SUL RETICOLO DEI SOTTOGGETTI DI UN OGGETTO IN UNA CERTA CLASSE DI CATEGORIE (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si studia il reticolo dei sottoggetti di un oggetto per una certa classe di categorie.*

SUMMARY. - *The lattice of subobjects of an object for a certain class of categories is investigated.*

Introduzione.

È ben noto che il reticolo dei sottoggetti di ogni oggetto di una categoria abeliana è modulare (cfr. per es. [6]). Si presenta allora il problema di caratterizzare le categorie che verificano questa proprietà. In questa nota, poggiando su una formulazione equivalente di tale problema (n. 2), si assegna una classe di categorie (n. 1, assiomi A_1, A_2, A_3), comprendente propriamente quella delle categorie abeliane, che verificano la condizione suddetta.

Nel n. 1 si inizia lo studio di tale classe, caratterizzando, fra l'altro, le categorie che godono delle sole proprietà A_1, A_2.

Nel n. 2 si prova che nelle categorie verificanti A_1, A_2, A_3, è modulare il reticolo dei sottoggetti di un qualsiasi loro oggetto.

I risultati del n. 2 permettono di introdurre una « dimensione » per gli oggetti di alcune delle categorie verificanti A_1, A_2, A_3 (n. 3), dimensione che, nel caso delle categorie abeliane, coincide con la lunghezza di un oggetto.

(*) Pervenuto in Redazione il 8 aprile 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa, 1 — 34100 Trieste.

Poiché le categorie verificanti A_1, A_2, A_3 si presentano con sufficiente generalità, ci si propone di continuare il loro studio soprattutto in relazione ad altre classi di categorie per le quali il reticolo dei sottoggetti di un oggetto è modulare (come ad esempio, le categorie esatte secondo Mitchell, cfr. [4]).

0. Premesse.

Nel presente paragrafo si danno alcune precisazioni su concetti che verranno usati in questa nota.

Seguendo [5], chiameremo *monic* ogni morfismo di una categoria che sia cancellabile a sinistra (i monomorfismi si intenderanno invece nel senso di [1] e [7]).

Fra i monic si distinguono i *sottoggetti* di un oggetto. Tale concetto, e quelli di *intersezione ed unione* di sottoggetti, saranno intesi nel senso di [6]. Se $f\colon A \to C$, $g\colon B \to C$ sono due sottoggetti di C, con $A \subseteq B$ (ossia $f \leq g$, cfr. [6]), l'unico morfismo (monic) k tale che $f = gk$ verrà detto (con improprietà di linguaggio) « inclusione canonica del sottoggetto A di C nel sottoggetto B di C ».

Diamo, infine, la seguente

DEFINIZIONE: Si dice che un quadrato (f, g, f', g') è *V-esatto* se (f, g, f', g') è commutativo, se esiste un push-out (f, g, f'', g'') ed è monic il morfismo α che rende commutativo il diagramma seguente (1)

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & & \bullet \arrow[dl, "f''"'] \arrow[dd, "f'"] \\
& \bullet \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\bullet \arrow[ur, "g''"] \arrow[rr, "g'"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

1. Assiomi ed esempi.

Nella presente nota opereremo quasi esclusivamente in categorie verificanti le segunti proprietà:

(1) Cfr. [7] pag. 206. Si noti che la definizione sopra data è un pò più generale di quella di F. Parodi.

A_1) *Ogni coppia di monic con stesso codominio ammette pull-back;*

A_2) *Ogni pull-back di monic è un quadrato V-esatto;*

A_3) *Se il quadrato*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

è push-out ed f, g sono monic, allora il quadrato è anche pull-back.

L'esistenza di categorie del tipo predetto è assicurata dai seguenti esempi.

ESEMPIO 1. Nella categoria degli insiemi valgono, come noto, A_1, A_2, (per A_2 si veda anche [7] (2)).

