SULLA DIFFERENZIAZIONE DI MISURE (*)

di ALESSIO VOLČIČ (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si confrontano i concetti di derivata, derivata positiva, derivata densa e derivata regolare di una misura rispetto ad un'altra. Si risolvono, tra l'altro, due problemi posti da D. Kölzow e si studia la regola di sostituzione dei differenziali sotto il segno di integrale.*

SUMMARY. - *We compare the concepts of derivative, positive derivative, dense derivative and regular derivative of a measure with respect to another measure. We solve also two problems posed by D. Kölzow and study the substitution rule for the differentials occurring under an integral sign.*

In questo articolo ci interessiamo di alcune questioni che riguardano la differenziazione di misure. L'impostazione che abbiamo scelto è dovuta a D. Kölzow ([3], capitolo II).

Nel paragrafo 1 si approfondisce il concetto di « coppia di misure confrontabili », cioè di coppia di misure sopra uno stesso insieme sostegno, che hanno un dominio di definizione comune sufficientemente significativo e per le quali ha quindi senso parlare di derivata dell'una rispetto all'altra (o, come nell'articolo [8], di singolarità di una rispetto all'altra).

Nel paragrafo 2 si riportano quattro definizioni di derivata di Radon-Nikodym di una misura rispetto ad un'altra (derivata, derivata densa, derivata positiva e derivata regolare). Viene fornita inoltre una dimostrazione diretta di alcune proposizioni già note.

(*) Pervenuto in Redazione il 15 febbraio 1974.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

Nel terzo paragrafo si risponde negativamente (con un controesempio) ad un problema posto da D. Kölzow, dimostrando che non ogni derivata positiva è regolare. Si dimostra inoltre (giustificando così, in un certo senso, la congettura) che per una classe molto vasta di spazi mensurali (precisamente per gli spazi mensurali semifiniti) ogni derivata positiva è regolare.

Nel paragrafo successivo si risolve un analogo problema: si dimostra con un controesempio che non ogni derivata densa è regolare e si dimostra altrersì che se una misura semifinita ammette derivata densa, questa è anche regolare.

Nel paragrafo 5 si caratterizzano gli spazi mensurali in cui vale la versione regolare (densa, positiva) del teorema di Radon-Nikodym, cioè gli spazi in cui ogni misura assolutamente continua ammette derivata regolare (densa, positiva). La caratterizzazione ottenuta risolve un altro problema posto in [3].

Nell'ultimo paragrafo si studia la validità delle formule

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\mu} \quad \text{e} \quad \frac{d\mu}{d\varphi} = 1 \bigg/ \frac{d\varphi}{d\mu},$$

indagando in particolare sulla regolarità (positività, densità) di $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ e di $\dfrac{d\mu}{d\varphi}$.

1. Chiariremo in questo paragrafo che cosa intendiamo per « coppia di misure confrontabili ». Questo concetto è stato già definito nel § 1 di [8].

Nel seguito avremo a che fare con due (o più) misure definite sopra uno stesso insieme sostegno. Naturalmente ciò non vuol dire che abbiamo lo stesso insieme di definizione in 2^S, ovvero che gli insiemi misurabili rispetto ad una delle due misure lo siano anche rispetto all'altra. Questo è, come ben si sa, un caso rarissimo ([1]). D'altro canto le due misure che vogliamo in qualche maniera confrontare, debbono pur avere un insieme di definizione comune sufficientemente significativo. L'ipo-

([1]) Si pensi infatti ad un caso classico: sia μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e sia $\varphi(E) = \varphi$ sia $\int_E f\,d\mu$, dove f è misurabile, non negativa e nulla su un insieme di misura positiva A. Ogni sottoinsieme di A è φ-misurabile, ma ovviamente non è sempre μ-misurabile.

tesi meno restrittiva che si possa fare in proposito è la seguente: due misure le diremo *confrontabili*, se si possono ottenere come prolungamenti alla Carathéodory di due misure definite sopra uno stesso semianello. Questa condizione equivale alla seguente: dette φ e μ le due misure ed $\mathcal{A}_\varphi$ e $\mathcal{A}_\mu$ le due σ-algebre degli insiemi φ-e μ-misurabili, rispettivamente, posto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi \cap \mathcal{A}_\mu$, la restrizione della φ ad $\mathcal{A}$, prolungata alla Carathéodory deve dare la φ su $\mathcal{A}_\varphi$ ed analogamente deve essere per la μ. Diremo anche in questo caso che φ e μ sono *ricostruibili* da $\mathcal{A}$, nel senso che la traccia che lasciano su $\mathcal{A}$ dà informazioni sufficienti per ritrovarle mediante il prolungamento alla Caratéodory.

È in questo senso che va visto l'esempio di Saks (vedasi il paragrafo successivo) in cui la misura di Lebesgue viene messa a confronto con la misura « counting », rispetto alla quale è assolutamente continua. Ma mentre rispetto alla misura « counting » tutti gli insiemi sono misurabili, rispetto a quella di Lebesgue non tutti lo sono (almeno se accettiamo l'assioma della scelta !).

Nell'ambito ora descritto sono stati conseguiti tutti i risultati di [8], estendendo con ciò quelli precedentemente ottenuti in [2], [5] e [9] che si riferivano a coppie di misure ottenibili come prolungamenti di due misure *a valori reali* definite inizialmente su uno stesso semianello.

Proviamo alcune proposizioni che ci saranno utili nel seguito.

TEOREMA 1.1 *Se $\mathcal{A}$ è la σ-algebra degli insiemi μ-misurabili e $\mathcal{B}$ è una sotto-σ-algebra di $\mathcal{A}$, da cui la μ è ricostruibile, allora per ogni insieme μ-sommabile A esiste un insieme $B \in \mathcal{B}$ tale che $\mu(A-B)+$ $+\mu(B-A)=0$.*

Indichiamo con ν la restrizione della μ a $\mathcal{B}$ e con ν^* la corrispondente misura esterna.

Poiché A è, per ipotesi, ν^*-misurabile e $\nu^*(A)=\mu(A)<+\infty$, esiste almeno una successione $\{B_n\}_n, B_n \in \mathcal{B}$, tale che

$$A \subset \bigcup_n B_n \text{ e } \sum_1^\infty {}_n\, \nu(B_n) < +\infty .$$

Essendo $\mathcal{B}$ una σ-algebra, è $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$ e risulta $\inf\{\nu(E), E \supset A, E \in \mathcal{B}\} = \nu^*(A) = \mu(A)$.

