MAGGIORAZIONE DI TALUNI INVARIANTI ORTOGONALI RELATIVI AD UN OPERATORE DIFFERENZIALE ORDINARIO DEL SECONDO ORDINE CON CONDIZIONI AI LIMITI DI TIPO GENERALE (*)

di CATERINA CASSISA (a Roma) (**)

SOMMARIO. - *Si considera un problema di autovalori per una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine con condizioni ai limiti di tipo generale. Si estende a tale problema un metodo per l'approssimazione per eccesso di taluni invarianti ortogonali. Viene fornito un procedimento per costruire le funzioni approssimanti richieste dal metodo.*

SUMMARY. - *An eigenvalue problem for a second order differential equation with general boundary conditions is considered. A method for the upper approximation of orthogonal invariants connected with the problem is expanded. A procedure for the construction of the approximating functions, required by the method, is given.*

Si consideri il seguente problema di autovalori relativo ad un operatore differenziale lineare ordinario autoaggiunto del secondo ordine e con condizioni ai limiti di tipo generale:

$$E(u) + \lambda u = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &\equiv \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = 0 \\ \varphi_1(u) &\equiv \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$E(u)$ essendo l'operatore così definito:

$$E(u) \equiv \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{du}{dx}\right] - c(x)\,u, \tag{3}$$

(*) Pervenuto in Redazione il 4 febbraio 1974.

(**) Indirizzo dell'Autore: Viale dei Colli Portuensi 83 - 00151 Roma.

con $\theta(x)$ e $c(x)$ funzioni reali di variabile reale rispettivamente appartenenti a $C^1[0,1]$ e $C^0[0,1]$ e tali che $\theta(x)>0$ e $c(x)>0$ in $[0,1]$. $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, sono costanti assegnate e verificanti opportune condizioni specificate in seguito. La u è ricercata nella classe delle funzioni appartenenti a $C^2[0,1]$.

In siffatte ipotesi gli autovalori del problema (1) - (2) costituiscono una successione non decrescente λ_k di numeri positivi divergente positivamente.

Sia $G(x,\xi)$ la funzione di Green del problema

$$E(u)=f, \quad \varphi_0(u)=\varphi_1(u)=0, \quad f\in\mathcal{L}^2(0,1),$$

e Γ l'operatore così definito

$$\Gamma f=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Si ponga:

$$G^{(1)}(x,\xi)=G(x,\xi), \quad G^{(n)}(x,\xi)=\int_0^1 G(x,t)\,G^{(n-1)}(t,\xi)\,dt \quad (n=2,3,\dots),$$

e

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma)=\int_0^1 G^{(n)}(x,x)\,dx \qquad (n=1,2,\dots).$$

Sia $\mathcal{U}$ la varietà lineare delle funzioni appartenenti a $C^1[0,1]$ e dotate di derivata prima assolutamente continua e con derivata seconda in $\mathcal{L}^2(0,1)$, e verificanti le (2). Sia $\{w_k\}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti in $[0,1]$, appartenenti a $\mathcal{U}$ e tali che $\{E(w_k)\}$ sia completo in $\mathcal{L}^2(0,1)$.

Per ogni fissato intero positivo ν siano $\lambda_1^{(\nu)}\leq\dots\leq\lambda_\nu^{(\nu)}$ le radici dell'equazione secolare:

$$\det\left\{\int_0^1 w_h\,E(w_k)\,dx+\lambda\int_0^1 w_h\,w_k\,dx\right\}=0 \quad (h,k=1,\dots,\nu).$$

Fissato n, si ponga:

$$\tau_k^{(\nu)}=\left\{\mathcal{J}_1^n(\Gamma)-\sum_{h=1}^{\nu}\frac{1}{[\lambda_h^{(\nu)}]^n}+\frac{1}{[\lambda_k^{(\nu)}]^n}\right\}^{-\frac{1}{n}}.$$

Si dimostra che (cfr. [4]):

$$\tau_k^{(\nu)} \leq \tau_k^{(\nu+1)} \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{(\nu+1)} \leq \lambda_k^{(\nu)},$$

e che

$$\lim_{\nu \to \infty} \tau_k^{(\nu)} = \lim_{\nu \to \infty} \lambda_k^{(\nu)} = \lambda_k .$$

Se non è esplicitamente nota la funzione di Green $G(x, \xi)$, il calcolo dei valori per difetto dei $\tau_k^{(\nu)}$, può ottenersi non appena sia nota una valutazione per eccesso, per almeno un valore di n, dell'invariante $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$.

In [2] è stato fornito un procedimento per approssimare quanto si vuole $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$, nel caso che il problema ai limiti sia quello relativo alle condizioni di Dirichlet:

$$u(0) = u(1) = 0.$$

In questa Nota vengono estesi, al caso generale delle condizioni del tipo (2), i risultati ottenuti in [2] e relativi alle valutazioni per eccesso degli invarianti $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$ $(n = 1, 2, 3)$.

Viene anche ottenuta una nuova limitazione per difetto dell'insieme caratteristico dell'operatore E che migliora quella ottenuta in [1].

1. Esistenza ed unicità della soluzione del problema al contorno per l'operatore E con condizioni ai limiti di tipo generale.

Sia E l'operatore definito dalla (3) con $\theta(x)$ e $c(x)$ verificanti le ipotesi assunte nell'introduzione. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale appartenente a $\mathcal{L}^2(0, 1)$, γ_0, γ_1, costanti reali, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, verificanti le

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0, \quad \alpha_0\beta_0 \leq 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \quad \alpha_1\beta_1 \geq 0. \tag{4}$$

Consideriamo il seguente problema al contorno per l'operatore E con condizioni ai limiti di tipo generale:

$$E(u) = f, \tag{5}$$

$$\varphi_0(u) = \gamma_0, \qquad \varphi_1(u) = \gamma_1. \tag{6}$$

Indicato con H_2 lo spazio delle funzioni appartenenti a $C^1[0, 1]$ e dotate di derivata prima assolutamente continua e con derivata seconda appartenente a $\mathcal{L}^2(0, 1)$, nelle ipotesi suddette sussiste il seguente teorema da ritenersi ben noto, ma del quale, per completezza, desideriamo qui dare la semplice dimostrazione:

I. *Il problema* (5) - (6) *ammette una ed una sola soluzione appartenente ad H_2.*

Se esistono due soluzioni del problema (5) - (6), la funzione differenza sarà soluzione del problema:

$$E(u) = 0, \tag{7}$$

$$\varphi_0(u) = \varphi_1(u) = 0. \tag{8}$$

Si ha, per la (7):

$$\int_0^1 \{u(x)[\theta(x) u'(x)]' - c(x) u^2(x)\} dx = 0,$$

e quindi

$$[u(x)\theta(x) u'(x)]_0^1 - \int_0^1 \theta(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^1 c(x) u^2(x) dx = 0.$$

