LOCALIZZABILITÀ, SEMIFINITEZZA E MISURE ESTERNE (*)

di ALESSIO VOLČIČ (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si danno alcune condizioni per riconoscere se la misura generata da una misura esterna è localizzabile o semifinita. Si studia inoltre il concetto di involucro misurabile di un insieme per le misure non necessariamente σ-finite.*

SUMMARY. - *We give some conditions in order to recognize if the measure induced by an exterior measure is localizable or semifinite. We study as well the concept of measurable hull of a set for not necessarily σ-finite measures.*

In certi capitoli della teoria della misura è conveniente considerare come concetto primitivo le misure esterne, piuttosto che le misure. Ad esempio, ciò avviene nella teoria geometrica della misura. In questa nota ci proponiamo di studiare come i concetti di localizzabilità e semifinitezza possano trasportarsi in questo ambito più generale, senza naturalmente supporre che le misure esterne in questione siano generate da misure, senza supporre cioè che esse siano regolari.

Le tecniche usate consentono poi di definire l'involucro misurabile anche per certe misure non σ-finite.

Tra le premesse tecniche segnaliamo un utile criterio di misurabilità (lemma 2.1), che ha trovato già altri impieghi (in [5]) ed il lemma 2.3 che generalizza (come anche, successivamente, il teorema 5.7) un teorema dovuto a J. L. Kelley ([2], teorema 1).

(*) Pervenuto in Redazione il 20 marzo 1974.

Lavoro eseguito col contributo del C. N. R., nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

1. Incominciamo con il ricordare alcune definizioni già note. Sia S un insieme non vuoto, 2^S la collezione di tutti i sottoinsiemi di S. Una applicazione

$$\mu^* : 2^S \to \overline{\mathbb{R}}^+$$

si dirà una *misura esterna* se

$$(1) \qquad \mu^*(\emptyset) = 0 ;$$

$$(2) \qquad E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Longrightarrow \mu^*(E) \leq \sum_{1}^{\infty}{}_n \, \mu^*(E_n).$$

Un insieme $E \subset S$ si dice *μ^*-misurabile* o, semplicemente, *misurabile* (secondo Carathéodory), se risulta

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E), \qquad \forall\, A \subset S.$$

Diremo poi che E è sommabile, se è misurabile ed ha misura finita. La collezione degli insiemi misurabili forma una σ-algebra, che indicheremo nel seguito con $\mathcal{A}$. La restrizione di μ^* ad $\mathcal{A}$ (che indicheremo con μ) è numerabilmente additiva. Indicheremo con $\mathcal{S}$ la collezione degli insiemi sommabili.

Dalla μ si può generare una misura esterna $\overline{\mu}^*$ nella maniera seguente:

$$(3) \qquad \overline{\mu}^*(E) = \inf \{ \mu(A) ; \; A \in \mathcal{A}, \; A \supset E \}.$$

Risulta, in generale $\mu^*(E) \leq \overline{\mu}^*(E)$ per ogni $E \subset S$. Ricordiamo ancora che la misura esterna μ^* si dice *regolare* ([1], p. 52) se $\overline{\mu}^* = \mu^*$ o, equivalentemente, se la μ^* è generata tramite la (3) da una misura.

Sia ora μ^* una misura esterna su S. In 2^S possiamo introdurre il seguente pseudoordine parziale:

$$(4) \qquad E \leq F \Longleftrightarrow \mu^*(E - F) = 0.$$

La relazione introdotta con la (4) è transitiva e riflessiva, ma non, in generale, antisimmetrica (lo è solo se $\mu^*(E) = 0$ implica $E = \emptyset$). Consideriamo ora questa relazione di equivalenza in 2^S:

$$5) \qquad E \backsim F \Longleftrightarrow \mu^*(E - F) + \mu^*(F - E) = 0.$$

La relazione di pseudoordine $\leq$ induce sull'insieme quoziente $2^S/\sim$ una relazione d'ordine. È facile convincersi che, rispetto a questo ordinamento, $2^S/\sim$ è un reticolo, di cui $\mathcal{A}/\sim$ e $\mathcal{S}/\sim$ sono dei sottoreticoli. Gli elementi di $2^S/\sim$ verranno spesso confusi con i loro rappresentanti, cioè con dei sottoinsiemi di S. In analogia, scriveremo spesso $E \subset F$ e $E = F$ invece di $E \leq F$ ovvero $E \sim F$.

Una misura μ si dice localizzabile, se per ogni collezione $\mathcal{G}$ di insiemi sommabili esiste un insieme misurabile A tale che

$$(6) \qquad \mu(G - A) = 0, \qquad \forall\, G \in \mathcal{G}$$

$$(7) \qquad \mu(G - B) = 0, \qquad \forall\, G \in \mathcal{G},\ B \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mu(A - B) = 0.$$

In altre parole, μ è localizzabile, se ogni sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathcal{S}/\sim$ ammette un maggiorante in $\mathcal{A}/\sim$, che è più piccolo di ogni altro maggiorante in $\mathcal{A}/\sim$. Diremo in questo caso che $\mathcal{U}$ ammette estremo superiore in $\mathcal{A}/\sim$.

Ricordiamo infine che una misura μ si dice semifinita, se

$$(8) \qquad \mu(A) = \sup\{\mu(B),\ B \in \mathcal{A},\ B \subset A,\ \mu(B) < +\infty\}.$$

2. In questo paragrafo caratterizzeremo quelle misure esterne che generano una misura localizzabile.

LEMMA 2.1. *Se $\mathcal{G}$ è una collezione di insiemi misurabili e se $E \subset S$ è un insieme tale che*

$$(9) \qquad \mu^*(G - E) = 0, \qquad \forall\, G \in \mathcal{G},$$

(10) *se $F \subset S$ è tale che $\mu^*(G - F) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$, allora $\mu^*(E - F) = 0$;*

allora E è misurabile.

Sia infatti A un insieme sommabile qualunque. Per un noto criterio [1] basterà, per provare la tesi, dimostrare che è misurabile $A \cap E$ o, ciò che è equivalente, che è misurabile $A - E$.

Poniamo

$$a = \inf\{\mu(B);\ B \in \mathcal{A},\ B \supset A - E\}.$$

Risulta $a < +\infty$, essendo $a \leq \mu(A)$. Sia poi $B_n \supset A - E$, $B_n \in \mathcal{A}$, tale che $\mu(B_n) \leq a + \frac{1}{n}$ e poniamo $B_0 = \bigcap_n B_n$. Ovviamente B_0 è misurabile,

(1) Vedasi [6], § 7, teorema 6.

contiene $A-E$ ed inoltre $\mu(B_0)=a$ (²).

