UNA FORMULA PER IL CALCOLO NUMERICO DELLA TRASFORMATA DI HILBERT (*)

di ANTONIO CRISCI (a Bari)**

SOMMARIO. - *Si stabilisce la formula*

$$g_T^2(c+nT)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(c+nT+T)-f(c+nT-T)}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(c+nT+kT)-f(c+nT-kT)}{k}\right\}$$

per il calcolo numerico della trasformata di Hilbert g di una funzione f della classe H, introdotta in [1]. *La formula può fornire dei valori approssimati di g nei medesimi punti di f. È inoltre data una limitazione per l'errore e alcuni risultati sono riportati.*

SUMMARY. - *We find the formula*:

$$g_T^2(c+nT)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(c+nT+T)-f(c+nT-T)}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(c+nT+kT)-f(c+nT-kT)}{k}\right\},$$

for numerical calculus of Hilbert transform g of a function f belonging to the class H, introduced in [1]. *The formula can give approximate values of g in the same sampling points of f. A bound for error is given and some results reported.*

(*) Pervenuto in Redazione l'11 gennaio 1974.
Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.
(**) Indirizzo dell'autore: Istituto di Analisi Matematica dell'Università. 70100 Bari.

Introduzione.

In una precedente nota [1] si introduce una classe H di funzioni per le quali esiste la trasformata di Hilbert (1). Si dimostra che, se f appartiene ad H, la sua trasformata di Hilbert g può essere approssimata mediante la formula (2)

$$(*) \qquad g_{T/2}(c+nT) =$$
$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f\left(c+nT+\left(k+\frac{1}{2}\right)T\right)-f\left(c+nT-\left(k+\frac{1}{2}\right)T\right)}{2k+1}.$$

La (*), per ogni fissato c, consente di approssimare la g, solo, nei punti medi degli intervalli nei quali l'asse reale viene decomposto dai punti di campionamento della f. Ricordiamo che la (*) è la somma secondo Cauchy della serie ottenuta da altro autore sotto l'ipotesi che la f risulti di quadrato integrabile (3).

Abbiamo ritenuto non privo di interesse ricavare una formula che consenta di approssimare la trasformata di Hilbert negli stessi punti di campionamento della f. Introducendo una semplice variante al procedimento utilizzato in [1], si ottiene la formula

$$(**) \qquad g_T^2(c+nT)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(c+nT+T)-f(c+nT-T)}{2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(c+nT+kT)-f(c+nT-kT)}{k}\right\}$$

che risulta applicabile a funzioni della classe H.

1. Calcolo numerico della trasformata di Hilbert nella classe H.

Posto (4):

$$(1.1) \qquad g(x)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^T+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}\right)\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy$$

(1) Per tutte le notazioni usate si rimanda a [1].
(2) Cfr. [1], (3.5).
(3) Cfr. [3], 2.
(4) Cfr. [1], (2.2).

e approssimando gli integrali a secondo membro della (1.1), mediante la formula trapezoidale, si ha:

$$\int_0^T \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy \simeq$$

$$\simeq \frac{T}{2}\left(\frac{f(x+T)-f(x-T)}{T} + \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\right)$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\,dy \simeq$$

$$\simeq \frac{f(x+(k+1)T)-f(x-(k+1)T)}{2(k+1)} + \frac{f(x+kT)-f(x-kT)}{2k}\,.$$

Nell'ipotesi che, per ogni fissato x, la serie

(1.2) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x+kT)-f(x-kT)}{k}$$

converge, porremo:

(1.3) $$g_T^1(x) = \frac{1}{\pi}\left\{Tf'(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x+kT)-f(x-kT)}{k}\right\}.$$

Utilizzando per $f'(x)$ la seguente approssimazione:

(1.4) $$f'(x) \simeq \frac{f(x+T)-f(x-T)}{2T}$$

la (1.3) diventa:

(1.5) $$g_T^2(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(x+T)-f(x-T)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x+kT)-f(x-kT)}{k}\right\}.$$

Sostituendo nella (1.5) $c+nT$ ad x, con c numero reale qualsiasi, n intero relativo qualsiasi e T numero reale maggiore di zero, si ottiene la (**).

Per dimostrare la convergenza della (1.2) poniamo

$$\forall\, T>0 \qquad y_k = kT \qquad \text{per } k=0,1,2,\ldots$$

e introduciamo la funzione $\mu(y)$ così definita:

$$\mu(y) = y_k \qquad \forall \ y \in [y_k, y_{k+1}[.$$

Invocando, allora, il Teorema 2, dimostrato in [1], la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x+y_k) - f(x-y_k)}{y_k} (y_k - y_{k-1})$$

risulta convergente, qualunque sia x.