Sia, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\overline{B}_k$ tale che $\overline{B}_k \in \mathcal{B}$ e $\nu(\overline{B}_k) < \mu(A) + \dfrac{1}{k}$.

Poniamo infine $B = \bigcap_k \overline{B}_k$. Si ha che $\nu(B) \leq \nu(\overline{B}_k) < \mu(A) + \dfrac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}$ ed anche, d'altro canto, essendo $B \supset A$, $\nu(B) \geq \mu(A)$.

Ne segue che $\nu(B)=\mu(B)=\mu(A)$, da cui si deduce che $\mu(A-B)=$ $=\mu(\emptyset)=0$ ed anche $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)=0$, cioè la tesi.

TEOREMA 1.2. *Sia $\mathcal{A}$ la σ-algebra degli insiemi μ-misurabili e $\mathcal{B}$ una sotto-σ-algebra contenente tutti gli insiemi μ-sommabili. Allora la* μ è ricostruibile da $\mathcal{B}$.

Indicata con ν la restrizione di μ a $\mathcal{B}$ e con ν^* la misura esterna generata da ν, si ha che per ogni $F\subset S$ risulta, per l'ipotesi fatta su $\mathcal{B}$,

$$\{\{B_n\}: B_n\in\mathcal{B},\quad \bigcup_n B_n\supset F\quad \Sigma_n\,\nu(B_n)<+\infty\}=$$

$$=\{\{B_n\}: B_n\in\mathcal{A},\quad \bigcup_n B_n\supset F\quad \Sigma_n\,\mu(B_n)<+\infty\},$$

perciò vale l'identità $\nu^*(F)=\mu^*(F)$ per ogni $F\subset S$, da cui discende immediatamente la tesi.

OSSERVAZIONE. Il concetto di confrontabilità tra due misure non dà luogo, come si potrebbe sperare, ad una relazione di equivalenza. Proviamolo con un esempio. Sia $S=[0,1]$, φ la misura di Lebesgue, μ la misura « counting » che associa ad ogni insieme finito il numero dei suoi punti e $+\infty$ ad ogni insieme infinito; ν sia la misura definita sulla σ-algebra formata dai sottoinsiemi di [0,1] che sono al più numerabili oppure tali che il loro complementare è al più numerabile e che vale zero sugli insiemi del primo tipo ed uno sugli insiemi del secondo tipo. La φ e la μ sono confrontabili $(\mathcal{A}_\varphi\cap\mathcal{A}_\mu=\mathcal{A}_\varphi)$ la μ e la ν anche $(\mathcal{A}_\mu\cap\mathcal{A}_\nu=\mathcal{A}_\nu)$, ma la φ e la ν non lo sono, poiché $\mathcal{A}_\varphi\cap\mathcal{A}_\nu=\mathcal{A}_\nu$, su $\mathcal{A}_\nu$ la φ coincide con la ν ed il prolungamento della ν a partire da $\mathcal{A}_\nu$ ci fornisce ancora la ν su $\mathcal{A}_\nu$.

La circostanza illustrata sopra ci costringerà nel ultimo paragrafo a supporre, quanto avremo a che fare con tre misure sopra uno stesso insieme, che siano ricostruibili a partire da uno stesso semi-anello.

2. Richiamiamo alcune definizioni e proposizioni già note. Siano φ e μ due misure confrontabili sopra uno stesso insieme sostegno. Indichiamo con $\mathcal{A}$ la σ-algebra $\mathcal{A}_\varphi\cap\mathcal{A}_\mu$.

DEFINIZIONE 2.1. Diremo che f è una *derivata* di φ rispetto a μ (e scriveremo spesso $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$) se è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile non negativa, tale che per ogni insieme μ-sommabile appartenente ad $\mathcal{A}$ risulta

(1) $\qquad f\cdot\chi_E$ è μ-sommabile $\Longleftrightarrow E$ è φ-sommabile

(2) $\qquad$ se E è φ-sommabile, allora $\varphi(E)=\int_E f\,d\mu.$

Poiché la (2) è garantita solo se E è μ-sommabile, l'essere f una derivata di φ rispetto a μ non equivale al fatto che φ sia l'integrale della f rispetto a μ, come possiamo vedere nel seguente esempio, dovuto a Saks, [4] § 14.

ESEMPIO. Sia $S=[0,1]$, sia μ la misura « counting » già incontrata nel paragrafo precedente e φ la misura di Lebesgue. In questo caso $\mathcal{A}$ è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. La funzione identicamente nulla è una derivata (anzi *la* derivata) di φ rispetto a μ, ma non vale ovviamente l'identità

(3) $$\varphi(E)=\int_E f\, d\mu, \quad \forall\, E \in \mathcal{A}.$$

OSSERVAZIONI.

1) Se f è una derivata di φ rispetto a μ, allora ogni altra derivata g di φ rispetto a μ è μ-localmente quasi uguale ad f. Infatti, se $E\in\mathcal{A}$ è μ-sommabile, per la (1) e la (2) ed il classico teorema di Radon-Nikodym ([1], § 31, teorema B) risulta $f\cdot\chi_E=g\cdot\chi_E$ μ-quasi ovunque.

Siccome nell'esempio precedente solo l'insieme vuoto è localmente μ-nullo, la derivata è unica.

2) Se φ ammette derivata rispetto a μ, allora la φ è assolutamente continua ($\varphi \ll \mu$) rispetto a μ.

3) I. E. Segal ha caratterizzato quelle misure μ per le quali ogni φ, assolutamente continua rispetto a μ, ammette derivata. Si tratta di quelle misure μ, la cui contrazione μ_c è localizzabile (si veda per maggiori dettagli [9], teorema 10.2) (2). Per altre caratterizzazioni della stessa categoria di misure si veda anche [2].