Se è $\mu(B_0)=0$, allora è anche $\mu^*(A-E)\leq\mu(B_0)=0$, quindi $A-E$ ha misura esterna nulla ed è perciò misurabile. Sia allora $\mu(B_0)>0$. Proviamo che $\mu^*(B_0\cap E)=0$.

Se supponiamo vero il contrario, cioè se supponiamo che $\mu^*(B_0\cap E)>0$, allora possiamo provare che $F=E-B_0$ contraddice la (10). Intanto $\mu^*(G-F)=0$ per ogni $G\in\mathcal{G}$. Se così non fosse,

$$0<\mu^*(G-F)=\mu^*(G-(E-B_0))=\mu^*((G\cup\complement E)\cup(G\cap B_0))\leq$$

$$\leq\mu^*(G-E)+\mu^*(G\cap B_0)=\mu^*(G\cap B_0).$$

D'altro canto per la (9) risulta $\mu^*(G\cap(A-E))\leq\mu^*(G-E)=0$. Ma allora, posto $\overline{B}=B_0-G$, risulta $\overline{B}\geq A-E$, quindi, con l'aggiunta di un opportuno insieme di misura nulla, I_0, $\overline{B}\cup I_0\supset A-E$. Inoltre

$$\mu(\overline{B}\cup I_0)=\mu(\overline{B})=\mu(B_0-G)=\mu(B_0)-\mu(B_0\cap G)<\mu(B_0)=a.$$

Ciò contraddice la definizione di a. La contraddizione deriva dall'aver supposto $\mu^*(G-F)>0$.

Risulta allora $\mu^*(G-F)=0$ per ogni $G\in\mathcal{G}$. Inoltre $\mu^*(E-F)=$ $=\mu^*(B_0\cap E)>0$. Abbiamo così contraddetto la (10), avendo supposto $\mu^*(B_0\cap E)>0$.

Avendo così provato che $\mu^*(B_0\cap E)=0$ e dal fatto che $B_0\subset A$ e $B_0\supset A-E$, si deduce che $A-E\backsim B_0$. L'insieme $A-E$ è quindi equivalente ad un insieme misurabile ed è perciò misurabile.

Il contenuto del lemma precedente si può esprimere equivalentemente nel modo seguente: se un sottoinsieme di $\mathcal{A}/\backsim$ ammette estremo superiore in $2^S/\backsim$, questi appartiene ad $\mathcal{A}/\backsim$.

LEMMA 2.2. *Se M è misurabile ed $H\subset M$ è tale che*

$$\mu^*((M-H)\cap E)=0$$

per ogni insieme sommabile E, allora H è misurabile.

(²) Se la misura esterna è regolare, l'insieme B_0 è, come usa dirsi, l'involucro misurabile di A—E.

L'insieme H è misurabile se e solo se $M-H$ è misurabile. D'altro canto $M-H$ è misurabile se e solo se

$$\mu^*(E) \geq \mu^*((M-H)\cap E) + \mu^*(E \cap \complement(M-H)), \qquad \forall E \in \mathcal{S}.$$

Per l'ipotesi fatta su H, la disuguaglianza scritta si riduce alla

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \complement(M-H))$$

che è ovviamente vera per la monotonia della misura esterna.

LEMMA 2.3. (3) *Sia $\mathcal{G}$ una collezione di insiemi sommabili, sia E un insieme misurabile tale che*

(11) $$\mu(G-E)=0, \qquad \forall G \in \mathcal{G}$$

(12) $$\mu(G-F)=0, \qquad \forall G \in \mathcal{G} \Longrightarrow \mu(E-F)=0\,;$$

e sia A un insieme sommabile. Esiste allora una successione di insiemi $\{G_n\}$ di $\mathcal{G}$ tale che $\bigcup_n G_n \cap A \backsim A \cap E$.

Se $\mu(A \cap E)=0$, la tesi è ovvia. Possiamo perciò supporre che sia $\mu(A\cap E)>0$.

Indichiamo con $\mathcal{H}$ la seguente collezione di insiemi:

$$H \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow H \in \mathcal{A}, \quad \exists\, G \in \mathcal{G}:\ H \subset G \cap A \cap E$$

e con $\mathcal{H}_\sigma$ la collezione delle riunioni numerabili di insiemi di $\mathcal{H}$. Poniamo poi $s=\sup\{\mu(I), I \in \mathcal{H}_\sigma\}$.

Poiché $I \subset A \cap E$ per ogni $I \in \mathcal{H}_\sigma$, risulta $s \leq \mu(A\cap E) < +\infty$. Esiste allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un $I_n \in \mathcal{H}_\sigma$ tale che $\mu(I_n) > s - \dfrac{1}{n}$. Poniamo $I^* = \bigcup_n I_n$. Risulta ovviamente $\mu(I^*)=s$.

Per come è stato costruito l'insieme I^*, esso è riunione numerabile di insiemi di $\mathcal{H}$: $I^* = \bigcup_m H_m$. Sia G_m tale che $G_m \supset H_m$ e proviamo che

$$\bigcup_m G_m \cap A \backsim A \cap E.$$

(3) Questo lemma estende un teorema dovuto a J. L. Kelley ([2], teorema 1) rinunciando all'ipotesi che $\mathcal{G}$ sia un σ-ideale ed alla localizzabilità della misura, supponendo solo che E sia l'estremo superiore di $\mathcal{G}$ in $\mathcal{A}/\backsim$.

Intanto $\bigcup_m G_m \cap A \leq A \cap E$. Resta da provare la disuguaglianza opposta, cioè che $\mu(A \cap E - A \cap \bigcup_m G_m) = 0$.

Osserviamo a questo punto che se B è un sottoinsieme misurabile di $A \cap E$, tale che $\mu(B) > 0$, esiste un $G \in \mathcal{G}$ tale che $\mu(B \cap G) > 0$. Posto infatti $F = E - B$, risulta $\mu(E - F) = \mu(B) > 0$ e quindi, per la (12), esiste un G tale che $\mu(G - F) > 0$. Ma essendo $G - F = G - (E - B) = (G - E) \cup (G \cap B)$ ed anche $\mu(G - E) = 0$, risulta $\mu(G \cap B) > 0$.

