TEOREMI DI CONVERGENZA DEL METODO DI COLLOCAZIONE PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI EQUAZIONI INTEGRO DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARIE

di A. BELLEN e S. GUERRA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Due teoremi di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori di equazioni differenziali lineari ordinarie sono qui estesi al caso di equazioni integro differenziali lineari ordinarie. Una applicazione mette, infine, in luce la notevole efficacia numerica del metodo.*

SUMMARY. - *Two convergence theorems of the collocation method for the computation of the eigenvalues of ordinary linear differential equations are improved to the case of ordinary linear integro-differential equations. A numerical example shows the strenght of the method.*

1. In [1] abbiamo stabilito due criteri di convergenza del metodo di collocazione per il calcolo degli autovalori del problema

$$Lu - \lambda ru = 0, \qquad u \in \mathcal{U}, \tag{1}$$

essendo

$$L = \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \qquad (p_0(x) \equiv 1) \tag{2}$$

un operatore differenziale lineare omogeneo di ordine m a coefficienti in $C^0[a, b]$, $r(x)$ una funzione continua su $]a, b[$, ivi mai nulla ed $\mathcal{U}$ la varietà lineare delle funzioni di $C^m[a, b]$ che verificano, insieme

(*) Pervenuto in Redazione il 18 febbraio 1974.

Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

alle loro prime $m-1$ derivate, m condizioni ai limiti, lineari ed omogenee.

Precisamente:

1) Supposto che le condizioni ai limiti siano tali che, per esse, valga l'implicazione

$$u^{(m)} = 0, \qquad u \in \mathcal{U} \Longrightarrow u = 0, \tag{3}$$

la quale, a sua volta, implica l'esistenza in $\mathcal{U}$ di un sistema di polinomi

$$\{\varphi_k\}_{k=0,1,\ldots} \tag{4}$$

con $\varphi_k(x)$ della forma $\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{jk}\, x^j + x^{m+k}$;

2) Supposto che, per ogni n, risulti

$$\det.\,[\varphi_k(x_h^{(n)})] \neq 0, \tag{5}$$

essendo

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \tag{6}$$

gli n zeri del polinomio $q_n(x)$ appartenente ad un sistema ortogonale su $[a, b]$ rispetto ad un peso $w(x)$ soddisfacente la condizione

$$\int_a^b \frac{dx}{w(x)} < +\infty; \tag{7}$$

dette

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{\varrho_n}^{(n)} \tag{8}$$

le radici distinte dell'equazione in λ

$$\det.\,[(L\varphi_k)_{x_h^{(n)}} - \lambda r(x_h^{(n)})\,\varphi_k(x_h^{(n)})] = 0, \tag{9}$$

detto $\mathcal{A}$ l'insieme degli autovalori del problema (1), $\mathcal{L}$ quello dei punti limite dell'insieme

$$\{\lambda_i^{(n)};\ i = 1, 2, \ldots, \varrho_n\}_N \tag{10}$$

e, infine, detta

$$G(x, \xi) \tag{11}$$

la funzione di Green relativa all'operatore differenziale $A\,u = u^{(m)}$,

$u \in \mathcal{U}$, abbiamo dimostrato i due teoremi seguenti:

TEOREMA I. *Se è verificata la seguente ipotesi:*

a) Per ogni $f \in C^0[a, b]$, *l'equazione* $Lu = f$ *è un* $\mathcal{U}$ *risolubile univocamente;*
allora risulta

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}\,(^1),$$

TEOREMA II. *Se all'ipotesi a) del teorema* I *si aggiunge la:*

b) La funzione $r(x) \cdot G(x, \xi)$ *è limitata sul quadrato* $[a, b] \times \times [a, b]$;
allora risulta

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}\,(^2).$$

2. Ferme restando le altre notazioni e posizioni del n⁰ 1, il problema (1) sia ora sostituito dal problema più generale seguente:

$$(1') \qquad Lu - \lambda r\, Mu = 0, \quad u \in \mathcal{U}$$

essendo M un operatore integrale a nucleo

$$(12) \qquad F(x, \xi)$$

limitato sul quadrato $[a, b] \times [a, b]$;
la condizione 2) sia sostituita dalla

