CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE MEDIO PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA (*)

di PAOLO DENTONI (a Parma) (**)

SOMMARIO. - *Si sviluppa, per le funzioni (non necessariamente analitiche) di una variabile complessa, un analogo del classico Calcolo differenziale e integrale reale, basato su un'estensione delle nozioni di derivata e integrale complessi (derivata media, integrale medio).*

SUMMARY. - *An analogous of the elementary Calcolus of a real variable is outlined for functions (non analytic, possibly) of a complex variable. The start-point is a generalized definition of the complex derivative (mean derivative), that for C^1 functions coincides with the formal operator $\partial/\partial \bar{z}$, and an analogous extension of the complex integral (mean definite integral). The principal results of the real Calculus remain valid in C. For analytic functions, in particular, one obtains new proofs of some classical theorems* (GOURSAT, MORERA).

1. Premesse.

La teoria delle funzioni analitiche, nata come versione complessa del calcolo differenziale e integrale classico, ne estende in realtà solamente la parte relativa alle funzioni sviluppabili in serie di potenze. In questo lavoro si intende costruire un calcolo differenziale e integrale per le funzioni, non necessariamente olomorfe, di una variabile complessa, analogo a quello elementare di una variabile reale. Il punto di partenza è una conveniente estensione delle definizioni di derivata e di integrale complessi.

Poiché per una funzione f di classe C^1 le derivate direzionali $f_\theta' = \lim\limits_{\varrho \to 0} \dfrac{f(a+\varrho e^{i\theta}) - f(a)}{\varrho e^{i\theta}}$ risultano in generale dipendenti da θ, appare

(*) Pervenuto in Redazione il 27 dicembre 1973.
Lavoro eseguito con contributo del CNR nell'ambito del Gruppo GNSAGA.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica - Università - 43100 Parma.

naturale riguardare come derivata *la media* $\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} f'_\theta(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'_\theta(a)\,d\theta$ delle derivate nelle varie direzioni. In questa forma, legata alla classe C^1, la definizione riesce però inutilmente restrittiva. Per questa ed altre ragioni risulta in effetti ben più conveniente permutare l'operazione di passaggio al limite con quella di media. Si assume pertanto come *derivata* $f'(a)$ *della funzione* f *nel punto* a *il limite per* $h \to 0$ *della media, rispetto all'argomento* θ *di* h, *del rapporto incrementale complesso* (Def. 1, n. 2), cioè

$$f'(a) = \lim_{\varrho\to 0} \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \frac{f(a+\varrho e^{i\theta}) - f(a)}{\varrho e^{i\theta}}. \tag{1}$$

In questa forma, la definizione appare come naturale estensione al campo complesso della *derivata simmetrica* reale $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ (1).

Per la definizione dell'integrale $\int_a^b f(z)\,dz$ in campo complesso, si presenta una difficoltà analoga, in quanto il suo valore dipende, in generale, se la funzione f non è olomorfa nel dominio considerato A, dalla scelta di un arco $\Gamma_{a,b}$ avente per estremi i punti a, b ed appartenente ad A. Come nel caso della derivata, riesce utile introdurre la nozione di *integrale curvilineo secondo una direzione* θ. Si intende con questo l'integrale $\int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\,dz$ esteso all'arco $\Gamma_{a,b,\theta}$ costituito dalla parte interna ad A delle due semirette uscenti da a, b con direzione θ, e da una porzione del contorno di A che le unisce (n. 3). Si assume allora come integrale $\int_a^b f(z)\,dz$ *la media degli integrali curvilinei con estremi a,b secondo le varie direzioni* , *cioè* (n. 3):

$$\int_a^b f(z)\,dz = \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\,dz. \tag{2}$$

(1) Il secondo membro della (1) può anche riguardarsi come un limite generalizzato, alla CESÀRO, del rapporto incrementale complesso.

Con queste definizioni, rimane valida in campo compiesso la parte essenziale del calcolo elementare reale. Si segnalano in particolare il *teorema del valor medio* (n. 11),con le ovvie conseguenze (derivazione di una successione termine a termine, derivazione sotto il segno, ecc.); e un analogo del *teorema fondamentale,* secondo cui le operazioni di derivazione e integrazione sono inverse l'una dell'altra (n. 6,7). Per le funzioni olomorfe, in particolare, da questi risultati discendono fra l'altro nuove dimostrazioni ed estensioni di teoremi classici (teorema di GOURSAT, di MORERA) (n. 7). È da notare, infine, lo stretto collegamento del calcolo differenziale e integrale medio con la teoria del potenziale piano. Infatti l'analoga reale 2-dimensionale della derivata media del secondo ordine (2), non è altro che l'operatore di LAPACE (n. 5). In particolare, il potenziale logaritmico di dominio è collegato con l'integrale definito complesso (cfr. n. 4).

2. Derivata complessa.

Nel seguito, si denota con $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ il corpo reale, complesso e con A un aperto limitato del piano complesso. Si denoterà spesso con $C(z, \rho)$ il cerchio *chiuso* di centro z e raggio ρ.

Si assume la seguente definizione:

DEF. 1. *Una funzione continua* (3) f: $A \to \mathbf{C}$ *si dice* $\mathcal{M}$*-derivabile in* A *se per ogni* $z \in A$ *esiste finito il limite*

$$(3)\qquad f'(z) = \lim_{\varrho \to 0} \underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{2\pi\varrho} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + \varrho e^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, d\theta.$$

La funzione f' si dice la *derivata media* (o semplicemente la derivata) di f, e si denota anche con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial z}$; mentre si dice *rapporto*

(2) La derivata media del primo ordine esiste solo in campo complesso.

(3) Il caso delle funzioni sommabili in A è esaminato nel lavoro [1].

incrementale medio di f, di centro z e raggio ρ, l'espressione

$$\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Ogni funzione olomorfa è $\mathcal{M}$-derivabile, e la sua derivata media coincide con la derivata ordinaria. Più in generale, *se f è $\mathbf{R}$-differenziabile in un punto $z=x+iy$ di A, essa è ivi $\mathcal{M}$-derivabile; e risulta* $f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. In particolare, *se f è antiolomorfa in A, risulta ivi $f'=0$.*

Invero, denotato con $z^*=x-iy$ il coniugato del numero complesso z, dalla relazione

$$df=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i^*}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz^*$$

segue immediatamente

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i^*}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{h^*}{h}+o(h)/h$$

onde l'asserto, poiché $\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{h^*}{h}=0$.