Ritorniamo ora alla dimostrazione dell'uguaglianza

$$\mu(A \cap E - A \cap \bigcup_m G_m) = 0.$$

Posto $B = E - \bigcup_m G_m$, e supposto

$$\mu(A \cap E - A \cap \bigcup_m G_m) = \mu(A \cap (E - \bigcup_m G_m)) > 0,$$

esiste per quanto dimostrato prima, un $H \in \mathcal{H}$ $(H = G \cap B)$ tale che $\mu(H) > 0$ e $H \subset A \cap (E - \bigcup_m G_m)$. Ma allora $H \cup I^* \subset A \cap E$, quindi $H \cup I^* \in \mathcal{H}_\sigma$. D'altro canto è $H \cap I^* = \emptyset$ e ciò comporta che $\mu(H \cup I^*) = \mu(H) + \mu(I^*) = \mu(H) + s > s$. Ma ciò va contro la definizione di s. La contraddizione proviene dall'aver supposto non nulla la quantità $\mu(A \cap E - A \cap \bigcup_m G_m)$. Essendo nulla, si ha la tesi.

Con tecniche standard si può estendere il lemma al caso che A abbia misura σ-finita.

LEMMA 2.4. *Sia $\mathcal{G}$ una collezione di insiemi sommabili e sia A il suo estremo superiore in $\mathcal{A}/\backsim$. Se $H \in S$ è tale che $\mu^*(G - H) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$, allora risulta $\mu^*(A - H) = 0$.*

Se H è misurabile, non c'è nulla da provare. Supponiamo allora che H non sia misurabile. Ovviamente possiamo supporre che $H \subset A$. Nel caso contrario potremmo sempre prendere $H \cap A$ invece di H. Se fosse $\mu^*(E \cap (A - H)) = 0$ per ogni insieme sommabile E, allora l'insieme $A - H$ e quindi anche H sarebbero misurabili per il lemma 2.2. Avendo noi supposto il contrario, esiste un insieme sommabile E tale che $\mu^*(E \cap (A - H)) > 0$. Essendo $E \cap A$ sommabile, esiste per il lemma precedente una successione di insiemi di $\mathcal{G}$, $\{G_m\}$ tale che, posto $E_m = G_m \cap A$, risulta

$$\bigcup_m E_m \backsim E \cap A.$$

Risulta allora $\mu^*(\bigcup_m E_m - H) > 0$. Ma essendo

$$\mu^*(\bigcup_m E_m - H) \leq \sum_1^\infty m(E_m - H),$$

esiste almeno un $m \in \mathfrak{N}$ tale che $\mu^*(E_m - H) > 0$. Poiché $G_m \supset E_m$, risulta anche $\mu^*(G_m - H) > 0$, contro l'ipotesi fatta su H.

Quanto provato nel lemma precedente si può equivalentemente esprimere nella maniera seguente: se per un sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathcal{S}/\sim$ esiste, tra gli elementi di $\mathcal{A}/\sim$ un minimo seguente $\bar{u}$, allora ogni maggiorante di $\mathcal{U}$ in $2^S/\sim$ è maggiore di $\bar{u}$ o ancora, se $\mathcal{U}$ ammette estremo superiore in $\mathcal{A}/\sim$, allora ammette (lo stesso!) estremo superiore anche in $2^S/\sim$.

I risultati dei lemmi 2.1 e 2.4 portano al seguente teorema:

TEOREMA 2.5. *La misura μ generata dalla misura esterna μ^* è localizzabile se e solo se ogni sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathcal{S}/\sim$ ammette estremo superiore in $2^S/\sim$.*

Supponiamo infatti che ogni $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}/\sim$ ammetta estremo superiore in $2^S/\sim$. Per il lemma 2.1 questi è individuato da un insieme misurabile, quindi ogni $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}/\sim$ ammette estremo superiore in $\mathcal{A}/\sim$.

Viceversa, supponiamo che la μ sia localizzabile: allora ogni $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}/\sim$ ammette un minimo maggiorante $\bar{u}$ in $\mathcal{A}/\sim$. Ma per il lemma 2.4, $\bar{u}$ è l'estremo superiore di $\mathcal{U}$ in $2^S/\sim$.

3. In questo paragrafo ci occuperemo delle misure esterne che generano misure semifinite. Per pervenire ad una loro caratterizzazione, dobbiamo premettere alcuni lemmi.

LEMMA 3.1. *Se μ^* genera una misura semifinita, $T \subset S$ è tale che $\mu^*(T) > 0$, allora esiste un insieme sommabile E tale che $\mu^*(E \cap T) > 0$.*

Se T è misurabile, la tesi è ovvia. Se T non è misurabile e se supponiamo non vera la tesi, si ha che $\bar{\mu}^*(T) = 0$, ma allora è anche $\mu^*(T) = 0$, contro l'ipotesi.

LEMMA 3.2. *Se $\{H_n\}$ è una successione di insiemi (non necessariamente misurabili) ed esiste una successione di insiemi misurabili $\{A_n\}$ tale che $H_n \subset A_n$ ed inoltre $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ se $n \neq m$, allora risulta*

$$\mu^*(\bigcup_n H_n) = \sum_1^\infty {}_n\, \mu^*(H_n).$$

Proviamo intanto la tesi nel caso particolare che $H_n = \emptyset$ per ogni n maggiore di 2. Risulta

$$\mu^*(H_1 \cup H_2) = \mu^*((H_1 \cup H_2) \cap A_1) + \mu^*((H_1 \cup H_2) \cap \complement A_1) =$$
$$= \mu^*(H_1) + \mu^*(H_2).$$

Sia ora $H_n = \emptyset$ per ogni n maggiore di m. La tesi si ottiene ragionando per induzione: posto $\overline{H}_{m-1} = H_{m-1} \cup H_m$, risulta

$$\mu^*(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m) = \sum_1^{m-2}{}_n \, \mu^*(H_n) + \mu^*(H_{m-1} \cup H_m).$$

Ma l'ultimo addendo è uguale a $\mu^*(H_{m-1}) + \mu^*(H_m)$ per quanto dimostrato prima.

Dimostriamo infine la tesi del lemma. Risulta intanto

$$\mu^*(\bigcup_n H_n) \leq \sum_1^{\infty}{}_n \, \mu^*(H_n).$$

Per invertire l'uguaglianza basta osservare che si ha per ogni m

$$\mu^*(\bigcup_n H_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_1^m{}_n H_n\right) = \sum_1^m{}_n \, \mu^*(H_n)$$

e quindi anche

$$\mu^*(\bigcup_n H_n) \geq \sum_1^{\infty}{}_n \, \mu^*(H_n).$$

Siamo ora in grado di provare una condizione necessaria affinché una misura esterna μ^* generi una misura semifinita.