Osserviamo che:

1.1. *La categoria degli insiemi verifica A_3.*

DIM. Il quadrato

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B_2 \arrow[d, "g'"] \\ B_1 \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

sia push-out ed f, g siano applicazioni iniettive.

Consideriamo i seguenti insiemi: $A_{11} = B_1$, $A_{22} = B_2$, $A_{12} = g(A)$, $A_{21} = f(A)$. Indichiamo inoltre con h_{11} ed h_{22} le identità di B_1 e B_2 rispet-

(2) Si noti che ogni monic è un monomorfismo nella categoria degli insiemi (cfr. [7]).

tivamente; con h_{12}: $A_{21} \to A_{12}$ la biiezione $f(a) \to g(a) \forall a \in A$ e con h_{21} l'inversa della h_{12} (la definizione e la biiettività di h_{12} sono giustificate dalla iniettività di f, g).

Identifichiamo ora ogni B_i con una parte di $X = B_1 + B_2$ mediante l'iniezione canonica λ_i. Si prova allora subito che le parti A_{ij} e le applicazioni h_{ji} verificano le condizioni (i), (ii) di cui in [2] cap. I, § 2, n^0 5, onde possiamo costruire l'incollamento di B_1 e B_2 lungo gli A_{ij} mediante le biiezioni h_{ji}. Esso, come noto, è l'insieme quoziente $X/\mathcal{R}$ dell'insieme X rispetto alla relazione di equivalenza di incollamento $\mathcal{R}$. Indichiamo con φ l'applicazione canonica di X su $X/\mathcal{R}$. Dalla caratterizzazione del push-out nella categoria degli insiemi, si trae allora che, a meno di biiezioni, $D = X/\mathcal{R}$ ed $f' = \varphi|_{B_1}$, $g' = \varphi|_{B_2}$.

Siano ora

$$P = \{(b_1, b_2) \mid (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2 \text{ tali che } f'(b_1) = g'(b_2)\}$$

ed f'', g'' le restrizioni a P delle proiezioni $\pi_{B_1}: B_1 \times B_2 \to B_1$, $\pi_{B_2}: B_1 \times B_2 \to B_2$, rispettivamente. È noto allora che il quadrato (g'', f'', g', f') è pull-back.

Se poi $(b_1, b_2) \in P$ ne segue $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ onde $b_1 \mathcal{R} b_2$; poiché $b_1 \in B_1$ e $b_2 \in B_2$, risulta necessariamente $b_1 \in A_{12}$, $b_2 \in A_{21}$, $b_2 = h_{21}(b_1)$ (cfr. [2] pag. 35). Esiste dunque un $a \in A$ tale che $b_1 = g(a)$, $b_2 = f(a)$. Ciò assicura che l'applicazione $\lambda: A \to P$ ove $\lambda(a) = (g(a), f(a)) \forall a \in A$, è biiettiva, il che comporta che il quadrato (f, g, g', f') è pull-back.

Esempio 2. È noto che tutte le categorie abeliane verificano le A_1, A_2, A_3. (Per A_2 vedasi anche [7] ([3])).

Sia ora $\mathcal{C}$ una categoria verificante A_1, A_2.

Sussiste allora la:

1.2. *a)* *$\mathcal{C}$ ha intersezioni finite;*

b) *$\mathcal{C}$ ha unioni finite.*

Dim: *a)* Immediata conseguenza di A_1.

b) Siano $f: A \to D$, $g: B \to D$ due sottoggetti di D.

([3]) Si ricordi che ogni monic è un monomorfismo in una categoria abeliana come da [7].