Assumendo orientazioni discordi nei piani sovrapposti delle variabili indipendente e dipendente, la Def. 1 diviene

DEF 1*. *Una funzione continua f: $A\to\mathbf{C}$ si dice $\mathcal{M}^*$-derivabile in A se per ogni $z\in A$ esiste finito il limite*

$$(4)\qquad f_*'(z)=\lim_{\varrho\to 0}\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h^*}=$$

$$=\lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{2\pi\varrho}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+\varrho e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta\,.$$

La funzione f_*' si dice la *derivata* (*media*) *inversa di f*, e si denota anche con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial z^*}$. Evidentemente, f riesce $\mathcal{M}^*$-derivabile in A se e solo se la funzione f^* risulta ivi $\mathcal{M}$-derivabile, e si ha $(f_*')^*=(f^*)'$.

Si noti che il rapporto incrementale medio può scriversi nella forma

$$\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{\pi\varrho^2}\frac{1}{2i^*}\int_{|w-z|=\varrho} f(w)\,dw^*. \tag{5}$$

Se ora nel secondo membro della (5) in luogo del cerchio $C(z, \rho)$ si considera un qualsiasi dominio regolare D contenente il punto z, si perviene alla nozione, più restrittiva, di *derivata areolare* di D. POMPEIU (1912) $\lim_{D\to z} \frac{1}{\text{mis}\, D}\frac{1}{2i^*}\int_{\partial D} f(w)\,dw^*$ (4). Il rapporto fra derivata media e derivata areolare è per certi aspetti analogo a quello fra derivata simmetrica e derivata ordinaria in $\mathbf{R}$. Tuttavia, come si vedrà nel seguito, in campo complesso è proprio la derivata simmetrica che consente di costruire la teoria più semplice e più unitaria.

3. Integrale definito complesso.

In questo numero, A è un aperto limitato e *convesso* del piano, con frontiera ∂A. Per ogni angolo $\theta\,(-\pi<\theta\leq\pi)$ e per ogni $z\in A$, si denota con z_θ il punto di intersezione di ∂A con la semiretta uscente da z nella direzione θ (5). Considerato il rettangolo coordinato circoscritto ad A, l'intervallo $[-\pi, \pi]$ può suddividersi in intervalli consecutivi in ciascuno dei quali, per la convessità di A, è facile verificare che le componenti x_θ, y_θ di z_θ riescono funzioni monotone di θ. Pertanto la funzione z_θ è variazione limitata in $[-\pi, \pi]$ (ed anche continua, tenuto conto che potrebbe al più avere discontinuità di prima specie e che ∂A è un insieme chiuso) onde *∂A è un arco continuo rettificabile.*

Considerata ora una qualunque coppia di punti $a, b\in A$, si denota con $\Gamma_{a,b,\theta}$ l'arco avente primo estremo in a, secondo estremo in b e

(4) Questa nozione di derivata è stata studiata da N. TEODORESCU, [7], [8], I. N. VEKUA, [9], G. FICHERA, [2], ed altri Autori. Dal punto di vista areolare si preferisce spesso assumere come derivata fondamentale $\frac{\partial f}{\partial z^*}$ anziché $\frac{\partial f}{\partial z}$.

(5) Si verifica facilmente che ogni retta che abbia intersezione non vuota con un aperto convesso e limitato del piano incontra la sua frontiera esattamente in due punti.

costituito dal segmento orientato $\overline{aa_\theta}$, dall'arco orientato $\widehat{a_\theta b_\theta}$, luogo dei punti $z_\theta \in \partial A$ al variare di z nel segmento $\overline{ab}$, e dal segmento orientato $\overline{b_\theta b}$. Si verifica immediatamente la relazione

$$(6) \qquad \Gamma_{a,b,\theta} + \Gamma_{b,c,\theta} = \Gamma_{a,c,\theta}$$

per ogni terna di punti $a, b, c \in A$.

Ciò premesso, sia f una funzione continua nella chiusura $\overline{A}$ di A, a valori complessi. L'integrale curvilineo $\int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\, dz$ si dice *l'integrale di f in A tra gli estremi a, b nella direzione θ.* Si assume allora come *integrale definito di f in A tra gli estremi a, b* la *media* degli integrali nelle varie direzioni, cioè

$$(7) \qquad \int_a^b f(z)\, dz = \underset{-\pi \le \theta \le \pi}{\mathcal{M}} \int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\, dz.$$

Quando la scelta di A non appaia chiaramente dal contesto, si userà in luogo della (7) la notazione più completa $\int_{A\,a}^{b} f(z)\, dz$.

Conviene osservare che per l'integrale definito complesso valgono le consuete proprietà formali. In particolare, dalle (6), (7) si hanno le relazioni

$$(8) \qquad \int_a^a f(z)\, dz = 0, \int_a^b f(z)\, dz + \int_b^c f(z)\, dz = \int_a^c f(z)\, dz$$

per ogni terna di elementi $a, b, c \in A$. Dalla (7) si ottiene poi immediatamente la disuguaglianza elementare

$$(9) \qquad \left| \int_{A\,a}^{b} f(z)\, dz \right| \le (2\delta_A + L_A) \sup_{z \in \overline{A}} |f(z)|$$

essendo δ_A, L_A il diametro e il perimetro di A.

Se la funzione f è olomorfa in A, la definizione ora data coincide ovviamente con quella classica, non dipendendo l'integrale $\int_{\Gamma_{a,b,\theta}} f(z)\, dz$

dalla direzione θ. In questo caso, anzi, l'integrale $\int\limits_{A\ a}^{b} f(z)\, dz$ risulta indipendente da A. Questa proprietà è caratteristica delle funzioni olomorfe, come risulta dalla seguente proposizione, versione inconsueta del classico teorema di MORERA:

PROP. 1. *Sia f continua nell'aperto A, a, b punti di A, A' un arbitrario aperto convesso di A contenente i punti a, b. Condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale $\int\limits_{A'\ a}^{b} f(z)\, dz$ resti costante al variare di $A' \subset A$ è che f sia olomorfa in A.*

Occorre provare la sufficienza della condizione. Posto $F(z) = \int\limits_{a}^{z} f(w)\, dw$ per la (8) può sciversi, per ogni $z_0 \in A$

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int\limits_{A'\ z_0}^{z} [f(w) - f(z_0)]\, dw \right| . \tag{10}$$

Assunto ora A' coincidente con il cerchio di centro z_0 e raggio $2|z - z_0|$, dalla (10), tenuta presente la (9), discende immediatamente che F risulta olomorfa in A, con $F' = f$, onde l'asserto.