TEOREMA 3.3. *Se μ^* genera una misura semifinita, allora ogni insieme $H \subset S$ tale che $\mu^*(H) < +\infty$ è contenuto in un insieme misurabile avente misura σ-finita.*

Sia $\{A_\alpha\}$ una collezione di insiemi sommabili tali che

(13) $$\mu(A_\alpha \cap A_\beta) = 0 \quad \text{se} \quad \alpha \neq \beta$$

(14) $$\mu(E \cap A_\alpha) = 0, \ \forall \alpha \Longrightarrow \mu(E) = 0.$$

Una tale collezione (almeno) esiste (vedasi [6], p. 259). Consideriamo ora l'insieme I di quegli indici α per cui risulta $\mu^*(A_\alpha \cap H) > 0$.

Se $I_n = \left\{\alpha : \mu^*(A_\alpha \cap H) \geq \frac{1}{n}\right\}$, risulta ovviamente $I = \bigcup_n I_n$. Si noti ora che I_n è un insieme finito, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se così non fosse, risulterebbe, per il lemma 3.2 $\mu^*(H) = +\infty$. Quindi I è al più numerabile. Posto ora $A = H \cup (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$, risulta che A è misurabile, $H \subset A$ ed A ha misura σ-finita.

OSSERVAZIONE. Non è detto che l'insieme A del teorema precedente possa avere, in generale, misura finita. Si consideri infatti il seguente esempio. Sia $S = \mathbb{N}$, $S_n = \{3n-2, 3n-1, 3n\}$; $n = 1, 2, \ldots$. Definiamo $\mu^*(S_n) = 1$, $\mu^*(E) = \frac{1}{2^n}$ se E è un sottoinsieme proprio e non vuoto di S_n. Per ogni $E \subset S$ si definisca poi $\mu^*(E) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \mu^*(E \cap S_n)$. Si controlla facilmente che gli insiemi misurabili sono tutte e sole le riunioni finite o numerabili degli S_n. La misura è σ-finita, quindi semifinita. L'insieme $H = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$ ha misura esterna uguale ad uno, mentre l'unico insieme misurabile che lo contiene è S, che ha misura infinita (ma comunque σ-finita!).

Siamo ora in grado di caratterizzare le misure esterne che generano misure semifinite.

TEOREMA 3.4. *Una misura esterna μ^* genera una misura semifinita se e soltanto se sono verificate contemporaneamente le seguenti due proprietà:*

(*a*) $\forall\, H \subset S$: $\mu^*(H) < +\infty$, $\exists\, A(H) \in \mathscr{A}$: $A(H) \supset H$, $A(H)$ *ha misura σ-finita*;

(*b*) *se $\mu^*(H) = +\infty$, allora esiste $F \subset H$: $0 < \mu^*(F) < +\infty$.*

Se la misura esterna genera una misura semifinita, la (*a*) è verificata per il teorema 3.3. Facciamo vedere che è verificata anche la (*b*). Se H è misurabile, la corsa è ovvia. Se non è misurabile esiste, per il lemma 3.1, un insieme sommabile E tale che $\mu^*(E \cap H) > 0$. Essendo inoltre $\mu^*(E \cap H) \leq \mu(E) < +\infty$, si ha la tesi, ponendo $F = E \cap H$.

Proviamo ora il viceversa. Supponiamo che siano verificate la (*a*) e la (*b*) e proviamo che la μ è semifinita. Sia B misurabile e tale che $\mu(B) = +\infty$. Per la (*b*) esiste $F \subset S$ tale che $F \subset B$, $0 < \mu^*(F) < +\infty$. Per la (*a*) esiste un insieme $A(F)$ misurabile ed avente misura σ-finita, tale che $A(F) \supset F$. L'insieme $B \cap A(F)$ è misurabile, contiene F ed ha misura σ-finita. Inoltre ha misura non nulla, poiché $\mu(B \cap A(F)) \geq \mu^*(F) > 0$. Avendo misura σ-finita, esiste un insieme sommabile non nullo contenuto in $B \cap A$ (F) e quindi in B. Con ciò abbiamo provato che ogni insieme misurabile avente misura infinita contiene un insieme sommabile non nullo. Ma ciò equivale alla semifinitezza della misura (4).

4. Nel paragrafo 2 abbiamo visto che una misura esterna genera una misura localizzabile, se ogni sottoinsieme $\mathcal{U}$ di $\mathcal{S}/\sim$ ammette estremo superiore in $2^S/\sim$. Se poi la misura generata è anche semifinita, è facile provare che ogni sottoinsieme $\mathcal{V}$ di $\mathcal{A}/\sim$ ammette estremo superiore in $2^S/\sim$ ed anche che il reticolo $\mathcal{A}/\sim$ è completo.

Che cosa si può dire in generale della completezza di $2^S/\sim$? Mostreremo con due esempi che questo reticolo non è, in generale, completo. In particolare, con il secondo esempio mostreremo (facendo uso dell'ipotesi del continuo) che anche per la misura di Lebesgue sull'intervallo $[0,1]$, $2^S/\sim$ non è completo.

Premettiamo due lemmi.

LEMMA 4.1. *Un insieme* $E \subset [0,1]$ *ha misura esterna (di Lebesgue) uno se e solo se* $E \cap P \neq \emptyset$, *per ogni insieme perfetto* P *avente misura positiva.*

« Se »: supponiamo per assurdo che $\mu^*(E) < 1$. Esiste allora un aperto $A \supset E$ tale che $\mu(A) < 1$. Il complementare di A è chiuso ed allora, per il teorema di Cantor-Bendixon, risulta $\complement A = P \cup N$, dove N è numerabile e P perfetto. Risulta inoltre $\mu(P) = \mu(P \cup N) = \mu(\complement A) = 1 - \mu(A) > 0$, *ma* è anche $P \cap E \neq \emptyset$.

« Solo se »: ovviamente se esiste un perfetto P contenuto in $[0,1]$ tale che $P \cap E = \emptyset$, $\mu(P) > 0$, allora risulta $\mu^*(E) \leq \mu(\complement P) = 1 - \mu(P) < 1$.

LEMMA 4.2. *Se* $E \subset [0,1]$, $\mu^*(E) = 1$ *e se* P *è un perfetto avente misura positiva, allora* card $(E \cap P) = 2^{\aleph_0}$.

Sia P un perfetto di misura positiva. Risulta $\mu^*(E \cap P) = \mu(P)$, infatti nel caso contrario si avrebbe (per la misurabilità di P):

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \cap \complement P) < \mu(P) + \mu(\complement P) = 1.$$

Risulta quindi $\mu^*(E \cap P) > 0$, quindi $E \cap P$ non è numerabile. L'ipotesi del continuo ci dà la tesi.

(4) Vedasi [6] § 34, teorema 2.