DEFINIZIONE 2.2. Diremo che f è una derivata regolare di φ rispetto a μ se è una funzione misurabile, non negativa e tale che per ogni $E\in\mathcal{A}$ risulta

(4) $$f\cdot\chi_E \text{ è } \mu\text{-sommabile} \iff E \text{ è } \varphi\text{-sommabile}$$

(5) $$\text{se } E \text{ è } \varphi\text{-sommabile, allora } \varphi(E)=\int_E f\, d\mu.$$

(2) Se μ è una misura su $(S,\mathcal{A})$, si chiama « contrazione di μ » la misura $\mu_c(E)=\sup\{\mu(A);\, A\in\mathcal{A}, A\subset E, \mu(A)<+\infty\}$. Una misura si dice semifinita, se $\mu=\mu_c$. Una misura semifinita si dice « localizzabile », se per ogni collezione di insiemi misurabili $\mathcal{G}$ esiste un insieme G^* tale che $\mu(G-G^*)=0$, $\forall\, G\in\mathcal{G}$ ed inoltre, se $\bar{G}$ è un altro insieme misurabile per cui risulta $\mu(G-\bar{G})=0$, $\forall\, G\in\mathcal{G}$, allora $\mu(G^*-\bar{G})=0$.

Evidentemente ogni derivata regolare è una derivata. Si osservi anche che la regolarità della derivata implica la validità dell'identità (3). L'esempio di Saks mostra allora che ci sono derivate che non sono regolari. Se μ è una misura finita o σ-finita, ogni derivata rispetto a μ è regolare.

In [3] vengono date altre due definizioni di derivata, intermedie tra le due:

DEFINIZIONE 2.3. Una derivata $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ si dice *positiva*, se $f>0$ tranne che su un insieme φ-nullo.

DEFINIZIONE 2.4. Una derivata $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ si dice *densa*, se per ogni insieme φ-sommabile E esiste una successione di insiemi μ-sommabili $\{E_n\}$ $(n\geq 1)$ ed un insieme φ-nullo E_0, tale che $E=\bigcup_0^\infty{}_n E_n$ e la f si annulla su E_0 (3).

Valgono i seguenti due teoremi.

TEOREMA 2.1. *Una derivata* $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ *è positiva se e solo se per ogni* $E\in\mathcal{A}$, $f\cdot\chi_E$ *è* μ*-sommabile* $\Longrightarrow$ E *è* φ*-sommabile e risulta*

$$\varphi(E)=\int_E f\,d\mu. \tag{8}$$

Infatti, se tale condizione è verificata, sia $E=\{x\colon f(x)=0\}$. La f è μ-sommabile su E, quindi E è φ-sommabile e, valendo la (6), $\varphi(E)=0$, cioè la derivata è positiva.

Viceversa, si ponga $A=\{x\colon f(x)=0\}$, $B=\complement A$. Sia ora $E\in\mathcal{A}$. Se f è μ-sommabile su E, $E\cap B$ ha misura σ-finita ([1], § 25, teorema F), perciò $E\cap B=\bigcup_1^\infty{}_n B_n$: $\mu(B_n)<+\infty$. Su B_n la f è μ-sommabile, quindi B_n è, per la (1) e la (2) φ-sommabile e risulta

$$\varphi(B_n)=\int_{B_n} f\,d\mu\,.$$

(3) Ovviamente non è restrittivo supporre disgiunti gli insiemi E_n $(n= =0,1,2,\ldots)$.

Essendo $\varphi(E \cap A) = \int_{E \cap A} f\, d\mu = 0$ e per la numerabile additività di φ e di $\int f\, d\mu$, si ha la tesi.

TEOREMA 2.2. *Una derivata* $f = \frac{d\varphi}{d\mu}$ *è densa se e solo se su ogni insieme φ-sommabile E la f è μ-sommabile e risulta verificata la* (6).

Se è verificata la condizione citata nel teorema ed E è φ-sommabile, allora su E è sommabile la f e risulta verificata la (6). Siano allora $E_0 = \{x : f(x) = 0\}$, $E_n = \left\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. L'insieme E_0 è φ-nullo, la f vi si annulla, $E = \bigcup_{0}^{\infty}{}_n E_n$. Poiché inoltre

$$+\infty > \int_{En} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot \mu(E_n),$$

gli E_n $(n \geq 1)$ sono μ-sommabili e quindi la derivata è densa.

Viceversa, sia f una derivata densa e sia E φ-sommabile. Siano E_0 ed E_n gli insiemi della definizione 2. 4. Risulta

$$\varphi(E_0) = 0 = \int_{E_0} f\, d\mu,$$

inoltre, per ogni $n \geq 1$,

$$\varphi(E_n) = \int_{En} f\, d\mu,$$

poiché gli E_n sono anche μ-sommabili. Per la numerabile additività di φ e di $\int f\, d\mu$, si ha

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \int_{En} f\, d\mu = \sum_{1}^{\infty}{}_n (E_n) = \varphi(E) < +\infty$$

e perciò (per il teorema di Beppo Levi) la f è μ-sommabile su E ed inoltre vale la (6).

OSSERVAZIONI.

1) Le due proposizioni provate mostrano che se una derivata è positiva e densa, allora è regolare.

2) Se $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa, risulta $f>0$ tranne che su un insieme localmente φ-nullo.

3) Se $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa e se φ è finita o σ-finita, allora f è una derivata regolare [4].

4) Se $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa, allora φ è μ-piena ([6], § 3, definizione 1), cioè per ogni insieme φ-sommabile E esiste un insieme E' tale che $\varphi(E-E')=0$ ed E' ha misura μ σ-finita.

3. In [3] è stato posto il seguente problema:

« Ogni derivata positiva è anche regolare ? O almeno, accanto ad ogni derivata positiva esiste anche una derivata regolare » ?

Presentiamo un controesempio che risponde negativamente ad entrambe le domande.

ESEMPIO. Sia $S=[0,1]$, $\mathscr{A}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, φ la misura di Lebesgue e $\mu(E)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\varphi(E), \forall E\in\mathscr{A}$. Risulta $\varphi \ll \mu$ e la funzione $f(x)=1$ è una derivata positiva di φ rispetto a μ in quanto gli insiemi μ-sommabili sono esattamente gli insiemi di misura nulla e per questi insiemi si verificano facilmente le (1) e (2) ed inoltre risulta $f>0$.

È altresì facile verificare che nè f, nè alcun'altra funzione può essere una derivata regolare di φ rispetto a μ, poiché questo implicherebbe l'identità (3). Ma mentre il primo membro assume nel nostro caso valori reali non nulli, il secondo, per come è definita la μ, può assumere solo i valori 0 e $+\infty$.

Proviamo ora il seguente teorema.

TEOREMA 3.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una derivata positiva sia regolare è che risulti*

$$\varphi(E) \geq \int_E f\,d\mu, \quad \forall E \in \mathscr{A}. \tag{7}$$

[4] Infatti in questo caso ogni insieme localmente nullo è nullo.