A causa delle condizioni $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, sono possibili i seguenti casi:

$$- \theta(1)[u'(1)]^2 \beta_1/\alpha_1 + \theta(0)[u'(0)]^2 \beta_0/\alpha_0$$
$$- \int_0^1 \theta(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^1 c(x)[u(x)]^2 dx = 0,$$

$$- \theta(1)[u(1)]^2 \alpha_1/\beta_1 + \theta(0)[u'(0)]^2 \beta_0/\alpha_0$$
$$- \int_0^1 \theta(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^1 c(x)[u(x)]^2 dx = 0,$$

$$- \theta(1)[u'(1)]^2 \beta_1/\alpha_1 + \theta(0)[u(0)]^2 \alpha_0/\beta_0$$
$$- \int_0^1 \theta(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^1 c(x)[u(x)]^2 dx = 0,$$

$$- \theta(1)[u(1)]^2 \alpha_1/\beta_1 + \theta(0)[u(0)]^2 \alpha_0/\beta_0$$

$$- \int_0^1 \theta(x)[u'(x)]^2 dx - \int_0^1 c(x)[u(x)]^2 dx = 0,$$

rispettivamente se $\alpha_0 \alpha_1 \neq 0$, $\alpha_0 \beta_1 \neq 0$, $\beta_0 \alpha_1 \neq 0$, $\beta_0 \beta_1 \neq 0$.

In base alle ipotesi fatte sulle funzioni $\theta(x)$, $c(x)$ e sulle costanti $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, segue necessariamente $u(x) \equiv 0$. Ciò prova l'unicità.

Siano $v_1(x)$ e $v_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti della (7); posto $R(x, \xi) = (\theta(\xi) W(\xi))^{-1} [v_1(\xi) v_2(x) - v_1(x) v_2(\xi)]$, ove $W(\xi)$ è il determinante wronskiano delle due funzioni $v_1(x)$ e $v_2(x)$, la funzione

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + \int_0^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{9}$$

è soluzione dell'equazione differenziale (5) ed appartiene ad H_2. Imponendo le condizioni (6), si ottiene il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi_0(v_1) c_1 + \varphi_0(v_2) c_2 = \gamma_0 \\ & \varphi_1(v_1) c_1 + \varphi_1(v_2) c_2 = \\ & \qquad = \gamma_1 - \alpha_1 \int_0^1 R(1, \xi) f(\xi) d\xi - \beta_1 \int_0^1 R_x(1, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Considerata la matrice quadrata formata con i coefficienti del sistema (10), il suo determinante è certamente diverso da zero, in quanto, se così non fosse, il sistema

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi_0(v_1) c_1 + \varphi_0(v_2) c_2 = 0 \\ & \varphi_1(v_1) c_1 + \varphi_1(v_2) c_2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ammetterebbe una soluzione non nulla $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ e quindi in corrispondenza ad essa esisterebbe una funzione non identicamente nulla, soluzione della (7) con condizioni (8).

Pertanto esiste una soluzione verificante le condizioni (6) e in H_2.

2. Limitazione per difetto dell'insieme caratteristico.

Si consideri il problema di autovalori (1)-(2), con le α_i e β_i ($i=0,1$) verificanti le (4). Proviamo che:

II. *L'insieme caratteristico del problema* (1) -(2) *è limitato inferiormente da* $c_0 = \min\limits_{[0,1]} c(x)$ (1).

Si consideri la varietà lineare V così definita:

a) H_1, spazio delle funzioni assolutamente continue e aventi derivata prima appartenente a $\mathcal{L}^2(0,1)$ se $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$;

b) H_1', spazio delle funzioni di H_1 tali che $v(0)=0$ se $\beta_0=0$, $\beta_1 \neq 0$;

c) H_1'', spazio delle funzioni di H_1 tali che $v(1)=0$ se $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1=0$;

d) H_1^0, spazio delle funzioni di H_1 tali che $v(0) = v(1) = 0$ se $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$.

Si consideri in $V-\{0\}$ il funzionale

$$I(u) = \frac{\int_0^1 [\theta (u')^2 + cu^2]\, dx + p_0 [u(0)]^2 + p_1 [u(1)]^2}{\int_0^1 u^2\, dx},$$

ove p_0 e p_1 sono costanti non negative così definite:

$$p_0 = -\theta(0)\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad p_1 = \theta(1)\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{se } \beta_0 \neq 0, \ \beta_1 \neq 0;$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \theta(1)\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{se } \beta_0 = 0, \ \beta_1 \neq 0;$$

$$p_0 = -\theta(0)\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad p_1 = 0 \quad \text{se } \beta_0 \neq 0, \ \beta_1 = 0.$$

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 0 \quad \text{se } \beta_0 = 0, \ \beta_1 = 0.$$

(1) In [1] la limitazione considerata era $\frac{c_0}{2}$.

Con procedimenti classici si dimostra che il funzionale $I(u)$ è dotato di minimo in $V-\{0\}$, la funzione minimante v appartiene a $C^2\,[0,1]$ e posto $\lambda_1 = \min\limits_{V-\{0\}} I(u)$, v e λ_1 sono autofunzione e autovalore del problema (1) - (2). Inoltre λ_1 è il più piccolo autovalore di tale problema.

Si consideri il funzionale

$$\tilde{I}(u) = \frac{\int_0^1 [\theta_0 (u')^2 + c_0 u^2]\, dx}{\int_0^1 u^2\, dx},$$

ove

$$\theta_0 = \min_{[0,1]} \theta(x) \quad \text{e} \quad c_0 = \min_{[0,1]} c(x).$$

Sia $\tilde{\lambda}_1$ il minimo di $\tilde{I}(u)$ in V. Riesce $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$.