4. Applicazioni.

Si ottiene in questo numero un'utile formula, che esprime l'integrale definito complesso come somma di integrali del tipo di potenziale di dominio e di semplice strato.

Sia A un aperto limitato e convesso, con frontiera orientata in verso antiorario, $f \colon \bar{A} \to \mathbf{C}$ una funzione continua, a, b arbitrari punti di A. Denotato con s uno dei punti di intersezione della retta ab con ∂A, e con $\widehat{sa_\theta}, \widehat{sb_\theta}$ l'arco orientato su ∂A con primo estremo s e secondo estremo a_θ, b_θ, risulta

$$\Gamma_{a,b,\theta} = (\widehat{sb_\theta} + \overline{b_\theta b}) - (\widehat{sa_\theta} + \overline{a_\theta a}) \tag{11}$$

onde il calcolo di $\int_a^b f(z)\,dz$ si riconduce a quello di integrali del tipo

$$(12)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathfrak{M}} \int_{\widehat{sa_\theta}} f(z)\,dz, \quad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathfrak{M}} \int_{\overline{a_\theta a}} f(z)\,dz.$$

È conveniente assumere come origine, nel fascio di centro a, la retta orientata sa. In tal modo riesce $a_\theta = s$ per $\theta = -\pi$, e dalla formula di integrazione per parti per l'integrale di STIELTJES si ottiene (6)

$$\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathfrak{M}} \int_{\widehat{sa_\theta}} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\theta} f(a_\varphi)\,da_\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi}\,\theta \int_{-\pi}^{\theta} f(a_\varphi)\,da_\varphi\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta f(a_\theta)\,da_\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial} (\pi - \theta_{z,a}) f(z)\,dz$$

essendo $\theta_{z,a}$ $(-\pi \leq \theta_{z,a} \leq \pi)$ l'angolo della semiretta az nel fascio di centro a. Si perviene così alla relazione

$$(13)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathfrak{M}} \int_{\widehat{sb_\theta}-\widehat{sa_\theta}} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} (\theta_{z,b} - \theta_{z,a}) f(z)\,dz.$$

Ora, la differenza $\theta_{z,b} - \theta_{z,a}$ coincide con *l'angolo* (compreso fra $-\pi$ e π) *sotto cui è visto dal punto z il segmento orientato* $\overline{ab}$, ossia con l'argo-

(6) Cfr. p. es. S. SAKS [6], p. 102. Si tenga presente che la funzione $V(\theta) \doteq \int_{-\pi}^{\theta} f(a_\varphi)\,da_\varphi$ è continua e a variazione limitata, e che (per esempio mediante la considerazione delle somme di RIEMANN-STIELTJES) può provarsi la relazione $\int_{-\pi}^{\pi} \theta\,dV(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \theta f(a_\theta)\,da_\theta$.

mento principale $\arg\dfrac{z-b}{z-a}$. La (13) diviene in definitiva

$$(14)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \int_{\widehat{sb_\theta}-\widehat{sa_\theta}} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} f(z)\arg\frac{z-b}{z-a}\,dz.$$

Resta ora da calcolare il secondo integrale (12) . Risulta

$$(15)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \int_{a_\theta a} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{|a_\theta - a|} f(a+\varrho e^{i\theta})\,d\varrho e^{i\theta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_A \frac{f(z)}{z^*-a^*}\,d\sigma_z$$

essendo $d\sigma$ l'elemento d'area.

Dalle (11), (14), (15) si ottiene infine la *relazione*

$$(16)\qquad \int_a^b f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} f(z)\arg\frac{z-b}{z-a}\,dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_A f(z)\left[\frac{1}{z^*-b^*}-\frac{1}{z^*-a^*}\right]d\sigma_z\,.$$

Una prima conseguenza della (16) è che *l'integrale a primo membro è una funzione continua in $\overline{A}$ del suo estremo superiore b.* Invero, si riconosce immediatamente (ad. es. mediante il teorema della convergenza dominata di LEBESGUE) che tale è il primo integrale a secondo membro. Quanto al secondo integrale, è noto che esso risulta funzione continua di b in tutto il piano, antiolomorfa all'esterno di $\overline{A}$ e nulla all'infinito (7).

Conviene terminare con un'osservazione.

PROP. 2. *Nel caso particolare che l'aperto A sia circolare, e che la funzione f sia olomorfa in A, e continua in $\overline{A}$, i due integrali a secondo*

(7) Il secondo integrale a secondo membro della (16) è una ben nota espressione complessa legata al classico potenziale logaritmico di dominio. Esso interviene già nella teoria della derivata areolare (n. 2), ed è noto come l'*operatore integrale di* POMPEIU. Per uno studio sistematico di questo operatore, ved. I. N. VEKUA [10].

membro della (16) *riescono uguali, onde risulta*

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\frac{1}{\pi}\int_A f(z)\left[\frac{1}{z^*-b^*}-\frac{1}{z^*-a^*}\right]d\sigma_z\,.$$

Invero, tenuta presente la (8) non è restrittivo supporre che il punto a coincida col centro del cerchio A. Ora, denotata con g una primitiva olomorfa di f in A, i due integrali a secondo membro della (16) per definizione riescono rispettivamente uguali a

$$\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}}\,[g(b_\theta)-g(a_\theta)],\quad g(b)-g(a)-\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}}\,[g(b_\theta)-g(a_\theta)].$$

Si perviene all'asserto tenendo presente la relazione (teorema di GAUSS «eccentrico») $\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}}\, g(b_\theta)=\frac{g(b)+g(a)}{2}$, equivalente alla formula di POISSON.

5. La derivata seconda reale Δ.

Alcune proprietà delle funzioni complesse in un aperto del piano si ottengono più agevolmente riconducendole al caso di funzioni a valori reali.