Allora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

è pull-back, essendo fh: $A \cap B \to D$ il sottoggetto intersezione di A e B in D. Per A_2 il quadrato (h, k, f, g) è V-esatto, onde esiste un push-out (k', h', H) di k, h ed è monic il morfismo l che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, "k"'] & & A \arrow[dl, "h'"'] \arrow[dd, "f"] \\
& H \arrow[dr, "l"] & \\
B \arrow[ur, "k'"] \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Sia allora l': $H' \to D$ il sottoggetto di D equivalente ad l: $H \to D$. Verifichiamo che esso è l'unione di A e B. A tale scopo consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[rr, "h"] \arrow[dd, "k"'] & & A \arrow[dl, "h''"'] \arrow[dd, "f"] \arrow[ddrr, dashed, "f'"] & & \\
& H' \arrow[dr, "l'"] \arrow[drrr, dashed, "s"] & & & \\
B \arrow[ur, "k''"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[rrrr, dashed, bend right=50, "g'"'] & & D \arrow[dr, dashed, "r"] & & C' \arrow[dl, dashed, "r'"] \\
& & & C &
\end{tikzcd}$$

con h'' e k'' « canonicamente » ottenuti da h', k' (ossia $h''=\lambda\, h'$, $k''=$ $=\lambda\, k'$, ove $l=l'\,\lambda$, $l'=l\,\lambda'$); appare intanto ovvio che $B\subseteq H'$ ed $A\subseteq H'$ (come sottoggetti di D), essendo il diagramma in questione commutativo (anzi (h, k, h'', k'') è push-out).

Siano ora C un oggetto qualsiasi di $\mathcal{C}$, r: $D\to C$ un morfismo ed r': $C'\to C$ un sottoggetto di C tale che la restrizione di r ad A e B possa fattorizzarsi mediante r' ($rf=r'\,f'$, $rg=r'\,g'$). Tali ipotesi implicano intanto che $f'\,h=g'\,k$. Infatti, $r'\,(g'\,k) = (r'\,g')\,k = (r\,g)\,k = r\,(g\,k) = r\,(f\,h) =$ $= (r\,f)\,h = (r'\,f')\,h = r'\,(f'\,h)$ ed r' è monic. Per le proprietà del push-out, esiste allora un morfismo s: $H'\to C'$ tale che $sk''=g'$, $sh''=f'$.

Prendiamo ora in considerazione il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "h''"'] \arrow[ddr, "r'f'"] & \\
B \arrow[r, "k''"] \arrow[drr, "rg"'] & H' \arrow[dr, shift left, "rl'"] \arrow[dr, shift right, "r's"'] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

ove, come subito si verifica, $(r'\,f')\,h = (rg)\,k$, $(r'\,s)\,k''=rg$, $(r'\,s)\,h''=r'\,f'$, $(rl')\,k''=rg$, $(rl')\,h''=r'\,f'$. Poiché (h, k, h'', k'') è push-out, ne risulta allora $rl'=r'\,s$, il che conclude la dimostrazione.

Come corollario della proposizione precedente otteniamo che se $\mathcal{C}$ è una categoria verificante A_1, A_2, per due qualsiasi sottoggetti f: $A\to D$, g: $B\to D$, di un oggetto D, vale la seguente proprietà:

1.3. *Il quadrato*

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "h'"] \\
B \arrow[r, "k'"'] & A\cup B
\end{tikzcd}$$

ove h, k, h', k' sono le « inclusioni canoniche » fra sottoggetti di D (cfr. § 0), è un push-me-pull-you (cfr. [3]).

Inversamente, sia $\mathcal{C}$ una categoria con intersezioni ed unioni finite verificante la proposizione 1.3. Sussiste allora la:

1.4. *$\mathcal{C}$ verifica A_1, A_2.*

Dim. È già noto che $\mathcal{C}$ verifica A_1.

Sia poi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

un pull-back di monic. Indichiamo con $h': A' \to D$, $k': B' \to D$, $l': C' \to D$ i sottoggetti di D rispettivamente equivalenti a $g'f: A \to D$, $g': B \to D$, $f': C \to D$.