Sia $\tilde{v}$ una funzione di V tale che $\tilde{I}(\tilde{v}) = \tilde{\lambda}_1$; è

$$\tilde{\lambda}_1 = c_0 + \theta_0 \frac{\int_0^1 [\tilde{v}']^2\, dx}{\int_0^1 [\tilde{v}]^2\, dx}.$$

Riesce ovviamente $\tilde{\lambda}_1 \geq c_0$ e quindi

$$\lambda_1 \geq c_0 . \tag{11}$$

3. Maggiorazione della soluzione del problema al contorno.

III. *Sia u la soluzione del problema* (5) - (6). *Sussistono le seguenti formule di maggiorazione*:
se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$

$$\max_{[0,1]} |u(x)| \leq \max_{[0,1]} |px+q| + \left\{ \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} c(x)} + \frac{1}{[\min\limits_{[0,1]} c(x) \min\limits_{[0,1]} \theta(x)]^{1/2}} \right\}. \tag{12}$$

$$\cdot\left\{\int_0^1 [E(u) - p\theta'(x) + (px+q)\,c(x)]^2\,dx\right\}^{1/2},$$

ove

$$p = \frac{\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0}{\alpha_0(\alpha_1+\beta_1) - \alpha_1\beta_0}, \qquad q = \frac{(\alpha_1+\beta_1)\gamma_0 - \beta_0\gamma_1}{\alpha_0(\alpha_1+\beta_1) - \alpha_1\beta_0};$$

se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 0$

$$\max_{[0,1]} |u(x)| \leq \max_{[0,1]} |ax^2 + bx| \tag{13}$$

$$+\left\{\frac{1}{\min\limits_{[0,1]} c(x)} + \frac{1}{[\min\limits_{[0,1]} c(x)\,\min\limits_{[0,1]} \theta(x)]^{1/2}}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^1 [E(u) - 2a\,\theta(x) - (2ax+b)\,\theta'(x) + (ax^2+bx)\,c(x)]^2\,dx\right\}^{1/2},$$

ove

$$a = -\frac{\gamma_0}{2\beta_0} + \frac{\gamma_1}{2\beta_1}, \qquad b = \frac{\gamma_0}{\beta_0}.$$

Essendo

$$v(x) = v(\xi) + \int_\xi^x v'(t)\,dt,$$

integrando rispetto a ξ su $[0,1]$, si ha:

$$\int_0^1 v(x)\,d\xi = \int_0^1 v(\xi)\,d\xi + \int_0^1 d\xi \int_\xi^x v'(t)\,dt.$$

Pertanto si ottiene:

$$|v(x)| \leq \left|\int_0^1 v(\xi)\,d\xi\right| + \left|\int_0^1 d\xi \int_\xi^x v'(t)\,dt\right| \tag{14}$$

$$\leq \left|\int_0^1 v(\xi)\,d\xi\right| + \int_0^1 d\xi \left|\int_\xi^x v'(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 [v(\xi)]^2\,d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 [v'(t)]^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Sia $\mathcal{U}$ l'insieme delle funzioni di H_2, verificanti le (2).

Come è noto, definito in $H_2-\{0\}$ il funzionale

$$\mathcal{I}(v)=\left[\int_0^1[E(v)]^2\,dx\right]^{1/2}\cdot\left[\int_0^1 v^2\,dx\right]^{-1/2},$$

si ha che il suo minimo è il più piccolo autovalore per il problema (1) - (2).

Quindi, per il teorema II:

$$\left[\int_0^1[v(\xi)]^2\,d\xi\right]^{1/2}\le(c_0)^{-1}\left[\int_0^1[E(v)]^2\,dx\right]^{1/2}.$$

Si ricerca ora una maggiorazione per l'ultimo addendo della (14). Sia λ_1 il più piccolo autovalore per il problema (1) -(2). Essendo

$$-\int_0^1 vE(v)\,dx\ge\lambda_1\int_0^1 v^2\,dx,$$

si ha:

$$-\int_0^1 vE(v)\,dx\le\left[\int_0^1[v(x)]^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int_0^1[E(v)]^2\,dx\right]^{1/2}$$

$$\le(\lambda_1)^{-1/2}\left[-\int_0^1 v\,E(v)\,dx\right]^{1/2}\left[\int_0^1[E(v)]^2\,dx\right]^{1/2},$$

e quindi

$$-\int_0^1 v\,E(v)\,dx\le(\lambda_1)^{-1}\int_0^1[E(v)]^2\,dx.$$

Infine, essendo

$$-\int_0^1 v\,E(v)\,dx=-\int_0^1 v\,\{[\theta(x)\,v'(x)]'-c(x)\,v\}\,dx$$

$$=[-\theta(x)\,v(x)\,v'(x)]_0^1+\int_0^1\{\theta(x)\,[v'(x)]^2+c(x)\,v^2\}\,dx$$

$$\geq \int_0^1 \{\theta(x)[v'(x)]^2 + c(x)[v(x)]^2\}\, dx,$$

poiché

$$[-\theta(x)\, v(x)\, v'(x)]_0^1 \geq 0\,,$$

risulta

$$\int_0^1 [v'(x)]^2\, dx \leq \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} \theta(x)} \int_0^1 \{\theta(x)[v'(x)]^2 + c(x)[v(x)]^2\}\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} \theta(x)} \left(-\int_0^1 v\, E(v)\, dx\right) \leq \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} \theta(x) \cdot \lambda_1} \int_0^1 [E(v)]^2\, dx.$$

Pertanto, se v appartiene a $\mathcal{U}$, riesce:

$$\text{(15)} \quad \max_{[0,1]} |v(x)| \leq \left[\frac{1}{\min\limits_{[0,1]} c(x)} + \frac{1}{[\min\limits_{[0,1]} \theta(x) \cdot \min\limits_{[0,1]} c(x)]^{1/2}}\right] \left[\int_0^1 [E(v)]^2\, dx\right]^{1/2}.$$

Se u e w sono due funzioni di H_2 verificanti le (6), la funzione differenza $v = u - w$ appartiene a $\mathcal{U}$ e si ha $E(v) = E(u) - E(w)$.

Sia $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$.

Si ricerca una funzione lineare $w(x) = px + q$ che verifichi le (6). Dovrà aversi

$$\begin{cases} \alpha_0 q + \beta_0 p = \gamma_0 \\ \alpha_1 (p + q) + \beta_1 p = \gamma_1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \beta_0 p + \alpha_0 q = \gamma_0 \\ (\alpha_1 + \beta_1) p + \alpha_1 q = \gamma_1. \end{cases}$$

Quindi, poiché nell'ipotesi fatta $(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0)$ risulta $\alpha_0 (\alpha_1 + \beta)_1 - \alpha_1 \beta_0 \neq 0$, si ha:

$$p = \frac{\alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0}{\alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \beta_0}\,, \qquad q = \frac{(\alpha_1 + \beta_1) \gamma_0 - \beta_0 \gamma_1}{\alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \beta_0}\,.$$

Riesce

$$\text{(16)} \qquad E(v) = E(u) - p\, \theta'(x) + (px + q)\, c(x)$$

e

$$\text{(17)} \qquad \max_{[0,1]} |u(x)| \leq \max_{[0,1]} |px + q| + \max_{[0,1]} |v(x)|\,.$$

Applicando la (15) alla funzione $v(x)$ e tenendo presente (16) e (17), si ottiene la (12).

Sia $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 0$.