L'idea di derivata media può considerarsi anche per le funzioni reali u di *una variabile reale 2-dimensionale* z. Nel caso del primo ordine essa non porta a nulla, poiché la media $\underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}}\, u'_\theta$ delle derivate direzionali reali u'_θ è identicamente zero (8). Conviene perciò passare direttamente alla derivata del secondo ordine, utilizzando sulle rette il *rapporto incrementale secondo simmetrico* (di SCHWARZ)

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\ (9).$$

Precisamente, data una funzione u continua in un aperto A del piano, a valori reali, si dice *rapporto incrementale medio reale del secondo*

(8) Si verifica facilmente, del resto, che nel piano un qualsiasi operatore differenziale lineare *reale*, del primo ordine, intrinseco, è identicamente nullo.

(9) Ved. p. es. A. ZYGMUND [11], p. 22.

ordine, di centro z e raggio ρ, della funzione u, l'espressione

$$(17)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \frac{u(z+\varrho e^{i\theta})+u(z-\varrho e^{i\theta})-2u(z)}{\varrho^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(z+\varrho e^{i\theta})+u(z-\varrho e^{i\theta})-2u(z)}{\varrho^2}\,d\theta$$

cioè la media dei rapporti incrementali di SCHWARZ nelle varie direzioni. Poiché può scriversi

$$(18)\qquad \underset{-\pi\leq\theta\leq\pi}{\mathcal{M}} \frac{u(z+\varrho e^{i\theta})+u(z-\varrho e^{i\theta})-2u(z)}{\varrho^2} = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z+\varrho e^{i\theta})\,d\theta - u(z)}{\varrho^2/2}$$

il rapporto incrementale medio reale appare anche come naturale estensione al piano del rapporto incrementale di SCHWARZ

$$\frac{\dfrac{1}{2}[f(x+h)+f(x-h)]-f(x)}{h^2/2} \quad \text{sulla retta.}$$

Sia ora

$$(19)\qquad \underline{\Delta}\, u(z) = \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z+\varrho e^{i\theta})\,d\theta - u(z)}{\varrho^2/2},$$

$$\overline{\Delta} u(z) = \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z+\varrho e^{i\theta})\,d\theta - u(z)}{\varrho^2/2}.$$

Quando $\underline{\Delta}\, u(z)$, $\overline{\Delta}\, u(z)$ sono uguali e finiti il valore comune $\Delta u(z)$ è la *derivata seconda reale della funzione u nel punto z.*

È immediato verificare che per le funzioni di classe C^2 risulta

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \text{ (}^{10}\text{)}.$$

Conviene ricordare per gli operatori $\underline{\Delta}, \overline{\Delta}$ la classica proposizione di SCHWARZ ([11]).

PROP. 3. *Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione continua* $u: A \to \mathbf{R}$ *sia subarmonica, superarmonica nell'aperto* A, *è che risulti* $\overline{\Delta} u(z) \geq 0$, $\underline{\Delta} u(z) \leq 0$ *per ogni* $z \in A$. *In particolare, se riesce identicamente* $\Delta u = 0$, u *è armonica in* A.

Sussiste poi, sotto forma di disuguaglianza, un analogo 2-dimensionale del teorema del valor medio di LAGRANGE ([12]). Precisamente:

([10]) Per le funzioni continue, la derivata seconda reale coincide, a meno di un fattore, con uno dei Laplaciani generalizzati considerati in teoria del potenziale. Cfr. p. es. L. L. HELMS [4], p. 63.

([11]) Per il caso 1-dimensionale, ved. p. es. A. ZYGMUND [11], p. 23. Cfr. anche, per il caso 2-dimensionale, T. RADÓ [5], 3.7.

([12]) Esempi banali mostrano che, già sulla retta, non sussiste per la derivata *simmetrica* un teorema di LAGRANGE nella forma classica di un'uguaglianza. D'altra parte, anche nel piano può introdursi una derivata non simmetrica per la quale il teorema di LAGRANGE può stabilirsi nella sua forma consueta. Precisamente, si dice *derivata in senso stretto* della funzione u nel punto a il limite

$$\Delta_s u(a) = \lim_{C(z,\varrho)\to a} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta - u(z)}{\varrho^2/2},$$

ove $C(z, \rho) \to a$ denota, nell'insieme di tutti i cerchi $C(z, \rho)$ contenenti a, la direzione $C(z', \rho') \leq C(z'', \rho'') \Leftrightarrow \rho' \geq \rho''$. Ovviamente, se esiste $\Delta_s u(a)$ esiste anche $\Delta u(a)$, e coincide con $\Delta_s u(a)$. Per la derivata Δ_s sussiste il seguente teorema del valor medio:

Sia u *una funzione continua nel cerchio* $|z - a| \leq \rho$ *ed esista* $\Delta_s u(z)$ *per ogni* z *interno al cerchio. Allora esiste un punto* c *interno al cerchio, per il quale risulta* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a + \varrho e^{i\theta})\, d\theta = u(a) + \dfrac{1}{2}\varrho^2 \Delta_s u(c)$.

Per la dimostrazione, tenuto conto di un risultato di P. HARTMAN - A. WINTNER [3], basta mostrare che la funzione $\Delta_s u$ gode della proprietà di DARBOUX, cosa che si prova senza difficoltà per assurdo, usando proprietà di compattezza. (Per la validità del risultato (*B*) di P. HARTMAN - A.WINTNER [3], occorre aggiungere all'ipotesi (iii *tre*) ad es. la proprietà di DARBOUX per $L(u)$).