2') per ogni n risulta

$$(5') \qquad \det. [(M\varphi_k)_{x_h^{(n)}}] \neq 0$$

e, infine, la (9) dalla equazione

$$(9') \qquad \det. [(L\varphi_k)_{x_h^{(n)}} - \lambda r\,(x_h^{(n)})\;(M\varphi_k)_{x_h^{(n)}}] = 0.$$

Supposte verificate la 1) e la 2'), sussistono, allora, in relazione al problema (1'), i due teoremi del n⁰ 1, purché l'ipotesi *b*) del teorema II sia sostituita dalla:

(1) In [1], in queste circostanze, parlavamo di *convergenza* del metodo di collocazione.

(2) In [1], in queste circostanze, parlavamo di *completa convergenza* del metodo di collocazione.

b′) La funzione $r(x)\cdot F(x,\xi)$, è limitata sul quadrato $[a,b]\times$ $\times[a,b]$.

A giusificare quanto asserito basta osservare che valgono immutate in [1] tutte le considerazioni del n° 3 ([3]), tener conto in [1] ([4]), nelle dimostrazioni dei teoremi I e II, delle necessarie modifiche di carattere puramente formale e sostituire in [1], al n° 4, le due matrici Φ_n e Ψ_n rispettivamente con le matrici

$$M\Phi_n = \begin{bmatrix} (M\varphi_0)_{x_1^{(n)}} & \cdots & (M\varphi_{n-1})_{x_1^{(n)}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (M\varphi_0)_{x_n^{(n)}} & \cdots & (M\varphi_{n-1})_{x_n^{(n)}} \end{bmatrix},$$

$$M\Psi_n = \begin{bmatrix} (M\psi_0)_{x_1^{(n)}} & \cdots & (M\psi_{n-1})_{x_1^{(n)}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ (M\psi_0)_{x_n^{(n)}} & \cdots & (M\psi_{n-1})_{x_n^{(n)}} \end{bmatrix},$$

3. Consideriamo, ad esempio, il problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[(1-x^7)\,u'] + \lambda\, x^7\, u = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(x) \text{ limitata in } [0,1], \end{cases}$$

introdotto da H. Latzko in una ricerca [2] sulla conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza.

Come facilmente si osserva, a detto problema può darsi la forma (equivalente)

$$\begin{cases} Lu - \lambda r\, Mu = 0, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

con

$$L = \frac{d}{dx}, \qquad r(x) = \frac{1}{1-x^7}, \qquad F(x,\xi) = \begin{cases} \xi^7, & \text{per } 0 \le x \le \xi \le 1 \\ 0, & \text{per } 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}.$$

([3]) Salvo sostituire, nella (7), l'operatore integrale K, di nucleo $G(x,\xi)$, con l'operatore

$$\widetilde{K} = M \circ K,$$

composto con i due operatori M e K.

([4]) Vedi il n° 4 e il n° 5.

La 1) è ovvia; la 2') si traduce subito nella condizione:

$$\det.[1 - (x_h^{(n)})^{9+k}] \neq 0$$

che riesce, a sua volta, verificata (cfr. [7], n^0 3, prop. III).

L'ipotesi *a*) e *b'*) sussistono entrambe, onde risulta $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ (5).

Scelti i punti (6) negli n zeri del polinomio $T_n(2x-1)$, essendo $T_n(x)$ il polinomio di Tchebyschev di 1^a specie di ordine n, i risultati numerici da noi ottenuti (6) per $n = 16, \dots, 20$, relativi ai primi 5 auto-

(5) Com'è noto [3], il problema di Latzko è traducibile nella seguente equazione integrale di Fredholm di 2^a specie:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 H(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{o}$$

a nucleo

$$H(x, \xi) = \begin{cases} \xi^7 \displaystyle\int_0^{\xi} \frac{d\eta}{1-\eta^7}, & \text{per } 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\[2ex] \xi^7 \displaystyle\int_0^{x} \frac{d\eta}{1-\eta^7}, & \text{per } 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

di Schmidt - Goursat.