Si ricerca una funzione $w(x)$ del tipo ax^2+bx, che verifichi le (6). Si ottiene:

$$\begin{cases} b\,\beta_0 = \gamma_0 \\ \beta_1\,(2a+b) = \gamma_1 \end{cases}$$

e cioè

$$b = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \qquad a = -\frac{\gamma_0}{2\beta_0} + \frac{\gamma_1}{2\beta_1}.$$

Essendo $v(x) = u(x) - (ax^2+bx)$, riesce

(18) $$E(v) = E(u) - 2a\,\theta(x) - (2ax+b)\,\theta'(x) + (ax^2+bx)\,c(x)$$

e

(19) $$\max_{[0,1]} |u(x)| \leq \max_{[0,1]} |ax^2+bx| + \max_{[0,1]} |v(x)|.$$

Applicando la (15) alla funzione $v(x)$ e tenendo presente (18) e (19), si ottiene la (13).

4. Funzione di Green del problema e traduzione del problema al contorno in equazione integrale.

Siano $v_1(x)$ e $v_2(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $E(u) = 0$. Costruiamo esplicitamente la funzione $u(x)$ soluzione del problema

(20) $E(u) = f$ (21) $\varphi_0(u) = \varphi_1(u) = 0.$

A tal fine è sufficiente imporre alla funzione u (9) di verificare le condizioni (21). Si ottiene il sistema di due equazioni lineari nelle incognite c_1 e c_2:

$$\begin{cases} \varphi_0(v_1)\,c_1 + \varphi_0(v_2)\,c_2 = 0 \\ \varphi_1(v_1)\,c_1 + \varphi_1(v_2)\,c_2 = \\ \qquad = -\alpha_1 \int_0^1 R(1,\xi)\,f(\xi)\,d\xi - \beta_1 \int_0^1 R_x(1,\xi)\,f(\xi)\,d\xi, \end{cases}$$

che fornisce per c_1 e c_2 i seguenti valori:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_0(v_2) \\ -\alpha_1 \int_0^1 R(1,\xi) f(\xi)\, d\xi - \beta_1 \int_0^1 R_x(1,\xi) f(\xi)\, d\xi & \varphi_1(v_2) \end{vmatrix}}{\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_1(v_1)\,\varphi_0(v_2)},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_0(v_1) & 0 \\ \varphi_1(v_1) & -\alpha_1 \int_0^1 R(1,\xi) f(\xi)\, d\xi - \beta_1 \int_0^1 R_x(1,\xi) f(\xi)\, d\xi \end{vmatrix}}{\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_1(v_1)\,\varphi_0(v_2)}.$$

Quindi, tenendo presente che è costante in $[0, 1]$ il prodotto $\theta(x)$, $W(x)$ si ha:

$$u(x) = \frac{\varphi_0(v_2)}{\theta(1)\,W(1)} \cdot \frac{\varphi_1(v_2)\int_0^1 v_1(\xi)\, v_1(x) f(\xi)\, d\xi - \varphi_1(v_1)\int_0^1 v_2(\xi)\, v_1(x) f(\xi)\, d\xi}{\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_1(v_1)\,\varphi_0(v_2)}$$

$$- \frac{\varphi_0(v_1)}{\theta(1)\,W(1)} \cdot \frac{\varphi_1(v_2)\int_0^1 v_1(\xi)\, v_2(x) f(\xi)\, d\xi - \varphi_1(v_1)\int_0^1 v_2(\xi)\, v_2(x) f(\xi)\, d\xi}{\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_1(v_1)\,\varphi_0(v_2)}$$

$$+ \frac{1}{\theta(1)\,W(1)} \int_0^x v_1(\xi)\, v_2(x) f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{\theta(1)\,W(1)} \int_0^x v_1(x)\, v_2(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Posto

$$(22) \quad G(x,\xi) \begin{cases} = -\dfrac{\varphi_0(v_2)\,[\varphi_1(v_2)\, v_1(\xi)\, v_1(x) - \varphi_1(v_1)\, v_2(x)\, v_1(\xi)]}{\theta(1)\,W(1)\,[\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_0(v_2)\,\varphi_1(v_1)]} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \leq x \\ + \dfrac{\varphi_0(v_1)\,[\varphi_1(v_2)\, v_1(x)\, v_2(\xi) - \varphi_1(v_1)\, v_2(\xi)\, v_2(x)]}{\theta(1)\,W(1)\,[\varphi_0(v_1)\,\varphi_1(v_2) - \varphi_0(v_2)\,\varphi_1(v_1)]} \end{cases}$$

$$(22') \quad G(x,\xi) \begin{cases} = -\dfrac{\varphi_0(v_2)[\varphi_1(v_2)v_1(\xi)v_1(x) - \varphi_1(v_1)v_2(\xi)v_1(x)]}{\theta(1)W(1)[\varphi_0(v_1)\varphi_1(v_2) - \varphi_0(v_2)\varphi_1(v_1)]} + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \leq \xi \\ + \dfrac{\varphi_0(v_1)[\varphi_1(v_2)v_1(\xi)v_2(x) - \varphi_1(v_1)v_2(\xi)v_2(x)]}{\theta(1)W(1)[\varphi_0(v_1)\varphi_1(v_2) - \varphi_0(v_2)\varphi_1(v_1)]} \end{cases}$$

si ottiene:

$$(23) \qquad u(x) = -\int_0^1 G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Sussiste il seguente teorema:

IV. *Se si considerano* $v_1(x)$ *e* $v_2(x)$ *tali che*

$$(24) \quad E(v_1) = 0 \qquad\qquad (25) \quad E(v_2) = 0$$

$$(24') \quad v_1(1) = \beta_1,\ v_1'(1) = -\alpha_1 \qquad (25') \quad \varphi_0(v_2) = 0,\quad \varphi_1(v_2) = 1$$

la soluzione del problema (20) - (21) *è data da* (23) *con*

$$(26) \qquad G(x,\xi) \begin{cases} = v_1(x)\, v_2(\xi)/\theta(1) & \xi \leq x \\ = v_1(\xi)\, v_2(x)/\theta(1) & x \leq \xi\,. \end{cases}$$

Le $v_1(x)$ *e* $v_2(x)$ *sono non negative in* $[0,1]$, *e riesce*

$$\max_{[0,1]} v_1(x) = v_1(0), \qquad \max_{[0,1]} v_2(x) = v_2(1).$$

Osserviamo che se $v_1(x)$ e $v_2(x)$ verificano le (24′) e (25′), riesce $\alpha_0 v_1(0) + \beta_0 v_1'(0) \equiv \varphi_0(v_1) \neq 0$ e $W(1) = 1$. Basta solo osservare che se $\alpha_1 \neq 0$, si ha:

$$W(1) = \begin{vmatrix} v_1(1) & v_2(1) \\ v_1'(1) & v_2'(1) \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_1} \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ v_1'(1) & v_2'(1) \end{vmatrix} = 1,$$

e se $\beta_1 \neq 0$, si ha:

$$W(1) = \begin{vmatrix} v_1(1) & v_2(1) \\ v_1'(1) & v_2'(1) \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta_1} \begin{vmatrix} v_1(1) & v_2(1) \\ \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \end{vmatrix} = 1.$$

Pertanto dalle (22) - (22′) si trae la (26).