Ovviamente, se la derivata è regolare, vale la (3) e perciò anche la (7).

Viceversa, se vale la (7), dalla φ-sommabilità di E segue che f è μ-sommabile su E. Allora l'insieme $E \cap \{x: f(x) > 0\}$ ha misura μ σ-finita. Esiste perciò una successione $\{E_n\}, E_n \in \mathcal{A}$, tale che $\mu(E_n) < +\infty$, $\bigcup_{1}^{\infty}{}_n E_n = E \cap \{x: f(x) > 0\}$. Gli insiemi E_n sono anche φ-sommabili e perciò risulta, per la (2),

$$\varphi(E_n) = \int_{E_n} f \, d\mu.$$

Posto $E_0 = E \cap \{x: f(x) = 0\}$, risulta, per la positività della derivata, $\varphi(E_0) = 0$ e si ha anche ovviamente $\int_{E_0} f \, d\mu = 0$. Per la numerabile additività di φ e di $\int f \, d\mu$, si ha che vale il segno di uguaglianza nella (7) per ogni E che sia φ-sommabile. Per il teorema 2.2, la derivata è anche densa e perciò regolare.

Faremo ora vedere che esiste una classe molto vasta di spazi mensurali $(S, \mathcal{A}, \mu)$ tali che se φ ammette derivata positiva rispetto a μ, questa è anche regolare. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 3.2. *Se f è una funzione misurabile non negativa ed a valori reali e se μ è una misura semifinita, allora la misura $\int f \, d\mu$ è semifinita* (5).

Sia E tale che

$$\int_E f \, d\mu = +\infty.$$

Posto $S_n = \left\{ x : \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n \right\}$, $S_0 = \{x : f(x) = 0\}$ risulta $S = \bigcup_{0}^{\infty}{}_n S_n$ e quindi $E = \bigcup_{0}^{\infty}{}_n (E \cap S_n)$. Esiste perciò almeno un indice $n > 0$ tale che $\int_{E \cap S_n} f \, d\mu > 0$.

(5) Per la dimostrazione sfruttiamo il teorema 2, § 34 di [10], il quale afferma che una misura ψ è semifinita se e solo se per ogni E tale che $\psi(E) = +\infty$ esiste $F \subset E$, tale che $0 < \psi(F) < +\infty$.

Ne segue che $\mu(E\cap S_n)>0$. Per la semifinitezza della μ esiste un insieme $F\subset E\cap S_n$, tale che $0<\mu(F)<+\infty$. Risulta allora

$$0<\frac{1}{n}\cdot\mu(F)\leq\int_F f\,d\mu\leq n\cdot\mu(F)<+\infty,$$

da cui la tesi.

LEMMA 3.3. *Sia f una derivata di φ rispetto a μ e sia μ semifinita. Allora vale la disuguaglianza*

$$\varphi(E)\geq\int_E f\,d\mu,\quad\forall E\in\mathscr{A}. \tag{8}$$

Per definizione di derivata, vale il segno di uguaglianza per tutti gli insiemi μ-sommabili.

Sia $S_\infty=\{x: f(x)=+\infty\}$, $S_r=\complement S_\infty$.

Se $E\subset S_\infty$ e $\mu(E)=+\infty$, allora $\varphi(E)=+\infty$. Infatti esiste, per la semifinitezza della μ, un insieme μ-sommabile F contenuto in E ed avente misura positiva. Per questo insieme, come abbiamo stabilito, vale la (8) e perciò

$$\varphi(E)\geq\varphi(F)\geq\int_F f\,d\mu=+\infty.$$

La disuguaglianza resta così provata per tutti gli insiemi misurabili contenuti in S_∞. Resta da provare la (8) per tutti i sottoinsiemi misurabili di S_r.

Essendo la μ semifinita ed essendo f a valori reali su S_r, la misura $\int f\,d\mu$ è semifinita (per il lemma 3.2) se ristretta alla σ-algebra $\mathscr{A}\cap S_r$. Risulta perciò, per ogni $E\in\mathscr{A}\cap S_r$,

$$\int_F f\,d\mu=\sup\{\int_F f\,d\mu,\ F\in\mathscr{A}\cap E,\int_F f\,d\mu<+\infty\}. \tag{9}$$

D'altro canto l'estremo superiore che si trova a secondo membro della (9) si può anche calcolare come l'estremo superiore della classe

$$\left\{\int_G f\,d\mu;\ G\in\mathscr{A}\cap E,\mu(G)<+\infty,\int_G f\,d\mu<+\infty\right\}, \tag{10}$$

poiché ogni elemento della classe considerata nella (9) è l'estremo superiore di una sottocollezione della classe (10). Infatti se $F\in\mathscr{A}\cap E$ e

$\int\limits_F f\,d\mu < +\infty$, allora detto $F_1 = \{x: f(x) > 0\} \cap F$, F_1 ha misura μ σ-finita. Esiste perciò una successione $\{G_n\}$ di insiemi μ-sommabili tali che $G_n \uparrow F_1$. Per il teorema di Beppo Levi risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n} f\,d\mu = \int\limits_{F_1} f\,d\mu = \int\limits_F f\,d\mu.$$

Risulta ora, per ogni $E \in \mathcal{A} \cap S_r$,

$$\varphi(E) \geq \sup\left\{\varphi(G),\ G \in \mathcal{A} \cap E,\ \mu(G), < +\infty,\ \int\limits_G f\,d\mu < +\infty\right\} = \int\limits_E f\,d\mu.$$

Dai lemmi precedenti segue immediatamente il seguente teorema.

TEOREMA 3.4. *Se μ è semifinita e se $f = \dfrac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata positiva, allora f è regolare.*

Per il lemma 3.3 vale la disuguaglianza (8), che è, per il teorema 3.1 (necessaria e) sufficiente affinché f sia una derivata regolare.

OSSERVAZIONE. Il teorema 3.4 e l'osservazione 4 che conclude il secondo paragrafo danno un'altra dimostrazione del teorema 3.1 di [6]. Infatti, se μ è localizzabile e se φ è μ-piena, esiste una derivata densa di φ rispetto a μ. D'altro canto, se la μ è anche semifinita, la derivata è regolare e quindi la φ è un integrale della μ.

4. Nel paragrafo precedente abbiamo visto un esempio di derivata positiva non densa ed abbiamo ricercato delle condizioni sufficienti affinché una derivata positiva sia anche densa. In questo ci interessiamo dell'analogo problema per la derivata densa. Incominciamo presentando un esempio di derivata densa, ma non positiva.

