \qquad \begin{aligned} r &= 1 \ \text{(dalla (11))} \\ b &= 1 \ \text{(poiché } m = 1) \end{aligned} \ ; \qquad k = v \ \text{(dalla (1))}$$

ed essendo, inoltre, $k = n + 1 = n'$, si ha: $k = v = n'$. (c. v. d.)

3. n-Grafi associati a B. I. B. Designs simmetrici.

Se $\mathcal{B}$ è un B. I. B. Design simmetrico, l' n-grafo ad esso associato ha lo stesso numero di vertici e di simplessi ($n' = m$), ed inoltre

$r=n+1$ (il numero di simplessi che si incontrano in un vertice è uguale al numero di vertici che ci sono in un simplesso).

Dalle considerazioni precedentemente fatte si ha che ad un B. I. B. Design simmetrico non è mai associabile un n-albero (tranne che nel caso banale $m=1$).

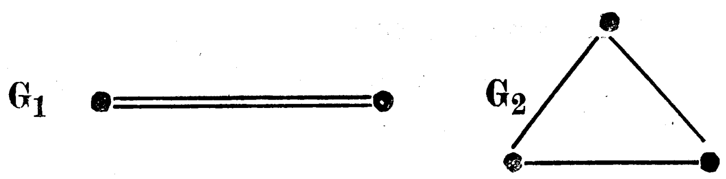
Abbiamo visto in precedenza che da un B. I. B. Design simmetrico si possono definire il B. I. B. Design derivato e quello residuo. In modo analogo se G è un n-grafo associato ad un B. I. B. Design simmetrico si dice «n-grafo associato simmetrico» e fissato un suo simplesso s_i (corrispondente al blocco B_i fissato in $\mathcal{B}$) si definiscono l'n-grafo derivato e l'n-grafo residuo. L'n-grafo derivato ha dimensione $d-1$, è regolare di grado $k-1$, inoltre ogni simplesso del grafo 1-sezione dell'n-grafo derivato G' è comune a $d-1$ simplessi di G'. L'n-grafo residuo è di dimensione $k-d-1$, è regolare di grado $k=r$ ed infine ogni simplesso del grafo 1-sezione è comune a d simplessi dell'n-grafo residuo G^0. Osserviamo che la dimensione di G' più la dimensione di G^0 dà la dimensione di G: $\dim G = \dim G' + \dim G^0$.

4. Alcuni casi particolari.

Vogliamo, adesso, trovare tra i grafi di dimensione 1 quelli che possono essere associati a B. I. B. Designs simmetrici.

Si ha:

TEOREMA 4.1.: *Solo due grafi, tra quelli di dimensione* 1, *possono essere associati a B. I .B. Designs simmetrici; essi sono*:



Infatti poiché il grafo associato è di dimensione 1, si deve avere $k=2$.

Inoltre si ha $d=1$ oppure $d=2$.

Supponiamo $d=1$. L'n-grafo associato è, dunque, simpliciale. Si ha:

$$\frac{n'}{m} = \frac{2}{r} \text{ per la (9);} \qquad r=n'-1 \text{ per la (11)}$$

da cui:

$$m = \frac{1}{2} n' (n'-1) \tag{12}$$

Il grafo è, dunque, completo.

Se il B. I. B. Design è simmetrico si ha:

$$n'=m; \qquad r=n+1$$

da cui: $r=2$, $n'=3$ (dalla (12)).

A questo punto il grafo è ben determinato. Esso ha $n'=3$ vertici e $m=3$ simplessi, inoltre ogni vertice ha grado $r=2$. Il grafo cercato è G_2.

Esso è associato ad un B. I. B. Design simmetrico avente $v=3$ oggetti, $b=3$ blocchi, $k=2$, $d=1$, $r=2$.

Supponiamo, adesso, $d=2$.

Nell' n-grafo associato possono, dunque, esserci simplessi in parallelo. Si ha:

$$\frac{n'}{m} = \frac{2}{r} \text{ per la (9)}; \qquad r/2=n'-1 \text{ per la (11)}$$

da cui:

$$m=n'(n'-1) \tag{13}$$

Se il B. I. B. Design è simmetrico si ha:

$$n'=m; \qquad r=n+1$$

da cui: $r=2$, $n'=2$ (dalla (13)).

Il grafo cercato ha quindi: $n'=2$ vertici, $m=2$ simplessi, inoltre ogni vertice ha grado $r=2$. Il grafo è dunque G_1. Esso è associato ad un B. I. B. Design simmetrico avente: $v=2$ oggetti, $b=2$ blocchi, $k=2$, $d=2$, $r=2$. Il teorema è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARSHALL HALL, JR., *Combinatorial Theory.* Blaisdell Publ. Company, Waltam, Massachusetts, 1967.

[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes.* Dunod, Paris, 1970.

[3] B. BOLLOBAS, *On generalized graphs.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., 16 1965.

[4] M. FERRO - M. GIONFRIDDO, *Considerazioni sugli n-grafi e sugli n-alberi e determinazione degli alberi 2 dimensionali mediante le loro caratteristiche.* Atti Sem. Mat. Fis. Uni. Modena, fasc. II, Vol. XXII, 1973.

[5] R. C. BOSE, *On the construction of balanced incomplete block designs.* Ann. Eugenics, 9, 1939.

[6] M. GIONFRIDDO, *Sulla determinazione dei singrammi non orientati.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (2) 22 (1973).