Senza ledere alla generalità dei casi, supporremo $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$.

Osserviamo che se v è soluzione dell'equazione $E(v)=0$, v non può avere nè un massimo positivo nè un minimo negativo all'interno dell'intervallo $[0, 1]$; infatti da $\theta(x)\, v''(x) + \theta'(x)\, v'(x) = c(x)\, v(x)$, si avrebbe in un tal punto, sia esso x_0 : $\theta(x_0)\, v''(x_0) = c(x_0)\, v(x_0)$.

Per conseguire l'ultima affermazione, distinguiamo i tre casi:

a) $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$;

b) $\alpha_1>0$, $\beta_1=0$;

c) $\alpha_1=0$, $\beta_1>0$.

Nei primi due casi, essendo $v_1'(1)=-\alpha_1<0$, la funzione $v_1(x)$ è decrescente in un intorno sinistro del punto 1; essendo $v_1(1)=\beta_1\geq 0$, possiamo asserire che $v_1(x)$ ha un massimo positivo in $[0, 1]$. Non potendo avere $v_1(x)$ un massimo positivo in $(0, 1)$, $v_1(x)$ risulta non negativa in tutto l'intervallo $[0, 1]$ e assume il massimo in $x=0$.

Nel caso *c*), essendo $[\theta(x)\, v_1'(x)]' = c(x)\, v_1(x)$, la funzione $\theta(x)\, v_1'(x)$ risulta crescente in un intorno sinistro di $x=1$; si avrà quindi in tale intorno $v_1'(x) < v_1'(1)=0$. Si può allora ripetere il ragionamento fatto nel caso precedente.

Relativamente alla funzione $v_2(x)$, osserviamo preliminarmente che risulta $v_2'(0)\, v_2'(0)\geq 0$ e che almeno uno dei valori $v_2(1)$ e $v_2'(1)$ è positivo. I seguenti tre casi non possono presentarsi:

$$v_2(0) < 0, \quad v_2'(0) = 0$$

$$v_2(0) < 0, \quad v_2'(0) < 0$$

$$v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) < 0,$$

in quanto la funzione $v_2(x)$ avrebbe o un minimo negativo o un massimo positivo all'interno dell'intervallo $[0, 1]$. Nei restanti casi

$$v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) > 0$$

$$v_2(0) > 0, \quad v_2'(0) = 0$$

$$v_2(0) > 0, \quad v_2'(0) > 0,$$

con ragionamenti analoghi possiamo asserire che la funzione $v_2(x)$ risulta sempre non negativa e assume il massimo in $x=1$. Il caso

$$v_2(0) = 0, \quad v_2'(0) = 0$$

è ovviamente escluso.

Sia $G(x,\xi)$ la funzione di Green del problema fornita dalle (22)-(22'). Essa è simmetrica e sempre positiva all'interno del quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$. Introdotto in $\mathcal{L}^2(0,1)$ l'operatore

$$\Gamma f = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{27}$$

e considerato il problema di autovalori

$$\Gamma f - \mu f = 0, \qquad f \in \mathcal{L}^2(0,1), \tag{28}$$

si vede facilmente che tutti gli autovalori di Γ sono positivi; basterà a questo scopo provare che per ogni funzione $f \in \mathcal{L}^2(0,1)$, riesce:

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x,\xi) f(x) f(\xi)\, dx\, d\xi \geq 0, \tag{29}$$

il segno uguale sussistendo se e solo se f è quasi ovunque nulla in $(0,1)$. Si ha:

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x,\xi) f(x) f(\xi)\, dx\, d\xi = -\int_0^1 u\, E(u)\, dx$$

$$= [-u(x)\,\theta(x)\,u'(x)]_0^1 + \int_0^1 \theta(x)\,[u'(x)]^2\, dx + \int_0^1 c(x)\,[u(x)]^2\, dx.$$

Per le (4) e le (6) riesce $[-u(x)\,\theta(x)\,u'(x)]_0^1$ non negativo; ricordando inoltre che $c(x) > 0$ e $\theta(x) > 0$, se nella (29) valesse il segno uguale, si avrebbe:

$$[-u(x)\,\theta(x)\,u'(x)]_0^1 + \int_0^1 \theta(x)\,[u'(x)]^2\, dx + \int_0^1 c(x)\,[u(x)]^2\, dx = 0$$

e cioè $u \equiv 0$ in $[0,1]$, quindi $f = 0$ quasi ovunque in $(0,1)$.

Ciò permette di concludere che Γ è in $\mathcal{L}^2(0,1)$ un operatore compatto, simmetrico e strettamente positivo e quindi dotato di una successione $\{\mu_k\}$ di autovalori positivi convergente a zero.

Essendo $\mathcal{U}$ la varietà lineare di $\mathcal{L}^2(0,1)$ costituita dalle funzioni $f(x)$ appartenenti a $C^1[0,1]$ e dotate di derivata prima assolutamente continua e con derivata seconda di quadrato sommabile in $(0,1)$ e verificanti le $\varphi_0(u)=\varphi_1(u)=0$, la

$$f = E(u) \qquad u \in \mathcal{U}$$

e la relativa inversa

$$u = -\Gamma f \qquad f \in \mathcal{L}^2(0,1)$$

stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{L}^2(0,1)$. Posto $\mu = \frac{1}{\lambda}$, tutti e soli gli autovalori di (1) - (2) si ottengono (con le relative molteplicità) dagli autovalori di (29), ponendo $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

5. Rappresentazione degli invarianti ortogonali $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$ e valutazioni per eccesso di $\mathcal{J}_1^i(\Gamma)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Si può ora applicare il procedimento esposto in [2] per fornire una maggiorazione per eccesso degli invarianti $\mathcal{J}_1^i(\Gamma)$ $(i=1,2,3)$.