ESEMPIO 1. (5). Sia $S=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R},\ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$. Per ogni sottoinsieme E dell'intervallo $[0,1]$, sia $\hat{E}=\{(x,y): x\in E, y\in[0,1]\}$. Sia $\mathcal{A}$ la collezione degli insiemi $\hat{E}$ corrispondenti agli insiemi misurabili secondo Lebesgue di $[0,1]$. Per ogni $\hat{E}\in\mathcal{A}$ sia poi $\mu(\hat{E})$ uguale alla misura di Lebesgue di $\{x: x\in[0,1], (x,y)\in\hat{E}\}$. Sia $\mathcal{H}$ la collezione di insiemi non misurabili $H_a=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, y=a\}$. Proviamo che questa collezione non ammette estremo superiore in $2^S/\backsim$. Indichiamo con $\mathcal{P}$ la collezione degli insiemi perfetti in $[0,1]$, aventi misura non nulla. Risulta card $\mathcal{P}=$ card $[0,1]$. Sia $a\mapsto P_a$ una applicazione iniettiva di $[0,1]$ su $\mathcal{P}$. Supponiamo ora per assurdo che E sia l'estremo superiore di $\mathcal{H}$ in $2^S/\backsim$. Poiché risulta $\mu^*(H_a-E)=0$, la proiezione di H_a-E su $[0,1]$ ha misura di Lebesgue nulla, quindi esiste, per il lemma 4.1, un punto $x_a\in P_a$ tale che $(x_a,a)\in H_a\cap E$.

Poniamo ora $F=E-\{(x_a,a), a\in[0,1]\}$. Risulta ancora $\mu^*(H_a-F)=0$ per ogni a (poiché H_a-F differisce da H_a-E di un solo punto), mentre si ha che $\mu^*(E-F)=\mu^*(\{(x_a,a); a\in[0,1]\})=1$, per il lemma 4.1.

ESEMPIO 2. (6) Indichiamo ancora con $\mathcal{P}$ la collezione degli insiemi perfetti di $[0,1]$ che hanno misura non nulla. Indichiamo con Γ il più piccolo numero ordinale avente cardinalità $\mathfrak{c}$ (del continuo). La collezione $\mathcal{P}$ si può bene ordinare, in modo che ciascun $P\in\mathcal{P}$ compaia $\mathfrak{c}$ volte nel buon ordinamento:

$$P_1, P_2, \dots, P_\omega, \dots, P_\alpha, \dots; \quad \alpha<\Gamma.$$

Sia poi

$$x_1, x_2, \dots, x_\omega, \dots, x_\alpha, \dots; \quad \alpha<\Gamma, \tag{15}$$

un buon ordinamento dei punti di $[0,1]$.

Sia p_1 il primo dei punti nel buon ordinamento (15) che appartengono a P_1; p_2 sia il primo, diverso da p_1, appartenente a P_2, e così via: per ogni ordinale $\alpha<\Gamma$ sia p_α il primo dei punti della successione (15), diverso dai p_β per $\beta<\alpha$ ed appartenente a P . Un siffatto p_α esiste

(5) L'esempio di spazio mensurale è stato tratto da [1] cap. III, es. 16.4.

(6) La costruzione della collezione avente cardinalità $\aleph_1$ di insiemi non misurabili e disgiunti di [0,1] è tratta da [3]. Sin d'ora facciamo l'ipotesi che $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

sempre, poiché

$$\aleph_1 = \operatorname{card} P_\alpha > \operatorname{card} \{p_1, p_2 \dots p_\beta;\ \beta < \alpha\} = \aleph_0 .$$

Abbiamo così ottenuto un insieme bene-ordinato di punti di [0,1]:

$$p_1, p_2, \dots, p_\omega, \dots, p_\alpha, \dots, \quad \alpha < \Gamma.$$

Sia ora $P \in \mathcal{P}$: ad esso restano associati gli indici

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\omega, \dots, \alpha_\beta, \dots, \quad \beta < \Gamma,$$

per cui risulta $P = P_{\alpha_\beta}$. Facciamo la posizione $p_{\alpha_\beta} = q_\beta(P)$. Ad ogni $P \in \mathcal{P}$ corrisponde dunque un insieme bene-ordinato di punti tra loro distinti ed appartenenti a P

(16) $$q_1(P),\ q_2(P), \dots, q_\omega(P), \dots, q_\beta(P), \dots \quad \beta < \Gamma.$$

L'insieme $\{q_\beta(P);\ \beta < \Gamma\}$ è un sottoinsieme di P. Si noti che a perfetti di $\mathcal{P}$ diversi corrispondono sotttoinsiemi *disgiunti.*

Notiamo ora che l'insieme $Q_\beta = \{q_\beta(P);\ P \in \mathcal{P}\}$ non è misurabile secondo Lebesgue, qualunque sia $\beta < \Gamma$. Infatti, poiché contiene almeno un punto di ogni $P \in \mathcal{P}$, esso ha misura esterna uguale ad uno. Inoltre, per la stessa ragione, anche il suo complementare ha misura esterna uguale ad uno, quindi la misura interna di Q_β è uguale a zero.

Proviamo ora che la collezione $\{Q_\beta;\ \beta < \Gamma\}$ non ammette estremo superiore in $2^S/\sim$ ($S = [0,1]$).

Supponiamo per assurdo che esista un insieme $E \subset [0,1]$, tale che

(17) $$\mu^*(Q_\beta - E) = 0, \qquad \forall\, \beta < \Gamma,$$

(18) $$\mu^*(Q_\beta - F) = 0, \qquad \forall\, \beta < \Gamma \Longrightarrow \mu^*(E - F) = 0.$$

Dalla (17) si deduce che $\mu^*(E) = 1$ e quindi, per il lemma 4.2, contiene $\mathfrak{c}$ punti di ogni perfetto appartenente a $\mathcal{P}$. Esiste un primo punto tra quelli elencati in (16), corrispondente all'indice $\beta = \gamma_1$, tale che $s_1 = q_{\gamma_1}(P_1) \in E$. Esiste poi un primo punto $s_2 = q_{\gamma_2}(P_2)$, diverso da s_1, tale che $s_2 \in E$. In corrispondenza all'ordinale $\alpha < \Gamma$ sia $s_\alpha = q_{\gamma_\alpha}(P_\alpha)$ il primo tra quelli elencati in (16), diverso dai precedenti ed apparentemente ad E. Questa scelta è sempre possibile, poiché risulta

$$\operatorname{card} E \cap P_\alpha > \operatorname{card} \{s_\beta,\ \beta < \alpha\}.$$

Sia ora $F=E-\{s_\alpha, \alpha<\Gamma\}$. L'insieme $Q_\beta-E$ differisce da $Q^\beta-F$ di un punto, al più, (i due insiemi sono uguali, se $\beta\notin\{\gamma_\alpha; \alpha<\Gamma\}$, differiscono di $\{s_\beta\}$ se $\beta\in\{\gamma_\alpha . \alpha<\Gamma\}$). Risulta perciò $\mu^*(Q_\beta-F)=$ $=\mu^*(Q_\beta-E)=0$, $\forall\, \beta\in\Gamma$. D'altro canto l'insieme $E-F=\{s_\alpha, \alpha<\Gamma\}$ contiene almeno un punto per ogni $P\in\mathcal{P}$. Per il lemma 4.1 risulta quindi $\mu^*(E-F)=1$, in contrasto con la (18). Quindi la collezione $\{Q_\beta, \beta<\Gamma\}$ non ammette estremo superiore.