ESEMPIO. Siano $S, \mathcal{A}$ e μ gli stessi dell'esempio del paragrafo precedente e sia $\varphi = \mu$. Allora $f = 0$ è una derivata densa di φ rispetto a μ, ma non è positiva (nè regolare). Gli insiemi μ-sommabili sono esattamente gli insiemi aventi misura di Lebesgue nulla e per essi sono banalmente verificate le (1) e (2). Inoltre, se E è φ-sommabile, vuol dire che $\varphi(E) = 0$. Ponendo $E_0 = E$, $E_n = \emptyset$ per ogni $n \geq 1$, si verificano le condizioni della definizione 3.3, f è perciò una derivata densa. D'altro canto è $\int f\,d\mu = 0$, quindi non è verificata la (3) e la derivata non è regolare (e quindi non è positiva).

Proveremo ora alcune proposizioni che appaiono duali di quelle del paragrafo precedente. In realtà la dualità non è completa in quanto, come avremo modo di osservare alla fine di questo paragrafo, non vale l'analogo del lemma 3.3.

TEOREMA 4.1. *Se f è una derivata densa di φ rispetto a μ, allora essa è regolare se e solo se*

$$\varphi(E) \leq \int_E f\, d\mu, \quad \forall\, E \in \mathcal{A}. \tag{11}$$

Se vale la disuguaglianza e se f è μ-sommabile su E, E è φ-sommabile. L'insieme E può quindi decomporsi nella riunione numerabile di insiemi a due a due disgiunti $E_n\, (n=0, 1, 2 \ldots)$ tali che

$$\varphi(E_0) = 0, \quad f(x) = 0, \quad \forall\, x \in E_0, \quad \mu(E_n) < +\infty, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Risulta

$$\varphi(E_0) = \int_{E_0} f\, d\mu = 0$$

ed anche

$$\varphi(E_n) = \int_{E_n} f\, d\mu, \quad \forall\, n \geq 1,$$

poiché gli $E_n\, (n \geq 1)$ sono allo stesso tempo φ- e μ-sommabili. Per la numerabile additività di φ e di $\int f\, d\mu$ vale l'identità

$$\varphi(E) = \int_E f\, d\mu,$$

tutte le volte che il secondo membro è un numero reale e resta così verificata la condizione del teorema 2.1. La derivata è perciò anche positiva, oltre che densa, e perciò è regolare.

Viceversa, se la derivata è regolare, allora vale la (3) e quindi anche la (11).

TEOREMA 4.2. *Se la φ è semifinita e se $f = \dfrac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa, allora è regolare.*

Infatti risulta

$$\varphi(E) = \sup\{\varphi(F);\ F \subset E,\ \varphi(F) < +\infty\} = \sup\left\{\int_F f\,d\mu,\ F \subset E,\ \varphi(F) < +\infty\right\} \leq \int_E f\,d\mu,$$

per ogni $E \in \mathcal{A}$. Per il teorema 4.1 si ha la tesi.

OSSERVAZIONE. La dimostrazione del teorema precedente si poteva ottenere anche permettendo la seguente proposizione: se φ è semifinita e se f è una derivata densa di φ rispetto a μ, allora risulta $\varphi(E) \leq \int_E f\,d\mu,\ \forall\ E \in \mathcal{A}$. Omettiamo la facile dimostrazione, osservando soltanto che l'ipotesi fatta sulla densità della derivata è essenziale. Infatti nell'esempio di Saks la φ è semifinita, ma la disuguaglianza non è vera.

5. In [3] viene citato anche il seguente problema (6):

« A quali condizioni deve soddisfare uno spazio mensurale $(S, \mathcal{A}, \mu)$ affinché ogni misura φ, assolutamente continua rispetto a μ, ammetta una derivata regolare, positiva o densa »?

Per caratterizzare gli spazi mensurali in cui vale la versione regolare, positiva o densa del teorema di Radon-Nikodym, ci serviremo di una tecnica introdotta in [7], che consente di costruire una misura, assolutamente continua rispetto una misura μ comunque assegnata, confrontabile con la μ e che non è integrale della μ, tutte le volte che la μ non è σ-finita.

TEOREMA 5.1. *Le seguenti due condizioni sono equivalenti:*

(*a*) *la μ è σ-finita:*

(*b*) *ogni $\varphi << \mu$ ammette derivata regolare (densa).*

(6) Si tratta del problema 12.

$(a) \Longrightarrow (b)$. Questa implicazione si dimostra combinando il classico teorema di Radon-Nikodym ([1], § 31, teorema B) con un altro risultato ben noto ([1] § 30, es. 11): se $\varphi << \mu$ e se μ è finita o σ-finita, allora l'insieme ambiente si può decomporre in due parti, S_∞ ed $S - S_\infty$, tali che $S - S_\infty$ ha misura φ σ-finita e su S_∞ la φ assume solo i due valori 0 e $+\infty$ (7).

Sia ora f la funzione misurabile definita su $S - S_\infty$ dal teorema di Radon-Nikodym e su S_∞ uguale a $+\infty$. Si verifica facilmente che vale la (3) e quindi che la derivata è regolare ed anche densa.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Supponiamo che la μ non sia σ-finita. Sia allora $\mathcal{I}$ il σ-ideale degli insiemi aventi misura μ σ-finita, $\mathcal{A}_\varphi$ la σ-algebra così definita:

$$E \in \mathcal{A}_\varphi \Longleftrightarrow E \in \mathcal{I} \text{ oppure } \complement E \in \mathcal{I};$$

sia infine φ la misura definita su $\mathcal{A}_\varphi$ nella maniera seguente:

$$\varphi(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \in \mathcal{I} \\ 1 & \text{se } \complement E \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

La φ e la μ hanno come dominio di definizione comune la σ-algebra $\mathcal{A}_\varphi$ (infatti $\mathcal{A}_\varphi \subset \mathcal{A}$). Poiché $\mathcal{A}_\varphi$ contiene tutti gli insiemi μ-sommabili, la μ è ricostruibile da $\mathcal{A}_\varphi$ (teorema 1.2), quindi la φ e la μ sono confrontabili. Inoltre la φ è assolutamente continua rispetto a μ. Sia f una derivata di φ rispetto a μ. Se fosse densa, esisterebbe una successione di insiemi disgiunti $E_0, E_1, E_2, \ldots$ tale che $S = \bigcup_0^\infty {}_n E_n$, $\varphi(E_0) = 0$, (e quindi $E_0 \in \mathcal{I}$) e $\mu(E_n) < +\infty, \forall n \geq 1$ (e quindi ancora $E_n \in \mathcal{I}$). Ne seguirebbe che $S \in \mathcal{I}$, cioè che la μ è σ-finita. Dall'assurdo segue che f non può essere densa nè tanto meno regolare.