Per una tale equazione, caso particolare di quella che figura nel problema (1') $\left(L = \frac{d^0}{dx^0}, r(x) \equiv 1\right)$ valgono tutte le ipotesi che garantiscono la tesi del teorema II. È, però, algoritmicamente assai più agevole applicare il metodo di collocazione al problema

$$\begin{cases} u' - \dfrac{\lambda}{1-x^7} \displaystyle\int_x^1 \xi^7 u(\xi)\, d\xi = 0 \\[2ex] u(0) = 0 \end{cases},$$

anziché all'equazione (o).

(6) I relativi calcoli sono stati eseguiti in doppia precisione (mantissa di 18 cifre) sull'elaboratore I. B. M. 1620, in dotazione dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.

Per quanto riguarda le modalità d'impiego del metodo di collocazione e gli accorgimenti di calcolo da noi utilizzati, cfr. [1].

valori del problema che, com'è noto [4], è dotato di una successione divergente di autovalori reali e positivi, sono riportati nella seguente tabella

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
16	8,727470352660	152,4230708869	435,063647	855,810	1403
17	8,727470352653	152,4230708795	435,063390	855,727	1412,7
18	8,727470352642	152,4230708789	435,063340	855,697	1414,3
19	8,727470352642	152,4230708786	435,063333	855,688	1414,4
20	8,727470352642	152,4230708786	435,063333	855,688	1414,4

Per un confronto riportiamo anche i valori proposti da W .H. Durfee [5] per i primi 5 autovalori (7) (valori che si accordano abbastanza bene con i risultati da noi conseguiti):

$$\lambda_1=8,72747\,; \quad \lambda_2=152,423\,; \quad \lambda_3=435,06\,; \quad \lambda_4=855,68\,; \quad \lambda_5=1414,1,$$

nonché i difetti e gli eccessi dei primi 3 autovalori indicati in [4] e ottenuti i primi, col metodo degli invarianti ortogonali dovuto a G. Fichera [6], i secondi col metodo di Rayleigh - Ritz:

	Difetti	Eccessi
λ_1	8,72072	8,72748
λ_2	125,645	152,462
λ_3	200,175	464,577

(7) Ottenuti partendo dallo sviluppo dell'integrale generale dell'equazione $\frac{d}{dx}\,[(1-x^7)u'] + \lambda\, x^7\, u=0$ e calcolandone le soluzioni che verificano le condizioni $u\,(0)=0$, $u\,(1)=1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BELLEN e S. GUERRA, *Il metodo di collocazione e il calcolo degli autovalori di problemi differenziali lineari ordinari. Teoremi di convergenza e applicazioni,* Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena (in corso di stampa).

[2] H. LATZKO, *Der Wärmübergaug an einen turbolenten Flüssigkeits order Gasstrom,* Zeits, für Ang. Math. und Mech., 1, (1921).

[3] G. SANSONE, *Sugli autovalori relativi ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza,* Annali di Matem. pura e appl., Bologna, LIII, (1961).

[4] F. SCARPINI, *Sul calcolo degli autovalori relativi ad una equazione differenziale inerente ad un problema di conduzione del calore,* Rend. Acc. Naz. Lincei, Nota I e II, XXXVIII, (1965).

[5] W. H. DURFEE, *Heat-Flow in a Fluid with Eddying Flow,* Jour. of Aerospaces Sciences, 23, (1965).

[6] G. FICHERA, *Sul calcolo degli autovalori,* Atti Simposio Applicazioni dell'Analisi della Fisica matematica, Cagliari-Sassari 1964, Edit. Cremonese, Roma, (1965).

[7] S. GUERRA, *Su alcuni determinanti collegati ad un particolare sistema algebrico,* (in corso di stampa).