5. In questo paragrafo ci occuperemo del concetto di involucro misurabile di un insieme. I risultati che conseguiremo presentano due novità rispetto a quanto è possibile reperire nella letteratura: una consiste nella richiesta più blanda che facciamo sulla misura μ (semifinita o localizzabile o entrambe le cose, ma non necessariamente σ-finita); l'altra consiste nel non richiedere la regolarità della misura esterna. La stessa definizione di involucro misurabile (vedasi [1], cap. III, § 12) prende in questo contesto un altro significato, pur rimanendo formalmente la stessa.

DEFINIZIONE. *Se $H\subset S$, diremo che $M(H)$ è l'involucro misurabile di H, se $M(H)$ è misurabile, se $H\subset M(H)$ e se per ogni insieme misurabile A contenuto in $M(H)-H$, risulta $\mu(A)=0$, ovvero se E è misurabile e contiene H, allora $E\geq M(H)$.*

È ben noto che se la misura è regolare e σ-finita, ogni insieme ammette involucro misurabile e che se la misura è regolare, ogni insieme avente misura esterna finita o σ-finita ammette involucro misurabile. Noi proveremo che se la misura esterna genera una misura semifinita e localizzabile, ogni insieme ammette involucro misurabile e che se la misura esterna (non necessariamente regolare) genera una misura semifinita, ogni insieme avente misura esterna σ-finita ammette involucro misurabile.

Si noti che se la misura esterna è regolare e se $M(H)$ esiste, risulta sempre $\mu(M(H))=\mu^*(H)$, mentre per le misure esterne non regolari questa uguaglianza può non aver luogo, pur esistendo $M(H)$; è pur sempre però $\mu(M(H))\geq\mu^*(H)$.

Osserviamo ancora che se $H\subset S$ ammette involucro misurabile $M(H)$, allora risulta

$$M(H)=\sup \mathcal{M}(H),$$

dove

$$\mathcal{M}(H)=\}F:\ F\in\mathcal{A};\ \forall\, M\in\mathcal{A}:\ M\supset H\Longrightarrow \mu(F-M)=0\{;$$

per provarlo basta verificare che

$$F \in \overline{\mathcal{M}}(H) \Longleftrightarrow \mu(F - M(H)) = 0.$$

Se la misura esterna μ^* genera una misura semifinita, allora è anche

$$M(H) = \sup \mathcal{M}(H),$$

dove

$$\mathcal{M}(H) = \{K: K \in \mathcal{S};\ \forall\, M \in \mathcal{A}: M \supset H \Longrightarrow \mu(K - M) = 0\}.$$

Infatti siccome ogni elemento di $\overline{\mathcal{M}}(H)$ è l'estremo superiore di una sottocollezione di $\mathcal{M}(H)$ ([6] § 34, teorema 2), le due collezioni hanno lo stesso estremo superiore.

Si intuisce da queste osservazioni quale sia il legame tra la localizzabilità e la semifinitezza da un lato e l'esistenza dell'involucro misurabile dall'altro. La collezione $\mathcal{M}(H)$, che può definirsi anche senza supporre l'esistenza dell'involucro misurabile, ci consentirà, nelle ipotesi più favorevoli, di individuare l'involucro misurabile oltre a dimostrarne l'esistenza.

TEOREMA 5.1. *Se la μ^* genera una misura semifinita e se $\mu^*(H) < +\infty$, allora esiste l'involucro misurabile di H.*

Per il teorema 3.3 H è contenuto in un insieme misurabile A avente misura σ-finita. Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi sommabili, a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_n A_n = A$. Fissato l'intero n si ponga $\lambda_n = \inf\{\mu(E); E \supset H \cap A_n, E \in \mathcal{A}\}$. Ovviamente è $\lambda_n \leq \mu(A_n) < +\infty$. Per ogni $k \in \mathfrak{N}$ esiste un insieme E_k^n tale che $E_k^n \supset H \cap A_n$ e

$$\mu(E_k^n) \leq \lambda_n + \frac{1}{k}.$$

Non è restrittivo supporre che $E^n_{k+1} \subset E_k^n$. Posto allora $E_n = \bigcap_k E_k^n$, risulta $\mu(E_n) = \lambda_n$. Dimostriamo ora che $M(H) = \bigcup_n E_n$ è l'involucro misurabile di H. Evidentemente risulta $H \subset M(H)$. Resta da dimostrare che se F è misurabile ed è contenuto in $M(H) - H$, allora è $\mu(F) = 0$.

Supponiamo per assurdo che esista un insieme F, misurabile e contenuto in $M(H) - H$, tale che $\mu(F) > 0$. Allora è anche $F \subset M(H)$ ed esiste perciò un intero n tale che $\mu(F \cap E_n) > 0$. Ma allora l'insieme

$\bar{E}_n = E_n - F$ contiene $H \cap A_n$ ed inoltre

$$\mu(\bar{E}_n) = \mu(E_n) - \mu(E_n \cap F) = \lambda_n - \mu(E_n \cap F) < \lambda_n,$$

e ciò contraddice la definizione di λ_n. Dall'assurdo segue la tesi.

OSSERVAZIONE. L'esempio riportato a seguito del teorema 3.3 mostra che può essere $\mu^*(H) < +\infty$ e $\mu(M(H)) = +\infty$ ($M(H)$ ha comunque misura σ-finita).

Con tecniche ovvie si estende il teorema precedente al caso che H abbia misura esterna σ-finita.

LEMMA 5.2. *Se la misura esterna genera una misura semifinita, e se $\mu^*(H) > 0$, allora $\mathcal{M}(H)$ contiene insiemi non nulli.*

Per il lemma 3.1 esiste un insieme sommabile E, tale che $\mu^*(E \cap H) > 0$. Sia poi

$$\lambda = \inf\{\mu(K);\ K \in \mathcal{A},\ E \supset K \supset E \cap H\}.$$

Risulta ovviamente $0 < \mu^*(E \cap H) \leq \lambda \leq \mu(E) < +\infty$. Sia ora $K_n \in \mathcal{A}$, $K_n \subset E$ tale che $\mu(K_n) \leq \lambda + \frac{1}{n}$. Posto $K_0 = \bigcap_n K_n$, risulta $\mu(K_0) = \lambda$ e $E \cap H \subset K_0 \subset E$. Sia ora M un qualunque insieme misurabile contenente H. Proviamo che è $\mu(K_0 - M) = 0$, cioè che $K_0 \in \mathcal{M}(H)$.