Per caratterizzare gli spazi mensurali in cui vale la versione positiva del teorema di Radon-Nikodym, occorre premettere il seguente lemma.

LEMMA 5.2. *Se μ è la somma di due misure tra loro singolari, μ_0 e μ_1 tali che μ_0 è σ-finita e μ_1 è degenere e se $\mathcal{B}$ è una sotto-σ-algebra di $\mathcal{A}$, da cui la μ è ricostruibile, allora esistono due insiemi disgiunti ap-*

(7) Le misure che assumono solo i due valori 0 e $+\infty$ verranno chiamate nel seguito « degeneri ». Si noti che una misura degenere è semifinita se e solo se è identicamente nulla.

partenenti a $\mathcal{B}$, B_0 *e* B_1 *tali che*

$$\mu_0(E) = \mu(E \cap B_0), \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

$$\mu_1(E) = \mu(E \cap B_1), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

Sia infatti S_0 l'insieme su cui si concentra la μ_0 e tale che sul complementare la μ è degenere. Risulta $S_0 = \bigcup_1^\infty{}_n A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_n) < +\infty$. Per il teorema 1.1 esiste, per ogni n, un insieme $\bar{B}_n \in \mathcal{B}$ tale che

$$\mu(\bar{B}_n - A_n) + \mu(A_n - \bar{B}_n) = 0.$$

Posto allora $B_0 = \bigcup_1^\infty{}_n \bar{B}_n$ e $B_1 = \complement B_0$, si ha la tesi.

Teorema 5.3. *Le due proposizioni seguenti sono equivalenti:*

(*a*) *la* μ *è decomponibile nella somma di due misure* μ_0 e μ_1, *tra loro singolari, tali che* μ_0 *è* σ*-finita e* μ_1 *è degenere*;

(*b*) *ogni* $\varphi << \mu$ *ammette derivata positiva rispetto a* μ.

$(a) \Longrightarrow (b)$. Siano S_0 ed S_1 due insiemi misurabili e disgiunti tali che $S_0 \cup S_1 = S$, la μ_0 è concentrata su S_0 e la μ_1 è concentrata su S_1. Sia φ una misura confrontabile con μ e siano B_0 e B_1 i due insiemi del lemma 5.2. Sia poi f_0 la derivata (regolare!) di φ rispetto a μ, ristrette entrambe a B_0, definita come nel teorema 5.1 e si ponga

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se } x \in S_0 \\ 1 & \text{se } x \in S_1 . \end{cases}$$

Come facilmente si verifica, la f è una derivata positiva di φ rispetto a μ.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Siano $\mathcal{I}, \mathcal{A}_\varphi$ e φ come nel teorema precedente (la definizione della φ ha senso tutte le volte che la μ non è σ-finita: se la μ è σ-finita non c'è nulla da provare). Per ipotesi esiste una derivata positiva f. L'insieme $E_0 = \{x: f(x) = 0\}$ è φ-nullo per ipotesi, perciò $E_0 \in \mathcal{I}$, ovvero E_0 ha misura μ σ-finita.

Supponiamo ora che esista un insieme $A \in \mathcal{A} \cap E_0$, tale che $0 < \mu(A) < +\infty$. Allora risulta $A = A_\infty \cup \bigcup_1^\infty{}_n A_n$, essendo

$$A_\infty = A \cap \{x: f(x) = +\infty\}. \quad A_n = A \cap \left\{x: \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n\right\}.$$

Esiste almeno un indice n (eventualmente $n = +\infty$) tale che $\mu(A_n) > 0$, Su ciascun A_n (escluso A_∞) la f è μ-sommabile, perciò A_n è φ-sommabile ed anche, per come è stata definita la φ, $\varphi(A_n) = 0$. Ne segue che

$$0 = \varphi(A_n) = \int_{A_n} f\, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot \mu(A_n)$$

e perciò $\mu(A_n) = 0$ per ogni $n \geq 1$ $(n \neq +\infty)$.
È perciò, nell'ipotesi che abbiamo fatto, $0 < \mu(A_\infty) < +\infty$. La f non è μ-sommabile su A_∞. D'altro canto è $0 = \varphi(A) \geq \varphi(A_\infty)$, perciò, per la (1), la f deve essere μ-sommabile su A_∞. Dall'assurdo segue che la μ, ristretta al complementare di E_0, non può assumere valori reali non nulli, cioè è degenere, mentre E_0 ha misura μ σ-finita, cioè la tesi.

6. Ci occuperemo ora di alcune regole di sostituzioni dei differenziali sotto il segno di integrale, incominciando con la

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\mu}. \tag{12}$$

Mostriamo come prima cosa un esempio in cui la (12) non è verificata.

Esempio. Sia $S = [0,1]$, sia $\mathcal{A}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e siano μ la misura di Lebesgue,

$$\varphi(E) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mu(E),\ \forall\ E \in \mathcal{A} \text{ e } \nu(E) = \int_E x\, d\mu,\ \forall\ E \in \mathcal{A}.$$

Risulta $\nu << \varphi << \mu$. Le tre misure sono confrontabili $(\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\nu)$ ed inoltre $\dfrac{d\varphi}{d\mu} = +\infty$ quasi ovunque [8], mentre $\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ esiste, ma non è univocamente determinata, poiché la derivata, come abbiamo osservato nel secondo paragrafo, è unica a meno di insiemi localmente φ-nulli. Nel nostro caso (vedasi nota 8) ogni insieme misurabile è localmente φ-nullo, perciò ogni funzione misurabile non negativa è una derivata di ν rispetto a φ. Risulta infine $\dfrac{d\nu}{d\mu} = x$, quasi ovunque.

[8] Le tre misure hanno gli stessi insiemi nulli, perciò il « quasi ovunque » vale rispetto a tutt'e tre. Si noti ancora che rispetto a φ ogni insieme è localmente nullo, mentre per le altre due gli insiemi localmente nulli sono nulli.