Posto

$$G^{(1)}(x,\xi) = G(x,\xi), \quad G^{(n)}(x,\xi) = \int_0^1 G(x,t)\, G^{(n-1)}(t,\xi)\, dt \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

risulta

$$G^{(n)}(x,\xi) = G^{(n)}(\xi,x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Essendo

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \mathcal{J}_1^1(\Gamma^n), \quad \mathcal{J}_1^1(\Gamma) = \int_0^1 G(x,x)\, dx,$$

$$\Gamma^n(f) = \int_0^1 G^{(n)}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

$$G^{(n)}(x_1, x_{n+1}) = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 G(x_1, x_2)\, G(x_2, x_3) \ldots$$
$$\ldots G(x_{n-1}, x_n)\, G(x_n, x_{n+1})\, dx_2 \ldots dx_n,$$

si ha:

$$\text{(30)} \quad \mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 G(x_1,x_2)\, G(x_2,x_3) \ldots G(x_{n-1},x_n)\, G(x_n,x_1)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Pertanto riesce:

$$\mathcal{J}_1^1(\Gamma) = \int_0^1 G(x, x)\, dx = [\theta(1)]^{-1} \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, dx. \tag{31}$$

Calcoliamo inoltre

$$\mathcal{J}_1^2(\Gamma) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_1^3(\Gamma).$$

Dalla (30) risulta:

$$\mathcal{J}_1^2(\Gamma) = \int_0^1 G^{(2)}(x_1, x_1)\, dx_1 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} [G(x_1, x_2)]^2\, dx_2 + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 [G(x_1, x_2)]^2\, dx_2$$

$$= [\theta(1)]^{-2} \int_0^1 dx_1 \left\{ \int_0^{x_1} [v_1(x_1)]^2 [v_2(x_2)]^2\, dx_2 + \int_{x_1}^1 [v_1(x_2)]^2 [v_2(x_1)]^2\, dx_2 \right\}$$

$$= 2\, [\theta(1)]^{-2} \left\{ \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x [v_2(y)]^2\, dy \right\}.$$

Per il calcolo dell'invariante $\mathcal{J}_1^3(\Gamma)$ si procede nel modo seguente:

$$\mathcal{J}_1^3(\Gamma) = \int_0^1 G^{(3)}(x_1, x_1)\, dx_1 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 G(x_1, x_2)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2$$

$$= [\theta(1)]^{-1} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 v_1(x_2)\, v_2(x_1)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 \right\}.$$

Quindi, se $x_1 \geq x_2$ si ha:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3$$

$$+\int_{x_2}^{x_1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 + \int_{x_1}^{1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3$$

$$= [\theta(1)]^{-2} \left\{ \int_0^{x_2} v_1(x_1)\, v_2(x_3)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3 \right.$$

$$\left. + \int_{x_2}^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_3)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3 + \int_{x_1}^{1} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3 \right\},$$

e se $x_1 \leq x_2$,

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 + \int_{x_2}^{1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3$$

$$= [\theta(1)]^{-2} \left\{ \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3 \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3 + \int_{x_2}^{1} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3 \right. .$$

Pertanto riesce:

$$(32) \quad \mathcal{J}_1^{3}(\Gamma) = \int_0^1 G^{(3)}(x_1, x_1)\, dx_1$$

$$= [\theta(1)]^{-1} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} v_1(x_2)\, v_2(x_1)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 \right\}$$

$$= [\theta(1)]^{-3} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, dx_2 \int_0^{x_2} v_1(x_1)\, v_2(x_3)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3 \right.$$

$$+ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, dx_2 \int_{x_2}^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_3)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3$$

$$+ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_2)\, dx_2 \int_{x_1}^{1} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3$$

$$+ \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} v_1(x_2)\, v_2(x_1)\, dx_2 \int_0^{x_1} v_1(x_1)\, v_2(x_3)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3$$

$$+ \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} v_1(x_2)\, v_2(x_1)\, dx_2 \int_{x_1}^{x_2} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_2)\, v_2(x_3)\, dx_3$$

$$\left. + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} v_1(x_2)\, v_2(x_1)\, dx_2 \int_{x_2}^{1} v_1(x_3)\, v_2(x_1)\, v_1(x_3)\, v_2(x_2)\, dx_3 \right\}.$$

I sei addendi all'ultimo membro della (32) sono fra loro eguali. Quindi

$$\mathcal{I}_1^3(\Gamma) = 6\,[\theta(1)]^{-3} \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x v_1(y)\, v_2(y)\, dy \int_0^y [v_2(z)]^2\, dz.$$

Riassumendo:

$$\mathcal{I}_1^1(\Gamma) = [\theta(1)]^{-1} \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, dx, \tag{33}$$

$$\mathcal{I}_1^2(\Gamma) = 2\,[\theta(1)]^{-2} \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x [v_2(y)]^2\, dy, \tag{34}$$

$$\mathcal{I}_1^3(\Gamma) = 6\,[\theta(1)]^{-3} \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x v_1(y)\, v_2(y)\, dy \int_0^y [v_2(z)]^2\, dz, \tag{35}$$

essendo v_1 e v_2 le funzioni introdotte a pag. 13.

Riesce:

$$\mathcal{J}_1^{(i)}(\Gamma) < Q_i + \varrho_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

essendo

(36) $$Q_1 = [\theta(1)]^{-1} \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx,$$

(37) $$Q_2 = 2\,[\theta(1)]^{-2} \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x [f_2(y)]^2\, dy,$$

(38) $$Q_3 = 6\,[\theta(1)]^{-3} \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz,$$

(39) $$\varrho_1 = [\theta(1)]^{-1} \left\{ \varepsilon_1 \int_0^1 f_2(x)\, dx + \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \right\},$$

(40) $$\varrho_2 = 2\,[\theta(1)]^{-2} \left\{ 2\varepsilon_1 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2^2(y)\, dy \right.$$

$$+ \varepsilon_1^2 \int_0^1 dx \int_0^x f_2^2(y)\, dy + 2\varepsilon_2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy$$

$$+ 4\varepsilon_1\varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy + 2\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2 \int_0^x dx \int_0^y f_2(y)\, dy$$

$$\left. + \varepsilon_2^2 \int_0^1 x f_1^2(x)\, dx + 2\varepsilon_1\,\varepsilon_2^2 \int_0^1 x f_1(x)\, dx + \frac{\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2}{2} \right\},$$

(41) $$\varrho_3 = 6\,[\theta(1)]^{-3} \left\{ 2\varepsilon_2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz \right.$$

$$+ \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x y f_1(y) f_2(y)\, dy$$

$$+ \varepsilon_1 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz$$

$$+ 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x y f_2(y)\, dy + \varepsilon_2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz$$

$$+ 2\varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz + \varepsilon_2^3 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x y f_1(y)\, dy$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1^2(x)\, dx \int_0^x dy \int_0^y f_2(z)\, dz$$

$$+ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^3}{2} \int_0^1 x^2 f_1^2(x)\, dx + 2\varepsilon_1 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz$$

$$+ 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz$$

$$+ 2\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x y f_1(y) f_2(y)\, dy$$

$$+ 2\varepsilon_1^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz$$

$$+ 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz$$

$$+ 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x y f_2(y)\, dy + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2^2(z)\, dz$$

$$+4\varepsilon_1\varepsilon_2^2\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^x f_1(y)\,dy\int_0^y f_2(z)\,dz+2\varepsilon_1\varepsilon_2^3\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^x y f_1(y)\,dy$$