Per mezzo di tale equivalenza il pull-back dato si muta nel pull-back

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "l''"] \arrow[d, "k''"'] & B' \arrow[d, "k'"] \\ C' \arrow[r, "l'"'] & D \end{tikzcd}$$

ove $k'l'' = l'k'' = h'$, onde $k'l'': A' \to D$ è l'intersezione di B' e C'. Se $\lambda: B' \cup C' \to D$ è l'unione di B' e C', il diagramma

$$\begin{tikzcd} A' = B' \cap C' \arrow[rr, "l''"] \arrow[dd, "k''"'] & & B' \arrow[dd, "k'"] \arrow[dl, "n"'] \\ & B' \cup C' \arrow[dr, "\lambda"] & \\ C' \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "l'"'] & & D \end{tikzcd}$$

risulta allora commutativo, il che assicura, ricordando l'ulteriore ipotesi fatta su $\mathcal{C}$, che il quadrato (l'', k'', k', l') è V-esatto. Da tale proprietà discende subito che anche (f, g, g', f') è un quadrato V-esatto, onde la A_2.

2. Sul reticolo dei sottoggetti di un oggetto in una categoria verificante $A_1\, A_2\, A_3$.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria con intersezioni ed unioni finite, è d'uso fare la convenzione che la classe potenza di un oggetto è un reticolo, anche se tale classe non è necessariamente un insieme (cfr. [6] pag. 170, [4]).

Assegnamo intanto una condizione necessaria e sufficiente affinché, per la predetta categoria $\mathcal{C}$, i reticoli dei sottoggetti di tutti gli oggetti siano modulari.

Siano D un oggetto qualsiasi di $\mathcal{C}$ ed $f\colon A \to D$, $g\colon B \to D$, $h\colon C \to D$ tre arbitrari sottoggetti di D con $B \subseteq C$. Rimane allora individuato il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "m'"'] & B \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "n'"'] & C \arrow[d, "r'"'] \\
A \arrow[r, "s'"'] & A \cup B \arrow[r, "t'"'] & A \cup C
\end{tikzcd}$$

ove i morfismi sono le inclusioni canoniche fra sottoggetti di D.

Ciò premesso, si verifica la:

2.1. *Il reticolo dei sottoggetti di D è modulare, se e solo se dall'essere* $(k'h', m', r', t's')$ *pull-back e* t' *isomorfismo, risulta* (k', n', r', t') *pull-back.*

Dim: Il reticolo dei sottoggetti di D sia modulare. Se, sotto le ulteriori ipotesi fatte, (k', n', r', t') non fosse pull-back, ne risulterebbe $A \cap B = A \cap C$, $A \cup B = A \cup C$, $B \subsetneqq C$ (come sottoggetti di D), onde il reticolo conterrebbe una terna non modulare.

Sia, viceversa, il reticolo dei sottoggetti di D non modulare. Esistono allora tre sottoggetti $f'\colon A' \to D$, $g'\colon B' \to D$, $h'\colon C' \to D$ (individuati da una terna non modulare) tali che $A' \cap B' = A' \cap C'$, $A' \cup B' = A' \cup C'$, $B' \subsetneq C'$; pertanto nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A' \cap B' \arrow[r, "h''"] \arrow[d, "m''"'] & B' \arrow[r, "k''"] \arrow[d, "n''"'] & C' \arrow[d, "r''"'] \\ A' \arrow[r, "s''"'] & A' \cup B' \arrow[r, "t''"'] & A' \cup C' \end{tikzcd}$$

il rettangolo $(k''h'', m'', r'', t''s'')$ è pull-back, t'' è un isomorfismo, $(t''=1)$, ma (k'', n'', r'', t'') non è pull-back (poiché n'' è monic e k'' non è un isomorfismo).