Comunque si scelga ora la $\frac{d\nu}{d\varphi}$ e comunque si decida di definire il prodotto $0 \cdot \infty$ che può comparire al secondo membro della (12), non si ottiene l'identità (12).

Si noti che, se si sceglie $\frac{d\nu}{d\varphi}=1$, le due derivate che compaiono al secondo membro della (12) sono positive. Vedremo nel seguito che la densità di $\frac{d\nu}{d\varphi}$ è sufficiente per la validità della (12).

TEOREMA 6.1. *Se f è una derivata a valori reali di φ rispetto a μ e se $g=\frac{d\nu}{d\varphi}$, allora $f \cdot g$ è una derivata di ν rispetto a μ.*

Se $\mu(E)<+\infty$, allora la φ è semifinita, se ristretta ad E. Infatti se $\varphi(E)=+\infty$, allora per la (1), è anche $\int_E f\, d\mu=+\infty$, ma siccome la f è a valori reali e $\mu(E)<+\infty$, esiste $F \subset E$, tale che

$$0<\int_F f\, d\mu<+\infty.$$

Per la (2) risulta allora

$$0<\varphi(F)=\int_F f\, d\mu<+\infty,$$

cioè la tesi.

Siccome è $\varphi<<\mu$, la φ è σ-finita su E ([1], § 30, es. 11).

Si ponga $G_\infty=\{x\colon g(x)=+\infty\} \cap E$. Se $A \cap G_\infty=\varnothing$, allora vale l'identità

$$\int_A fg\, d\mu=\int_A g\, d\varphi=\nu(A), \tag{13}$$

in virtù del teorema A, § 32 di [1].

Se invece $A \subset G_\infty$, allora siccome A ha misura φ σ-finita, $A=\bigcup_1^\infty{}_n A_n$; $\varphi(A_n)<+\infty$. Per la (1) e la (2) risulta allora

$$\nu(A_n)=\int_{A_n} g\, d\varphi$$

e perciò

$$\nu(A_n) < +\infty \iff \nu(A_n) = 0 \iff \int_{A_n} g\, d\varphi = 0$$

e quindi anche

$$\nu(A) < +\infty \iff \nu(A) = 0 \iff \int_A g\, d\varphi = 0.$$

Siccome $g(x) = +\infty$ su G_∞, si ha anche

$$\int_A g\, d\varphi = 0 \iff \varphi(A) = 0.$$

Posto ora $F_0 = \{x\colon f(x) = 0\}$, si ha, per ogni $A \subset G_\infty$, che se $f \cdot g \cdot \chi_A$ è μ-sommabile allora $f \cdot \chi_A$ è μ-quasi ovunque nulla, cioè $\mu(A - F_0) = 0$ e perciò anche $\varphi(A - F_0) = 0$. D'altro canto è $\varphi(F_0) = 0$, ovvero A è ν-sommabile e vale l'identità (analoga alla (2) ed alla (13))

$$\nu(A) = \int_A f \cdot g\, d\mu. \tag{14}$$

Viceversa, se A è ν-sommabile e contenuto in G_∞, allora risulta, per quanto visto prima, $\nu(A) = 0$ e $\int_A g\, d\varphi = 0$, cioè $\varphi(A) = 0$. Ne segue che $\mu(A - F_0) = 0$. Ma allora è

$$\int_A fg\, d\mu = \int_{A \cap F_0} fg\, d\mu + \int_{A - F_0} fg\, d\mu = 0,$$

cioè è ancora verificata la (14), e con ciò la tesi.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi del teorema precedente può essere indebolita richiedendo che la f sia localmente μ-quasi ovunque a valori reali. La dimostrazione resta praticamente la stessa, con minime ed evidenti modifiche.

Daremo ora una condizione sufficiente affinché $\frac{d\varphi}{d\mu}$ sia localmente μ-quasi ovunque a valori reali.

TEOREMA 6.2. *Se* $f=\frac{d\varphi}{d\mu}$ *e se* φ *è semifinita, allora* f *è localmente* μ-*quasi ovunque a valori reali.*

Sia infatti $E\in\mathcal{A}$ tale che $\mu(E)<+\infty$. La φ ristretta ad E è σ-finita, come abbiamo già avuto modo di osservare. Ma allora ([1], § 31, teorema B) $\frac{d\varphi}{d\mu}\cdot\chi_E$ è μ-quasi ovunque a valori reali.

TEOREMA 6.3. *Se* f *è una derivata di* φ *rispetto a* μ *e se* g *è una derivata densa di* ν *rispetto a* φ, *allora* fg *è una derivata di* ν *rispetto a* μ.

Sia E μ-sommabile e si ponga $F_\infty=E\cap\{x\colon f(x)=+\infty\}$. Per ogni $A\subset E-F_\infty$ vale la formula (13). Verifichiamola anche per i sottoinsiemi di F_∞.

Su F_∞ la φ è degenere. Sia $A\subset F_\infty$ e sia $\nu(A)<+\infty$. Allora esiste una successione di insiemi $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ tale che $A=\bigcup_0^\infty{}_n A_n$, $\nu(A_0)=0$, $g(x)=0$, $\forall\, x\in A_0$ e $\varphi(A_n)<+\infty$. Nel nostro caso quest'ultima condizione equivale a $\varphi(A_n)=0$ e perciò $\nu(A_n)=0$. In definitiva, $A\subset F$ è ν-sommabile se e solo se $\nu(A)=0$.

Se allora $A\subset F_\infty$ e $fg\cdot\chi_A$ è μ-sommabile, allora $g\cdot\chi_A$ è μ-quasi ovunque nulla, cioè $\varphi(A)=0$, ovvero $\nu(A)=0$ e vale la (13).

Viceversa, se $\nu(A)=0$, allora su A è φ-sommabile la g, cioè risulta $\varphi(A-G_0)=0$, essendo $G_0=\{x\colon g(x)=0\}$. Ma allora è anche

$$\int_{A-G_0} f\, d\mu = 0,$$

cioè $\mu(A-G_0)=0$. Risulta allora

$$\int_A fg\, d\mu = \int_{A-G_0} fg\, d\mu + \int_{A\cap G_0} fg\, d\mu = 0,$$

ed è ancora verificata la (13).