TEOR. 1. *Sia u una funzione continua nell'aperto A. Denotato con* λ, Λ *l'estremo inferiore, superiore del rapporto incrementale medio reale* (18) *al variare in A del cerchio C* (z, ρ), *risulta*

$$\lambda = \inf_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) = \inf_{a \in A} \overline{\Delta} u(a) \tag{20}$$

$$\Lambda = \sup_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) = \sup_{a \in A} \overline{\Delta} u(a). \tag{21}$$

Inoltre, se $C(z, \rho) \subset A$ *ed esiste la derivata* $\dfrac{d}{d\mu} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z + \mu e^{i\theta})\, d\theta$ *per* $\mu = \rho$, *risulta*

$$\lambda \leq \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta \leq \Lambda. \tag{22}$$

La dimostrazione è molto simile a quella dell'analogo risultato del DINI relativo alla derivata ordinaria sulla retta ([13]). Precisamente, sia per ora $\inf_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) > -\infty$, e si consideri la funzione

$$v(z) = u(z) - \frac{1}{2} |z|^2 \inf_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) \tag{23}$$

che per la Prop. 3 riesce subarmonica in A. Per note proprietà può scriversi ([14]), per ogni cerchio $C(z, \rho) \subset A$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta - v(z) \geq 0, \quad \frac{d}{d\varrho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta \geq 0$$

ossia

$$\inf_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) \leq \frac{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta - u(z)}{\varrho^2/2}, \tag{24}$$

$$\inf_{a \in A} \underline{\Delta} u(a) \leq \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + \varrho e^{i\theta})\, d\theta$$

([13]) Ved. p. es. S. SAKS [6], p. 204.
([14]) Ved. p. es. T. RADÒ [5], 2.4.

e queste disuguaglianze sussistono anche per inf $\underline{\Delta} u = -\infty$. In particolare, dalla prima segue che $\inf_{a \in A} \underline{\Delta}\, u\,(a) \leq \lambda$, e si prova facilmente che il segno $<$ non può sussistere. È quindi $\lambda = \inf_{a \in A} \underline{\Delta}\, u\,(a)$. Analogamente per le altre relazioni (20), (21). La (22) discende poi subito dalla seconda delle (24) e dall'analoga per l'estremo superiore ([15]).

6. Il teorema fondamentale del Calcolo in campo complesso.

Il classico teorema fondamentale del Calcolo, secondo cui le operazioni di derivazione e di integrazione sono inverse l'una dell'altra, in campo complesso ammette diverse formulazioni, in relazione alla derivata f' o alla derivata seconda reale Δf ([16]).

È utile la definizione:

DEF. 2. *Sia A un aperto limitato con frontiera continua e rettificabile, orientata nell'ordinario verso positivo della topologia piana.*

Per ogni funzione continua $f \colon \bar{A} \to \mathbf{C}$, si dice trasformata olomorfa, antiolomorfa di f nell'aperto A la funzione

$$(25) \qquad \Omega_A f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(t)}{t - z}\, dt, \quad \Omega_A^* f(z) = \frac{1}{2\pi i^*} \int_{\partial A} \frac{f(t)}{t^* - z^*}\, dt^*.$$

Ciò premesso, sussiste il teorema:

TEOR. 2. *Siano A un aperto limitato e convesso del piano, ed $f \colon \bar{A} \to \mathbf{C}$ una funzione continua. Posto*

$$(26) \qquad F(z) = \int_a^z f(t)\, dt \qquad (a \in A),$$

la funzione F risulta $\mathcal{M}$-derivabile in A, e la sua derivata è uguale alla media fra la funzione integranda f e la sua trasformata olomorfa $\Omega_A f$,

([15]) Dal Teor. 1 discende l'analogo 2-dimensionale di un altro noto risultato del DINI. Precisamente, *se u è continua in A, e in un punto $a \in A$ una delle funzioni $\underline{\Delta} u$, $\overline{\Delta} u$ è continua, risulta $\underline{\Delta} u\,(a) = \overline{\Delta} u\,(a)$. In particolare esiste* $\Delta u\,(a)$ (ed esiste anzi in senzo stretto, cfr. nota ([12])).

([16]) L'operatore Δ si estende ovviamente alla funzione complessa f, applicandolo separatamente alle sue componenti.

cioè

$$F'(z) = \frac{f(z) + \Omega_A f(z)}{2}. \tag{27}$$

La (27) assume pertanto esattamente la forma classica $F' = f$ allora e solo allora che f risulta olomorfa in A.

Per la dimostrazione, tenuta presente la formula (16) del n. 4, si è condotti a considerare separatamente le funzioni

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A} f(w) \arg \frac{w - z}{w - a}\, dw, \quad F_2(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_A \frac{f(w)}{w^* - z^*}\, d\sigma_w. \tag{28}$$

La funzione F_1 è di classe C^∞ in A. In particolare, essa riesce $\mathcal{M}$-derivabile, e, tenuta presente l'identità $2i \arg t = \log t - \log t^*$ $(\arg t < \pi)$ si riconosce che risulta

$$F_1'(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(w)}{w - z} = \frac{1}{2}\Omega_A f(z). \tag{29}$$

Per quanto riguarda F_2, ricordata la (5) e tenuto conto del teorema di FUBINI e del teorema integrale di CAUCHY, può scriversi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\varrho^2}\frac{1}{2i^*}\int_{|t-z|=\varrho} F_2(t)\, dt^* &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi\varrho^2}\int_A f(w)\left[\frac{1}{2\pi i^*}\int_{|t-z|=\varrho} \frac{dt^*}{t^* - w^*}\right] d\sigma_w \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi\varrho^2}\int_{C(z,\varrho)} f(w)\, d\sigma_w. \end{aligned} \tag{30}$$

Per $\rho \to 0$ si ottiene

$$F_2'(z) = \frac{1}{2} f(z) \text{ [17]}. \tag{31}$$

Il teor. 2 è così dimostrato.

7. Ancora sul teorema fondamentale del Calcolo in campo complesso.

Una seconda forma del teorema fondamentale del Calcolo complesso riguarda la derivata seconda reale ΔF della funzione integrale F. Precisamente:

[17] La (31) è del resto già nota dalla teoria della derivata areolare (n. 2).

TEOR. 3. *Siano A un aperto limitato e convesso del piano, e $f: \bar{A} \to \mathbf{C}$ una funzione continua, $\mathcal{M}^*$-derivabile in A. Posto*

$$F(z) = \int_a^z f(t)\, dt \qquad (a \in A),$$

la funzione F possiede in A la derivata seconda reale ΔF, e questa risulta uguale alla derivata inversa f'_* della funzione integranda f.