Se fosse $\mu(K_0 - M) > 0$, allora si avrebbe che $E \cap H \subset K_0 \cap M \subset E$ ed inoltre

$$\mu(K_0 \cap M) = \mu(K_0) - \mu(K_0 - M) < \mu(K_0) = \lambda,$$

contro la definizione di λ. Dall'assurdo segue la tesi.

Se la misura esterna μ^* genera una misura localizzabile, la collezione $\mathcal{M}(H)$ ammette estremo superiore in $\mathcal{A}/\backsim$, che indicheremo con $M_*(H)$. Vale il seguente teorema.

TEOREMA 5.3. *Se la misura esterna μ^* genera una misura localizzabile e se $H \subset S$, allora per ogni insieme sommabile E contenuto in $M_*(H) - H$ risulta $\mu(E) = 0$.*

Se così non fosse, $\bar{M} = M_*(H) - E$ sarebbe una maggiorazione superiore della collezione $\mathcal{M}(H)$, pur essendo $\mu(M - M_*(H)) = \mu(E) > 0$.

Un insieme misurabile M contenente H e tale che

$$E \subset M - H,\quad \mu(E) < +\infty \Longrightarrow \mu(E) = 0$$

verrà detto *pseudoinvolucro misurabile* di H.

Se la μ^* genera una misura localizzabile, il pseudoinvolucro esiste ed è unico a meno di insiemi localmente nulli.

TEOREMA 5.4. *Se la misura esterna μ^* genera una misura localizzabile allora essa è semifinita se e solo se per ogni $H \subset S$ ogni pseudoinvolucro misurabile è un involucro misurabile.*

Se la μ è semifinita, allora se $F \subset M\,(H) - H$, non può essere $\mu\,(F) > 0$, infatti se così fosse, esisterebbe un $E \subset F$ tale che $0 < \mu\,(E) < +\infty$, contro la definizione di pseudoinvolucro.

Per il viceversa, si noti che un insieme localmente nullo è uno pseudoinvolucro dell'insieme vuoto: ma è anche, per ipotesi, un involucro misurabile. Essendo poi l'involucro misurabile unico a meno di insiemi nulli ed essendo un insieme nullo evidentemente un involucro misurabile di $\emptyset$, ogni insieme localmente nullo è nullo, ciò che implica che la misura è semifinita.

Per quanto provato nel teorema precedente possiamo dunque asserire che se μ^* verifica le condizioni (*a*) e (*b*) del teorema 3.4 (e quindi genera una misura semifinita) e se genera una misura localizzabile, allora ogni insieme ammette involucro misurabile, che si identifica con l'estremo superiore della collezione $\mathcal{M}\,(H)$.

Servendoci del concetto di involucro misurabile, siamo ora in grado di dare una nuova caratterizzazione delle misure esterne semifinite che generano una misura localizzabile.

TEOREMA 5.5. *Se la μ^* verifica le condizioni (a) e (b) del teorema 3.4, allora essa genera una misura localizzabile se e solo se per ogni collezione $\mathcal{H}$ di insiemi aventi misura esterna finita, esiste un insieme misurabile A, tale che*

(19) $$\mu^*(H - A) = 0, \qquad \forall\, H \in \mathcal{H},$$

(20) $$B \in \mathcal{A},\ \mu^*(H - B) = 0, \qquad \forall\, H \in \mathcal{H} \Longrightarrow \mu\,(A - B) = 0.$$

Le condizioni (19) e (20) implicano ovviamente che la misura generata da μ^* è localizzabile: se infatti gli insiemi di $\mathcal{H}$ sono, in particolare, tutti misurabili, le due condizioni danno esattamente la definizione di localizzabilità.

Viceversa, se la misura generata è localizzabile, esiste per i teoremi 5.3 e 5.4 l'involucro misurabile $M\,(H)$ di ogni $H \in \mathcal{H}$. Sia A l'estremo superiore della collezione $\{M\,(H);\ H \in \mathcal{H}\}$. Questo insieme verifica ovviamente la (19). Sia poi B un altro insieme misurabile che verifica la (19). B contiene quasi tutto H, qualunque sia $H \in \mathcal{H}$. Per definizione di involucro misurabile si ha allora che $\mu(M(H)-B)=0$ per ogni $H \in \mathcal{H}$ e quindi, per come è stato definito A, risulta $\mu(A-B)=0$, cioè la tesi.

In altre parole il teorema 5.5 stabilisce, nelle ipotesi dette, che la misura generata è localizzabile se e solo se per ogni insieme $\mathcal{U} \subset 2^S/\backsim$ esiste in $\mathcal{A}/\backsim$ un maggiorante più piccolo di ogni altro maggiorante appartenente ad $\mathcal{A}/\backsim$.

Un'altra caratterizzazione delle misure esterne che generano misure localizzabili è dato dal teorema seguente.

TEOREMA 5.6. *Se μ^* verifica le collezioni (a) e (b) del teorema 3.4, allora la misura generata è localizzabile se e solo se per ogni collezione $\mathcal{H}$ di sottoinsiemi di S esiste un insieme misurabile A tale che*

$$\mu^*(H - A) = 0, \qquad \forall\, H \in \mathcal{H}, \tag{21}$$

$$B \in \mathcal{A},\ \mu^*(H - B) = 0, \qquad \forall\, H \in \mathcal{H} \Longrightarrow \mu(A - B) = 0. \tag{22}$$

Ovviamente se le due condizioni (21) e (22) sono verificate, la misura generata è localizzabile.

Viceversa, per i teoremi 5.3 e 5.4 esiste, per ogni $H \in \mathcal{H}$, l'involucro misurabile $M(H)$. La collezione $\{M(H);\ H \in \mathcal{H}\}$ ammette estremo superiore ([6] § 35 es. 1) che indichiamo con A. Ora si può ripetere il ragionamento fatto nel teorema precedente.

Avvalendosi dei risultati ora conseguiti, possiamo dimostrare il seguente teorema, che estende ulteriormente il già citato e già esteso teorema di Kelley.