$$+2\varepsilon_1^2\varepsilon_2\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^x dy\int_0^y f_2^2(z)\,dz+4\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\int_0^1 f_1(x)\,dx\int_0^x dy\int_0^y f_2(z)\,dz$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_2^3\int_0^1 f_1(x)\,x^2\,dx+\varepsilon_1^2\int_0^1 dx\int_0^x f_1(y)\,f_2(y)\,dy\int_0^y f_2^2(z)\,dz$$

$$+2\varepsilon_1^2\varepsilon_2\int_0^1 dx\int_0^x f_1(y)f_2(y)\,dy\int_0^y f_2(z)\,dz+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\int_0^1 dx\int_0^x y f_1(y)f_2(y)\,dy$$

$$+\varepsilon_1^3\int_0^1 dx\int_0^x f_2(y)\,dy\int_0^y f_2^2(z)\,dz+2\varepsilon_1^3\varepsilon_2\int_0^1 dx\int_0^x f_2(y)\,dy\int_0^y f_2(z)\,dz$$

$$+\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2\int_0^1 dx\int_0^x y f_2(y)\,dy+\varepsilon_1^2\varepsilon_2\int_0^1 dx\int_0^x f_1(y)\,dy\int_0^y f_2^2(z)\,dz$$

$$+2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\int_0^1 dx\int_0^x f_1(y)\,dy\int_0^y f_2(z)\,dz+\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3\int_0^1 dx\int_0^x y\,f_1(y)\,dy$$

$$+\varepsilon_1^3\varepsilon_2\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f_2^2(z)\,dz+2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y f_2(z)\,dz+\frac{\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3}{6}\Bigg\},$$

dove $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni continue in $[0, 1]$ tali che

$$|v_i(x)-f_i(x)|<\varepsilon_i \qquad 0\le x\le 1, \qquad i=1,2,$$

ed ε_i arbitrari numeri positivi.

Infatti, essendo $v_i(x)<f_i(x)+\varepsilon_i$, basta maggiorare i secondi membri degli integrali (33), (34), (35).

I valori ε_1 ed ε_2 si possono calcolare in maniera esplicita.

Siano $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ funzioni appartenenti a H_2.

Poniamo:

$$u_1(x) = v_1(x) - f_1(x)$$

$$u_2(x) = v_2(x) - f_2(x);$$

le funzioni u_1 e u_2 sono soluzioni dei seguenti problemi:

$$\begin{array}{lcl} E(u_1) = -E(f_1) & & E(u_2) = -E(f_2) \\ u_1(1) = \beta_1 - f_1(1) & ; & \varphi_0(u_2) = -\varphi_0(f_2) \\ u_1'(1) = -(\alpha_1 + f_1'(1)) & & \varphi_1(u_2) = 1 - \varphi_1(f_2). \end{array}$$

Riesce:

$$(42)\qquad \varepsilon_1 = e^M \max_{[0,1]} \left| f_1(1) - \beta_1 + (\alpha_1 + f_1'(1))\,\theta(1) \int_1^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_1^x E(f_1)\left(\int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)}\right) dt \right| \text{ (2)}.$$

Per ε_2, se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$, possiamo applicare la (12); si ottiene:

$$(43)\qquad \varepsilon_2 = \max_{[0,1]} |px + q| + \left\{ \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} c(x)} + \frac{1}{[\min\limits_{[0,1]} c(x) \min\limits_{[0,1]} \theta(x)]^{1/2}} \right\} \left\{ \int_0^1 [E(u) - p\theta'(x) + (px + q)\,c(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}$$

(2) In [2] per la soluzione del problema $E(u_1) = f$, $u_1(1) = u_0$, $u_1'(1) = u_1$ è stata ottenuta la seguente formula di maggiorazione:

$$\max_{[0,1]} |u(x)| \leq e^M \max_{[0,1]} \left| u_0 + u_1\,\theta(1) \int_1^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_1^x f(t) \left(\int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right) dt \right|$$

ove

$$M = \max_{[0,1]} |c(x)| \int_0^1 \frac{d\xi}{\theta(\xi)}.$$

ove

$$p = \frac{\alpha_0 (1 - \varphi_1 (f_2)) + \alpha_1 \varphi_0 (f_2)}{\alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \beta_0},$$

$$q = - \frac{(\alpha_1 + \beta_1) \varphi_0 (f_2) + \beta_0 (1 - \varphi_1 (f_2))}{\alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \beta_0};$$

se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 0$, dalla (13) si ha:

$$(44) \quad \varepsilon_2 = \max_{[0,1]} | ax^2 + bx | + \left\{ \frac{1}{\min\limits_{[0,1]} c(x)} + \frac{1}{[\min\limits_{[0,1]} c(x) \min\limits_{[0,1]} \theta(x)]^{1/2}} \right\}$$

$$\left\{ \int_0^1 [E(u) - 2a\,\theta(x) - (2ax + b)\,\theta'(x) + (ax^2 + b)\,c(x)]^2\,dx \right\}^{1/2},$$

ove

$$a = \frac{\varphi_0 (f_2)}{2\beta_0} + \frac{1 - \varphi_1 (f_2)}{2\beta_1},$$

$$b = - \frac{\varphi_0 (f_2)}{\beta_0}.$$

Pertanto, scelte $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in H_2, si possono calcolare valori per eccesso degli invarianti ortogonali $\mathcal{I}_1^1(\Gamma)$, $\mathcal{I}_1^2(\Gamma)$, $\mathcal{I}_1^3(\Gamma)$.

Tuttavia nostro scopo è di trovare delle maggiorazioni di tali invarianti che siano tanto prossime ad essi quanto si vuole. A tal fine proveremo tra breve un teorema di completezza.

Indichiamo con X_2 lo spazio cartesiano reale a due dimensioni e con $H_m(0, 1), m \geq 0$ lo spazio hilbertiano (completo) delle funzioni $f(x)$ appartenenti a $C^{m-1}[0, 1]$, dotate di derivata $(m - 1)$-esima assolutamente continua e aventi derivata m-esima in $\mathcal{L}^2(0, 1)$, spazio nel quale il prodotto scalare è così definito:

$$(f, g)_m = \sum_{h=0}^{m} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} g(x)\,dx.$$

Sia $m \geq 2$; si consideri lo spazio

$$\mathcal{H} = H_{m-2}(0, 1) \oplus X_2$$

somma diretta degli spazi hilbertiani $H_{m-2}(0, 1)$ e X_2. $\mathcal{H}$ è ancora uno spazio hilbertiano (completo) nel quale, se $u=(f, x_1, x_2)$ e $v=(g, y_1, y_2)$ come prodotto scalare è stato, quindi, assunto il seguente:

$$(u, v) = (f; g)_{m-2} + x_1 y_1 + x_2 y_2 =$$

$$= \sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} g(x)\, dx + x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Indichiamo con $\{p_k(x)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ un sistema di funzioni appartenenti a $H_m(0, 1)$ e linearmente indipendenti, che sia completo in $H_m(0, 1)$; gli esempi che si possono portare di un tale sistema sono molteplici.