Per la dimostrazione, tenute presenti le (16), (28) può scriversi per ogni $z \in A$

$$\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z+\varrho e^{i\theta})\, d\theta - F(z)}{\varrho^2/2} = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_2(z+\varrho e^{i\theta})\, d\theta - F_2(z)}{\varrho^2/2}$$

poiché la funzione F_1 data dalla (28) riesce armonica in A. Posto ora $t = z + \varrho e^{i\theta}$, si ha

$$\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z+\varrho e^{i\theta})\, d\theta - F(z)}{\varrho^2/2} = \frac{1}{\pi\varrho^2 i^*}\int_{|t-z|=\varrho} \frac{F_2(t) - F_2(z)}{t^* - z^*}\, dt^*$$

$$= \frac{1}{\pi\varrho^2 i^*}\int_{|t-z|=\varrho}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_A \frac{f(w)\, d\sigma_w}{(w^* - t^*)(w^* - z^*)}\right] dt^*$$

$$= \frac{1}{\pi\varrho^2}\int_A \frac{f(w)}{w^* - z^*}\left[\frac{1}{2\pi i^*}\int_{|t-z|=\varrho}\frac{dt^*}{t^* - w^*}\right] d\sigma_w$$

$$= \frac{1}{\pi\varrho^2}\int_{\sigma(z,\varrho)} \frac{f(w)}{w^* - z^*}\, d\sigma_w$$

onde

$$\text{(32)} \qquad \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z+\varrho e^{i\theta})\, d\theta - F(z)}{\varrho^2/2} = \frac{2}{\varrho^2}\int_0^{\varrho} \mathcal{M}_{|h|=\mu} \frac{f(z+h) - f(z)}{h^*}\, \mu\, d\mu.$$

Dala (32) segue ora facilmente l'asserto.

Come conseguenza immediata del Teor. 3, possono ora caratterizzarsi le funzioni con derivata identicamente nulla. Con riferimento alla derivata inversa, come riesce più comodo, il risutato è precisamente questo:

TEOR. 4. *Sia f una funzione continua ed $\mathcal{M}^*$-derivabile in un aperto A di $\mathbf{C}$, e risulti $f'_* = 0$ ovunque in A. Allora f è analitica in A* (18).

Invero, per il Teor. 3, tenuta presente la Prop. 3, la funzione $F(z) = \int_a^z f(t)\,dt$ riesce armonica in A. In particolare, F è di classe C^∞, onde risulta di classe C^∞ in A anche la funzione $f = 2F' - \Omega_A f$, che riesce pertanto funzione analitica di z in quanto soddisfa la condizione di CAUCHY-RIEMANN $f'_*(z) \equiv 0$.

8. Derivata inversa della funzione integrale.

Si cerca ora un'espressione per la derivata inversa F'_* della funzione integrale $F(z) = \int_a^z f(t)\,dt$.

Come al n. 6, ci si riduce a calcolare la derivata inversa delle funzioni F_1, F_2 date dalle (28). Per la funzione F_1 si ha immediatamente

$$(F_1)'_*(z) = -\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(w)}{w^* - z^*}\,dw. \tag{33}$$

Si ha poi per F_2

$$\frac{1}{2\pi\varrho}\int_{-\pi}^{\pi} F_2(z + \varrho\, e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\,\theta = \frac{1}{2\pi i^*}\int_{|t-z|=\varrho}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_A \frac{f(w)}{w^* - t^*}\,d\sigma_w\right]\frac{dt^*}{(t^* - z^*)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_A f(w)\left[\frac{1}{2\pi\, i^*}\int_{|t-z|=\varrho}\frac{dt^*}{(t^* - w^*)\,(t^* - z^*)^2}\right]d\sigma_w\,.$$

(18) Il Teor. 4 costituisce un'estensione del teorema di GOURSAT, del quale fornisce una semplicissima dimostrazione. Poiché inoltre la condizione $f'_* = 0$ può scriversi $\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\pi\varrho^2}\frac{1}{2i}\int_{|w-z|=\varrho} f(w)\,dw = 0$, il Teor. 4 appare anche come un'estensione del teorema di MORERA.

Come si verifica immediatamente, l'integrale più interno è nullo se w è interno al cerchio $C(z, \rho)$, e vale $-\dfrac{2\pi i^*}{(w^*-z^*)^2}$ se $w \in A \backslash C(z, \rho)$. Si ottiene perciò

$$\text{(34)} \qquad \underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{F_2(z+h)-F_2(z)}{h^*} = -\frac{1}{2\pi} \int_{A \backslash C(z, \varrho)} \frac{f(w)}{(w^*-z^*)^2} d\sigma_w ,$$

onde $\dfrac{\partial F_2}{\partial z^*}$ esiste se e solo se esiste il *valor principale* dell'integrale singolare a secondo membro.

Si perviene in definitiva alla formula

$$\text{(35)} \qquad F'_*(z) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(w)}{w^*-z^*} dw - \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_A \frac{f(w)}{(w^*-z^*)^2} d\sigma_w ,$$

nella quale la derivata a primo membro esiste se e solo se esiste l'integrale singolare a secondo membro.

9. Primitive. Formula fondamentale del Calcolo.

È naturale la definizione

DEF. 3. *Data una funzione continua* $f: \bar{A} \to \mathbf{C}$, *si dice* $\mathcal{M}$-*primitiva di* f *in* A *una qualsiasi funzione continua* $g: \bar{A} \to \mathbf{C}$ $\mathcal{M}$-*derivabile in* A, *con* $g' = f$.

Analogamente si definiscono le $\mathcal{M}^*$-primitive di f.

Dal Teor. 4 discende immediatamente che *due qualsiasi* $\mathcal{M}$-*primitive* g_1, g_2 *di* f *differiscono per una funzione antiolomorfa in* A *e continua in* $\bar{A}$. In particolare, g_1, g_2 risultano coincidenti se hanno uguali trasformate antiolomorfe $\Omega_A{}^* g_1$, $\Omega_A{}^* g_2$. Fra tutte le $\mathcal{M}$-primitive di f nell'aperto A, conviene chiamare $\mathcal{M}$-*primitiva principale di* f *in* A, *denotata con* $P_A f$, *quella caratterizzata dall'avere nulla in* A *la trasformata antiolomorfa.*

Dalla (31) appare che una $\mathcal{M}$-primitiva di f è data dalla funzione $2F_2$. Poiché F_2 è antiolomorfa all'esterno di $\bar{A}$ e nulla all'infinito (n. 4), riesce $\Omega_A{}^* F_2 = 0$. *La primitiva principale* $P_A f$ *coincide pertanto con* $2F_2$, *cioè risulta*

$$\text{(36)} \qquad P_A f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_A \frac{f(w)}{w^*-z^*} d\sigma_w .$$