TEOREMA 5.7. *Se μ^* soddisfa alle condizioni (a) e (b) del teorema 3.4, se $\mathcal{G}$ è una collezione di insiemi sommabili, di cui E è l'estremo superiore e se $H \subset S$ è tale che $\mu^*(H) < +\infty$, allora esiste una successione di insiemi $\{G_m\}$ di $\mathcal{G}$, tale che*

$$\bigcup_m G_m \cap H \backsim E \cap H.$$

L'involucro misurabile di H, $M(H)$, ha misura σ-finita. Esiste quindi una successione di insiemi $\{G_m\}$ appartenenti a $\mathcal{G}$ tale che

$$\bigcup_m G_m \cap M(H) \backsim E \cap M(H).$$

Poiché risulta

$$\mu^*(E\cap H-\bigcup_m G_m\cap H)=\mu^*(H\cap(E-\bigcup_m G_m))\leq$$
$$\leq\mu(M(H)\cap(E-\bigcup_m G_m))=0,$$

ed anche $\mu^*(H\cap(\bigcup_m G_m-E))=0$, si ha la tesi.

Facciamo ora alcune considerazioni che hanno carattere del tutto generale e che noi utilizzeremo nel successivo esempio.

DEFINIZIONE. Diremo che un insieme misurabile A è un *atomo sommabile,* se risulta

(23) $$0<\mu(A)<+\infty$$

(24) $$E\in\mathcal{A},\ E\subset A,\ \mu(E)>0\Longrightarrow\mu(E)=\mu(A).$$

Sia ora $H\subset S$, $M(H)$ il suo involucro misurabile ed A un insieme misurabile qualunque.

Risulta allora $\mu(A\cap M(H))=0$ se e solo se $\mu^*(A\cap H)=0$. Essendo $\mu^*(A\cap H)\leq\mu(A\cap M(H))$, una delle due implicazioni è ovvia. Per l'altra, si noti che se $\mu^*(A\cap H)=0$, allora $M(H)-A$ è ancora un insieme misurabile che ricopre H, ma essendo $M(H)$ il minimo insieme che svolge questa funzione, risulta $\mu(M(H)\cap A)=0$.

Se facciamo anche l'ipotesi che A sia un atomo sommabile, allora si ha che $A\leq M(H)$ se e solo se $\mu^*(A\cap H)>0$.

Se $A\leq M(H)$, risulta $\mu(A\cap M(H))>0$ e quindi $\mu^*(A\cap H)>0$ per quanto provato prima. Viceversa, se è $\mu^*(A\cap H)>0$ è anche $\mu(A\cap M(H))>0$ e perciò $E=A\cap M(H)$ è un insieme sommabile contenuto in A ed avente misura non nulla. Per l'ipotesi fatta su A, risulta $\mu(A\cap M(H))=\mu(A)$ e perciò

$$\mu(A-M(H))=\mu(A-A\cap M(H))=\mu(A)-\mu(A\cap M(H))=0.$$

cioè $A\leq M(H)$.

Mostriamo ora con un esempio che non ogni insieme ammette involucro misurabile.

ESEMPIO (7). Siano S_1 ed S_2 due insiemi infiniti tali che $\aleph_0<\operatorname{card}S_1=\alpha<\operatorname{card}S_2=\beta$. Sia $S=S_1\times S_2$. Conveniamo di chiamare « linee oriz-

(7) L'esempio di spazio mensurale è dovuto a P. R. Halmos ([1] § 31, es. 9). Per ulteriori dettagli sull'esempio si veda anche [4].

zontali » gli insiemi del tipo (x, y_0) con $y_0 \in S$ fissato ed x arbitrario in S_1; analogamente si chiameranno « linee verticali » gli insiemi del tipo (x_0, y). Sia $\mathscr{A}$ la σ-algebra di quei sottoinsiemi A di S tali che $L \cap A$ oppure $L - A$ è al più numerabile per ogni linea orizzontale o verticale. Conveniamo di chiamare « ombra di A su S_1 » $(A \subset S)$ l'insieme A/S_1 dei punti $\bar{x} \in S_1$ tali che $(\bar{x}, y) \cap A$ è più che numerabile. Se $A \in \mathscr{A}$, questa intersezione ha cardinalità β per ogni $\bar{x} \in A/S_1$. Analogamente chiameremo « ombra di A su S_2 » (in simboli A/S_2) l'insieme dei punti $\bar{y} \in S_2$, tali che $(x, \bar{y}) \cap A$ è più che numerabile. Se $A \in \mathscr{A}$, $(x, \bar{y}) \cap A$ ha cardinalità α per ogni $\bar{y} \in A/S_2$. Definiamo ora su $\mathscr{A}$ le seguenti due misure:

$$\sigma(A) = \text{numero dei punti di } A/S_1, \text{ se } A/S_1 \text{ è finito, } +\infty \text{ altrimenti}$$

$$\rho(A) = \text{numero dei punti di } A/S_2, \text{ se } A/S_2 \text{ è finito, } +\infty \text{ altrimenti.}$$

Sia infine $\mu = \rho + \sigma$. La misura μ è semifinita, ma non localizzabile, come è stato provato «ante litteram » in [1].

Siano A e B due sottoinsiemi di S_1 tali che $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S_1$, $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B = \alpha$. Poniamo $H = A \times S_2$.

Supponiamo per assurdo che H ammetta involucro misurabile $M(H)$. Le linee verticali ed orizzontali sono, come è facile vedere, degli atomi sommabili per la μ. Poiché ogni linea orizzontale è tale che $\mu^*(H \cap L) = 1$, $M(H)$ deve quasi contenere ogni linea orizzontale e perciò l'insieme $M(H) - H$ ha cardinalità $\beta(\alpha - \aleph_0) = \beta$. D'altro canto per ogni linea verticale $(\bar{x}, y)$ con $\bar{x} \in B$ risulta $\mu^*(H \cap L) = 0$, perciò risulta anche $\mu(M(H) \cap L) = 0$, e quindi $M(H) - H$ ha cardinalità $\alpha\, \aleph_0 = \alpha$. Dall'assurdo segue che H non ammette involucro misurabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] HALMOS, P. R., *Measure theory,* Van Nostrand (1950).

[2] KELLEY, J. L., *Decomposition and representation theorems in measure theory,* Math. Annalen, 163, 89-94 (1966).

[3] SIERPINSKI, W., - LUSIN, N., *Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables,* C. R. Acad. Sci. Paris, 165, 422-424 (1917).

[4] VOLČIČ, A., *Teoremi di decomposizione per misure localizzabili,* Rendiconti di Matematica (2) vol. 6, serie VI, 307-336 (1973).

[5] VOLČIČ, A., *On the measurability of the upper envelope,* presentato al Congresso dell'Unione Matematica Austriaca (Vienna, settembre 1973).

[6] ZAANEN, A. C., *Integration,* North-Holland (1967).