Possiamo ora provare che:

2.2. *In ogni categoria verificante A_1, A_2, A_3, il reticolo dei sottogget-ti di un qualsiasi oggetto è modulare.*

Dim: Siano infatti D un oggetto di $\mathcal{C}$ ed $f: A \to D$, $g: B \to D$, $h: C \to D$ tre sottoggetti di D tali che $B \subseteq C$ e che nel diagramma

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "m'"'] & B \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "n'"'] & C \arrow[d, "r'"'] \\ A \arrow[r, "s'"'] & A \cup B \arrow[r, "t'"'] & A \cup C \end{tikzcd}$$

$(k'h', m', r', t's')$ sia pull-back e t' un isomorfismo. Poiché allora $A \cap B = A \cap C$ (come sottoggetti di D), dalla proposizione 1.3 segue immediatamente che $(k'h', m', r', t's')$ è push-out; ed essendo tale anche (h', m', n', s') si verifica subito che pure (k', n', r', t') è push-out. Poiché n', k' sono monic, il quadrato (k', n', r', t') è anche pull-back, attesa la validità di A_3. Dalla 2.1. segue infine l'asserto.

3. Su un concetto di dimensione per oggetti di certe categorie verificanti A_1, A_2, A_3.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con oggetto iniziale I, tale che

A_4) *Il morfismo* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I, A)$ *sia monic per ogni* $A \in \mathcal{C}$.

Categorie verificanti tale proprietà sono, ad esempio, quella degli insiemi, quella degli spazi topologici, ogni categoria con zero oggetto.

3.1. *In una categoria* $\mathcal{C}$ *con oggetto iniziale* I *verificante* A_4, *la classe potenza di ogni oggetto ha minimo.*

DIM: Infatti I può essere considerato, a meno di equivalenze, come sottoggetto di ogni oggetto di $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria verificante A_1, A_2, A_3, A_4 è possibile associare ad ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$, che possieda almeno una catena massimale *finita* di sottoggetti di A fra A ed I, un intero non negativo $n = d(A)$, lunghezza di *tutte* le catene massimali di sottoggetti di A fra A ed I ([4]). Diremo allora che n è la *dimensione* di A.

Si prova agevolmente che per siffatte categorie vale la seguente

3.2. *Un oggetto* $A \in \mathcal{C}$ *ha dimensione se e solo se esso è artiniano e noetheriano.*

Se poi $\mathcal{A}$ è una categoria abeliana, la 3.2, assieme al corollario 1 di [6] pag. 178, porge immediatamente la

3.3. *Un oggetto* $A \in \mathcal{A}$ *ha dimensione* n *se e solo se esso ha lunghezza finita* n.

([4]) Questa asserzione, conseguenza del classico teorema di Croisot - Szàsz per reticoli semimodulari « ordinari » (cioè con sostegno un insieme), rimane valida anche per reticoli modulari « ampliati ».

Infatti, dati comunque tre oggetti $a \leq c \leq b$ di un tale reticolo, se esiste una catena massimale *finita* fra b ed a, è sempre possibile *costruire*, a partire da questa, una catena massimale fra b ed a passante per c, facendo intervenire solamente le operazioni reticolari e la condizione di modularità. Quest'ultima osservazione permette allora di dimostrare che ogni altra catena fra b ed a è finita, e che quelle massimali hanno tutte la medesima lunghezza.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARDUINI P.: *Monomorphism and epimorphism in abstract categories*, Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1969) vol. XLII.

[2] BOURBAKI N.: *Topologie générale*, Chap. I-II (quatrième édition), ed. Hermann, Paris (1965).

[3] HILTON P.: *Corrispondences and exact squares*, Proc. of the Conf. on Categ. Alg., La Jolla (1965).

[4] LAPLAZA M. L.: *El retículo de los subobjetos de un objeto en una categoría exacta*, Collectanea Mathematica (1968) vol. XIX.

[5] MAC LANE S.: *Categories for the Working Mathematician*, ed. Springer, New York-Heidelberg-Berlin (1971).

[6] PAREIGIS B.: *Categories and functors*, ed. Academic press, New York-London (1970).

[7] PARODI F.: *Simmetrizzazioni di una Categoria*, Parte I e II, Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1970) vol. XLIV.