Dalle (31), (33) e dal Teor. 3 discendono subito le relazioni

$$(37) \qquad (P_A f)' = f\,; (P_A f)'_* (z) = -\frac{1}{\pi} \text{ v. p.} \int_A \frac{f(w)}{(w^* - z^*)^2}\, d\sigma_w$$

$$(38) \qquad \Delta P_A f = 2 f'_* \,.$$

Si ha ora immediatamente *l'analoga complessa della formula fondamentale del Calcolo reale* $g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} g'(t)\, dt$. Invero, per ogni $\mathcal{M}$-primitiva g di f in A sussiste la *relazione*

$$(39) \qquad g(z) = \omega_A^*(z) + P_A\, g'(z)$$

con $\omega_A{}^*$ antiolomorfa in A e continua in $\bar{A}$ (19). Tenuto conto che $\Omega_A{}^*\, g = \omega_A{}^*$ ($P_A f$ ha trasformata antiolomorfa nulla), la (39) dà luogo all'uguaglianza (20)

$$(40) \qquad g(z) = \frac{1}{2\pi i^*} \int_{\partial A} \frac{g(w)}{w^* - z^*}\, dw^* - \frac{1}{\pi} \int_A \frac{g'(w)}{w^* - z^*}\, d\sigma_w \,.$$

Conviene ancora notare che se f è olomorfa in A, e l'aperto A è semplicemente connesso, la sua primitiva olomorfa g non coincide con $P_A f$, riuscendo in generale $\Omega_A{}^*\, g \neq 0$ (21). Precisamente, tenuto presente

(19) Sotto un'altro aspetto, come analoga della formula fondamentale classica $\dfrac{g(x') - g(x)}{x' - x} = \dfrac{1}{x' - x} \displaystyle\int_x^{x'} g'(t)\, dt$ può riguardarsi la *relazione*

$$\underset{|h|=\rho}{\mathcal{M}} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{C(z,\rho)} g'(w)\, d\sigma_w \,,$$

(conseguenza immediata della (30)) che equivale alla formula di GREEN-STOKES per il cerchio $C(z, \rho)$.

(20) Per le funzioni di classe C^1, la (40) è stata ottenuta da D. POMPEIU. Estensioni delle (39), (40) a casi più generali, comprendenti quelli considerati da N. TEODORESCU [7] e I. N. VEKUA [9] in relazione alla derivata areolare, sono stabilite al n. 12 e nel lavoro [1].

(21) Questo fatto però non si verifica se A è un cerchio (Prop. 2, n. 3).

che l'espressione $\frac{g(w)}{w^* - z^*} dw^* + f(w) \log \frac{w^* - z^*}{w^* - z_0^*} dw \, (z_0 \in A)$ è il differenziale totale della funzione $g(w) \log \frac{w^* - z^*}{w^* - z_0^*}$, si verifica senza difficoltà che, alterando al più di una costante la primitiva olomorfa g, può scriversi

$$\Omega_A^* g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} f(w) \log \frac{w^* - z^*}{w^* - z_0^*} dw. \tag{41}$$

È naturale a questo punto introdurre l'operatore $\mathcal{P}_A$ definito, per ogni funzione continua $f\colon \bar{A} \to \mathbf{C}$, dalla

$$\mathcal{P}_A f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} f(w) \log \frac{w^* - z^*}{w^* - z_0^*} dw + P_A f(z). \tag{42}$$

Evidentemente $\mathcal{P}_A f$, differendo per una funzione antiolomorfa da $P_A f$, *è una $\mathcal{M}$-primitiva di f in A, e riesce olomorfa quando f è olomorfa*, perché $\Omega_A^* \mathcal{P}_A f$ coincide con il secondo membro della (41).

Come appare dal Teor. 2, in campo complesso *la nozione di $\mathcal{M}$-primitiva di f e di funzione integrale $F(z) = \int_a^z f(t)\, dt$ sono in generale distinte.* Tuttavia esse restano strettamente collegate, come mostra lo stesso Teor. 2, o l'equivalente formula (16), che può ora scriversi in modo più semplice. Precisamente, per ogni funzione f continua in $\bar{A}$ riesce

$$\int_a^b \Omega_A f(z)\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} f(z) \log \frac{z-b}{z-a} dz$$

onde la (16) diviene

$$\int_a^b f(z)\, dz = \frac{1}{2} \int_a^b \Omega_A f(z)\, dz + \frac{1}{2} [\mathcal{P}_A f(b) - \mathcal{P}_A f(a)] \; (^{22}). \tag{43}$$

(22) Se ci si pone da un punto di vista soltanto formale, può essere conveniente assumere l'espressione $\mathcal{P}_A f(b) - \mathcal{P}_A f(a)$ come integrale definito di f.

10. Osservazioni.

Sono riunite in questo numero alcune osservazioni in relazione alla derivata seconda reale Δ e alle derivate complesse $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial z^*}$.

PROP. 4. *Se f: $A \rightarrow \mathbf{C}$ è continua ed $\mathcal{M}$-derivabile in A, e la sua derivata f' è continua ed $\mathcal{M}^*$-derivabile in A, allora esiste in A la derivata seconda Δf, e risulta*

$$\Delta f = 2\,\frac{\partial f'}{\partial z^*} = 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^*\,\partial z}. \tag{44}$$

Poiché per ogni aperto B con $\bar{B} \subset A$ può scriversi $f = \omega_B^* + P_B f'$ con ω_B^* antiolomorfa in B, l'asserto segue immediatamente dalla (38).

PROP. 5. *Se f è continua in A insieme alla sua derivata reale Δf, esistono in A le derivate complesse $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial z^*}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^*\,\partial z}$ e risulta*

$$\frac{1}{2}\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial z^*} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^*\,\partial z}. \tag{45}$$

Invero, per ogni aperto B con $\bar{B} \subset A$ dalle $(37)_1$, (38), tenuta presente la Prop. 3, discende la relazione

$$f = \alpha_1 + \frac{1}{2} P_B P_B^* \Delta f = \alpha_2 + \frac{1}{2} P_B^* P_B \Delta f$$

con α_1, α_2 armoniche in B. La $(37)_1$ conduce immediatamente all'asserto.