OSSERVAZIONE. Combinando il teorema 6.1 ed il teorema 6.3 si può ottenere la seguente proposizione, che peraltro per noi non è di grande interesse: se S può decomporsi in due parti misurabili S_1 ed S_2 tali che su S_1 la $\dfrac{d\varphi}{d\mu}$ è a valori reali (almeno localmente μ-quasi ovunque) e su S_2 la $\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ è densa, allora vale la (12).

TEOREMA 6.4. *Se* $\dfrac{d\varphi}{d\mu}$ *e* $\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ *sono due derivate dense, allora* $\dfrac{d\nu}{d\mu}\left(=\dfrac{d\varphi}{d\mu}\cdot\dfrac{d\nu}{d\varphi}\right)$ *è una derivata densa.*

Intanto, per il teorema precedente, vale la (12).

Sia poi E ν-sommabile. Poiché $\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ è una derivata densa, esiste un insieme ν-nullo E_0 ed una successione $\{E_n\}$ $(n\geq 1)$ di insiemi φ-sommabili tali che

$$E=\bigcup_0^\infty{}_n E_n \text{ e } \frac{d\nu}{d\varphi}=0, \ \forall\, x\in E_0 .$$

Per ogni E_n $(n\geq 1)$ esiste, siccome è φ-sommabile e $\dfrac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa, un insieme φ-nullo A_0^n ed una successione $\{A^n{}_m\}$ $(m\geq 1)$ di insiemi μ-sommabili tali che $E_n=\bigcup_0^\infty{}_m A^n_m$, $\dfrac{d\varphi}{d\mu}=0$, per ogni $x\in A_0^n$.

Sia ora $F_0=E_0\cup\bigcup_1^\infty{}_n A_0^n$. Essendo $\nu<<\varphi$, risulta $\nu(A_0^n)=0$ per ogni $n\geq 1$ e perciò $\nu(F_0)=0$. Su F_0 risulta inoltre $\dfrac{d\varphi}{d\mu}\cdot\dfrac{d\nu}{d\varphi}\equiv 0$, poiché ogni $x\in F_0$ o appartiene ad E_0, ed allora è $\dfrac{d\nu}{d\varphi}=0$, oppure appartiene ad uno degli A_0^n ed allora è $\dfrac{d\varphi}{d\mu}=0$.

Infine, $E-F_0$ è riunione numerabile degli insiemi μ-sommabili $A^n{}_m$ $(n\geq 1, m\geq 1)$.

TEOREMA 6.5. *Se* $\dfrac{d\varphi}{d\mu}$ *e* $\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ *sono due derivate positive e se vale la* (12), *allora* $\dfrac{d\nu}{d\mu}=\dfrac{d\varphi}{d\mu}\cdot\dfrac{d\nu}{d\varphi}$ *è una derivata positiva.*

Risulta infatti $\varphi\left(\left\{x : \frac{d\varphi}{d\mu} = 0\right\}\right) = 0$ e perciò anche $\nu\left(\left\{x : \frac{d\varphi}{d\mu} = 0\right\}\right) = 0$

D'altro canto è anche $\nu\left(\left\{x : \frac{d\nu}{d\varphi} = 0\right\}\right) = 0$ e quindi risulta $\varphi\left(\left\{x : \frac{d\varphi}{d\mu} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi} = 0\right\}\right) = 0$.

TEOREMA 6.6. *Se* $\frac{d\varphi}{d\mu}$ *e* $\frac{d\nu}{d\varphi}$ *sono due derivate regolari allora* $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\mu} \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}$ *è una derivata regolare.*

La tesi segue immediatamente dai teoremi 6.4 e 6.5.

TEOREMA 6.7. *Se* μ *è semifinita, se* $\varphi << \mu$ *e* $\mu << \varphi$ *e se* $\frac{d\varphi}{d\mu}$ *è una derivata, allora esiste* $\frac{d\mu}{d\varphi}$ *ed è localmente* φ*-quasi ovunque uguale a* $\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\mu}}$ (9). *Se anche la* φ *è semifinita, allora* $\frac{d\varphi}{d\mu}$ *e* $\frac{d\mu}{d\varphi}$ *sono regolari.*

Sia infatti $\varphi(E) < +\infty$. Essendo la μ semifinita, E ha misura μ σ-finita. Vale perciò l'identità

$$\int_G \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\mu}} \, d\varphi = \mu(G)$$

per ogni $G \in \mathscr{A} \cap E$ ([1], § 32, es. 2), cioè $\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\mu}}$ è una derivata di μ rispetto a φ.

Siccome la derivata di μ rispetto a φ è unica a meno di insiemi localmente φ-nulli, si ha la prima parte della tesi.

Da quanto precede si deduce anche che $\frac{d\varphi}{d\mu}$ è una derivata densa. Se anche la φ è semifinita, $\frac{d\varphi}{d\mu}$ è regolare per il teorema 4.2.

Per simmetria è regolare anche $\frac{d\mu}{d\varphi}$.

(9) Con la convenzione che $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

OSSERVAZIONE. Se non si fa l'ipotesi di semifinitezza per la μ, può accadere che non valga l'identità del teorema precedente. Si pensi infatti all'esempio del paragrafo 3. Ogni funzione misurabile non negativa è una derivata di φ rispetto a μ (infatti ogni insieme misurabile è localmente μ-nullo!), mentre risulta $\frac{d\mu}{d\varphi} = +\infty$ φ-quasi ovunque.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. R. HALMOS: *Measure Theory*, (1950).

[2] J. L. KELLEY: *Decomposition and Representation Theorems in Measure Theory*, Math. Annalen, 163 (1966), 89-94.

[3] D. KÖLZOW: *Differentiation von Massen*, Lecture Notes in Mathematics, 65 (1968).

[4] S. SAKS: *Theory of the Integral* (1937).

[5] I. E. SEGAL: *Equivalences of Measure Spaces*, Am. Jour. of Math., 73 (1951), 275-313.

[6] A. VOLČIČ: *Sul teorema di Randon-Nikodym nel caso non σ-finito*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, II 1 (1970), 42-53.

[7] A. VOLČIČ: *Su una caratterizzazione delle misure σ-finite*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, IV, 1 (1972), 66-70.

[8] A. VOLČIČ: *Teoremi di decomposizione per misure localizzabili*, Rendiconti di Matematica (2) vol. 6, serie VI, 307-336.

[9] A. C. ZAANEN: *The Radon-Nikodym Theorem* I, II, Indag. Math., XXIII (1961), 157-187.

[10] A. C. ZAANEN: *Integration* (1967).