Sussiste il seguente teorema:

V. *Siano* $\theta(x)$ *e* $c(x)$ *funzioni appartenenti rispettivamente a* $C^{m-1}[0, 1]$ *e a* $C^{m-2}[0, 1]$, *con* $m \geq 2$; *se le costanti* $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ *verificano le condizioni*

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0, \quad \alpha_0 \beta_0 \leq 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \quad \alpha_1 \beta_1 \geq 0,$$

il sistema di funzioni

$$\{P_k(x)\} = \{E(p_k),\ \alpha_0 p_k(0) + \beta_0 p_k'(0),\ \alpha_1 p_k(1) + \beta_1 p_k'(1)\},$$

è completo in $\mathcal{H}$.

È sufficiente provare che se $u=(f, x_0, x_1)$ è un elemento di $\mathcal{H}$ tale che $(u, P_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$, necessariamente f è l'elemento nullo di $H_{m-2}(0, 1)$ e $x_0=x_1=0$ (3).

Indichiamo con w la soluzione del problema

$$E(w) = f, \qquad \alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = x_0, \qquad \alpha_1 w(1) + \beta_1 w'(1) = x_1 .$$

Essendo f in $H_{m-2}(0, 1)$, segue che w appartiene a $H_m(0, 1)$.

Poiché il sistema $\{p_k(x)\}$ è completo in $H_m(0, 1)$, esistono le costanti $c_k^{(n)}$ $(k=1, \ldots, n)$ tali che, posto:

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} p_k(x),$$

(3) Cfr. [6], p. 17, XV.

la successione $\{w_n(x)\}$ converge a $w(x)$ in $H_m(0, 1)$. Di conseguenza tutte le derivate, fino all'ordine $m-1$ incluso, della successione $\{w_n(x)\}$ convergono uniformemente in $[0, 1]$ alle rispettive derivate della funzione $w(x)$. Ne segue che la successione $\{E(w_n)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} E(p_k)\right\}$ converge in $H_{m-2}(0, 1)$ alla funzione $f = E(w)$ e per $x = 0$ riesce

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_0 w_n(0) + \beta_0 w_n'(0) = x_0$$

e per $x=1$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_1 w_n(1) + \beta_1 w_n'(1) = x_1 .$$

Dalla

$$(u, P_k) = \sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} E(p_k)\, dx +$$
$$+ x_0(\alpha_0 p_k(0) + \beta_0 p_k'(0)) + x_1(\alpha_1 p_k(1) + \beta_1 p_k'(1)) = 0$$

segue allora:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(u, P_k) = \sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} E(w_n)\, dx +$$
$$+ x_0(\alpha_0 w_n(0) + \beta_0 w_n'(0)) + x_1(\alpha_1 w_n(1) + \beta_1 w_n'(1)) = 0$$

e, al limite per $n\to\infty$,

$$\sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \left[\frac{d^h}{dx^h} f\right]^2 + x_0^2 + x_1^2 = 0 ;$$

cioè la tesi.

I teoremi IV di [2] ([4]) e V del presente lavoro permettono di costruire due successioni di funzioni $\{f_1^{(n)}(x)\}$ e $\{f_2^{(n)}\}$, tali che, indicati con $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$, $Q_3^{(n)}$, $\varrho_1^{(n)}$, $\varrho_2^{(n)}$, $\varrho_3^{(n)}$, $\varepsilon_1^{(n)}$, $\varepsilon_2^{(n)}$, i primi membri di (36), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43) o (44), quando si sostituisca ad $f_1(x)$ e $f_2(x)$ rispettivamente $f_1^{(n)}(x)$ e $f_2^{(n)}(x)$, riesca:

$$\lim_{n\to\infty} (Q_i^{(n)} + \varrho_i^{(n)}) = \mathcal{J}_1^{\,i}(\Gamma), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{46}$$

([4]) Il teorema IV in [2] afferma che:
Se $\theta(x)$ appartiene a $C^{m-1}[0, 1]$ e $c(x)$ appartiene a $C^{m-2}[0, 1]$, con $m \geq 2$, il sistema di funzioni: $\{P_k(x)\} = \{E(p_k), p_k(\xi), p_k'(\xi)\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, ove ξ è un punto fissato in $[0, 1]$, è completo in $\mathcal{H}$.

Se $\theta(x)$ appartiene a $C^{m-1}[0,1]$ e $c(x)$ appartiene a $C^{m-2}[0,1]$, possono assumersi come $f_1^{(n)}(x)$ e $f_2^{(n)}(x)$ le seguenti funzioni (n fissato):

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{1k}^{(n)} p_k(x), \qquad f_2^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{2k}^{(n)} p_k(x)$$

dove le costanti $c_{1k}^{(n)}$ e $c_{2k}^{(n)}$ sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari algebrici:

$$\sum_{k=1}^{n} [(E(p_h), E(p_k))_m + p_h(1) p_k(1) + p_h'(1) p_k'(1)] c_{1k}^{(n)} = \beta_1 p_h(1) - \alpha_1 p_h'(1)$$
$$(h = 1, \dots, n);$$

$$\sum_{k=1}^{n} [(E(p_h), E(p_k))_m + (\alpha_0 p_h(0) + \beta_0 p_h'(0))(\alpha_0 p_k(0) + \beta_0 p_k'(0)) +$$
$$+ (\alpha_1 p_h(1) + \beta_1 p_h'(1))(\alpha_1 p_k(1) + \beta_1 p_k'(1))] c_{2k}^{(n)} = \alpha_1 p_h(1) + \beta_1 p_h'(1)$$
$$(h = 1, \dots, n).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. P. COLAUTTI, *Sulla maggiorazione « a priori » delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine,* Rivista « Le Matematiche », vol. XI, fasc. I, 1956.

[2] M. P. COLAUTTI, *Formule di maggiorazione per taluni invarianti ortogonali connessi con il calcolo rigoroso degli autovalori di un problema ai limiti,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. IV, fasc. I, 1972.

[3] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari,* vol. I, Ist. di Matem. Univ. Trieste, 1954.

[4] G. FICHERA, *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems,* Lecture Notes in Mathem. N. 8, Spriger Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[5] G. FICHERA, *Il calcolo degli autovalori, Boll.* U. M. I., (4), vol. I, pp. 33-95, 1968.

[6] G. FICHERA, *Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori,* Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », Università degli Studi, Roma, 1969.

[7] S. H. GOULD, *Variational Methods for Eigenvalue Problems,* 2nd Edition, University of Toronto Press, 1966.

[8] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique,* vol. III, Gauthier-Villars, Paris, 1915.