È appena il caso di far notare che, per tutti i punti x per i quali si disponga del valore $f'(x)$, e quindi, ovviamente, nei casi in cui la f sia nota analiticamente, sarà conveniente utilizzare la (1.3), al posto della (1.5), evitando, in tal modo, l'ulteriore errore introdotto dall'approssimaione (1.4).

2. Valutazione di un maggiorante dell'errore.

Indichiamo con E_x^1 ed E_x^2 gli errori che si commettono quando per il calcolo della g, in un generico punto x dell'asse reale, vengano utilizzate le (1.3) e (1.5) rispettivamente.

Se $|f|_0(x)$, $|f|_1(x)$, $|f|_2(x)$ sono le seminorme ([5]) introdotte in [1], posto:

$$K_x = \sup_{y \in [0,1]} |f'(x+y) + f'(x-y)|$$

con procedimento analogo a quello seguito in [1] nella dimostrazione del Teorema 3 e notando che, in questo caso, per $T \leq 1$ valgono le seguenti:

$$\left| \int_0^T \frac{f(x+y) - f(x-y)}{y} \, dy \right| \leq 2TK_x \log \frac{1}{T} + K_x T$$

e

$$\left| \int_T^1 \left(\frac{d}{dy} \frac{f(x+y) - f(x-y)}{y} \right) (y - \mu(y)) \, dy \right| \leq 2TK_x \log \frac{1}{T}$$

([5]) Cfr. [1], (1.2).

si ottengono le maggiorazioni:

$$|E_x^1| \leq \frac{T}{\pi}\left\{|f'(x)| + K_x\left(1 + 4\log\frac{1}{T}\right) + |f|_0(x) + |f|_1(x) + |f|_2(x)\right\}$$

e

$$|E_x^2| \leq \frac{T}{\pi}\left\{\frac{K_x}{2}\left(3 + 8\log\frac{1}{T}\right) + |f|_0(x) + |f|_1(x) + |f|_2(x)\right\}.$$

3. Risultati numerici.

In questo paragrafo riportiamo i risultati relativi al calcolo numerico della trasformata di Hilbert della funzione della classe $Hf(y) = \log(1+y^2)$. Utilizzando le (*) ed (**) si ottengono valori approssimati della funzione *arctg* (x) (6) negli stessi punti impegnando campioni diversi della funzione f. Si riportano in tabella i risultati ottenuti mediante un elaboratore 1130. Il simbolo m indica il valore dell'indice k a cui sono state troncate le serie che compaiono in (*) e (**). I simboli Δ_T e $\Delta_{T/2}$ indicano i valori delle differenze tra il valore analitico ed i valori numerici g_T^2 e $g_{T/2}$ rispettivamente.

TABELLA

$m = 800 \qquad T = .2$

n	$g_T^2(nT)$	$\Delta_T(nT)$	$g_{T/2}(nT)$	$\Delta_{T/2}(nT)$
0	0.0000000E 00	0.000000E0 00	0.0000000E 00	0.0000000E 00
1	0.1961534E 00	0.1242041E—02	0.1965855E 00	0.8099974E—03
2	0.3782812E 00	0.2225101E—02	0.3788868E 00	0.1619458E—02
3	0.5374733E 00	0.2946138E—02	0.5380052E 00	0.2414227E—02
4	0.6711481E 00	0.3592730E—02	0.6715033E 00	0.3237605E—02
5	0.7811472E 00	0.4250884E—02	0.7813642E 00	0.4033924E—02
10	0.1099148E 01	0.8000137E—02	0.1099141E 01	0.8007289E—02
20	0.1309822E 01	0.1599479E—01	0.1309815E 01	0.1600218E—01
30	0.1381679E 01	0.2396822E—01	0.1381689E 01	0.2395844E—01

(6) Cfr. [2], (4.10).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Crisci, *Sull'appicabilità di una formula per il calcolo numerico della trasformata di Hilbert,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, Vol. VI, fasc. I, (1974).

[2] A. Crisci, *Risoluzione numerica dì problemi di filtraggio statistico e predizione,* in corso di stampa. Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste, Vol. V, fasc. II, (1973).

[3] R. Vinciguerra, *Calcolo numerico delle trasformate di Hilbert ed applicazioni calcolo,* Vol. 4, fasc. 3, 453-484 (1967).