Tenute presenti le Prop. 4, 5 per l'*uguaglianza delle derivate* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial z^*}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^*\,\partial z}$ basta che esistano entrambe in A, ovvero esista continua in A una di esse.

PROP. 6. *Sia f: $A \rightarrow \mathbf{C}$ continua ed $\mathcal{M}$-derivabile in A, e la sua derivata f' risulti ivi continua in senso di* HÖLDER. *Allora f è di classe C^1 in A.*

L'asserto segue immediatamente dalla relazione $f = \omega_B^* + P_B f'$ ($\bar{B} \subset A$, ω_B^* antiolomorfa in B), tenuta presente una nota proprietà dell'operatore P_B [23].

[23] Ved. p. es. I. N. VEKUA [10], p. 56.

11. Il teorema dal valor medio complesso.

L'analogo del teorema di LAGRANGE per la derivata media complessa è la seguente proposizione, che consente di maggiorare il rapporto incrementale medio di una funzione in un cerchio, mediante i valori della derivata all'interno. Precisamente:

TEOR. 5. (Teorema del valor medio). *Per ogni funzione f continua nel cerchio $|z-a|\leq \rho$, $\mathcal{M}$-derivabile all'interno del cerchio, risulta*

$$\left| \underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| \leq \sup_{|z-a|<\varrho} |f'(z)|. \tag{46}$$

Per la dimostrazione, sia $\mathcal{L}: \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ un qualsiasi funzionale lineare su $\mathbf{C}$, con $\|\mathcal{L}\| \leq 1$, ed $F^*(z) = \int_a^z f(t)\, dt^*$. La (32) porge

$$\mathcal{L}\left(\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{L} F^*(a+\varrho e^{i\theta})\, d\theta$$

onde, per il teorema del valor medio reale (22) (n. 5), tenute presenti le (20), (21) può scriversi

$$\inf_{|z-a|<\varrho} \underline{\Delta} \mathcal{L} F^*(z) \leq \mathcal{L}\left(\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f a+h)-f(a)}{h} \right) \leq \sup_{|z-a|<\varrho} \underline{\Delta} \mathcal{L} F^*(z).$$

Passando ora ai moduli, e tenuto presente il Teor. 3, si ottiene

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{L}\left(\underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) \right| &\leq \sup_{|z-a|<\varrho} |\underline{\Delta} \mathcal{L} F^*(z)| = \\
&= \sup_{|z-a|<\varrho} |\mathcal{L} f'(z)| \leq \\
&\leq \sup_{|z-a|<\varrho} |f'(z)|.
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\mathcal{L}$ si perviene subito all'asserto.

Conviene osservare ancora che sulla retta il teorema di LAGRANGE può anche scriversi $f(x) = f(a) + (x-a) f'(c)$, e permette allora di *maggiorare la funzione f nell'intervallo $[a, b]$ mediante i valori di f sul contorno e della derivata f' all'interno* dell'intervallo. Da questo punto di vista, l'analogo complesso è costituito dalla proposizione:

PROP. 7. (Proprietà di massimo). *Per ogni funzione continua* f: $\bar{A} \to \mathbf{C}$, $\mathcal{M}$*-derivabile in* A, *risulta*

$$\sup_{z \in \bar{A}} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial A} |f(z)| + M \sup_{z \in A} |f'(z)| \tag{47}$$

essendo M *una costante dipendente solo dal diametro di* A.

Si consideri invero la relazione

$$f = \omega_A^* + P_A f',$$

stabilità al n. 9 per le funzioni con derivata f' continua in $\bar{A}$. Come si vedrà al n. seguente, essa sussiste anche per le funzioni con derivata limitata in A. L'asserto segue allora immediatamente, tenuto presente il principio del massimo per $\omega_A{}^*$, e una nota proprietà dell'operatore P_A (24).

Dal teorema del valor medio, tenuta presente all'occorrenza la proprietà di massimo (47), discendono le consuete conseguenze. Si hanno ad esempio teoremi di *derivazione sotto il segno,* e di *derivazione di una successione termine a termine,* del tutto analoghi al caso reale.

12. Medie di funzioni e derivata media.

Sia $\rho > 0$ e A_ρ l'insieme dei punti dell'aperto A che hanno distanza maggiore di ρ dal complementare di A. Per ogni funzione continua f: $A \to \mathbf{C}$ si denota con $f_\rho : A_\rho \to \mathbf{C}$ la sua *funzione media di raggio* ρ, cioè

$$f_\rho(z) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{C(z,\rho)} f(w)\, d\sigma_w \ (^{25}). \tag{48}$$

Come è noto, le funzioni f_ρ sono di classe C^1, e riesce

$$f = \lim_{\rho \to 0} f_\rho \tag{49}$$

uniformemente sui compatti di A. In particolare, le funzioni f_ρ sono $\mathcal{M}$-derivabili, $\mathcal{M}^*$-derivabili e si verifica senza difficoltà che risulta

(24) Ved p.. es. I. N. VEKUA [10], Theor. 1.19.
(25) Ved. p. es. T. RADÒ [5], p. 10.

$$(50) \qquad f'_\varrho(z) = \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{-\pi}^{\pi} f(z+\varrho e^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, d\theta = \underset{|h|=\varrho}{\mathcal{M}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

e analogamente per la derivata inversa. In altri termini, *la derivata della funzione media* f_ϱ *coincide con il rapporto incrementale medio di raggio* ρ *della funzione* f (26). Di conseguenza, una funzione continua f *riesce* $\mathcal{M}$*-derivabile in un aperto* B $(\overline{B}\subset A)$, *se e solo se risultano convergenti in* B *le derivate* f'_ϱ *delle sue funzioni medie di raggio* $\rho\to 0$, *e si ha*

$$(51) \qquad f' = \lim_{\varrho\to 0} f'_\varrho .$$

Si noti che diversamente dalla (49) la convergenza delle derivate nella (51) è soltanto semplice. Si verifica poi facilmente, tenuto presente, come nel caso reale, il teorema del valor medio (Teor. 5), che anche *nella* (51) *la convergenza riesce uniforme sui compatti di* A *se e solo se* f' *risulta continua in* A (27).

Conviene terminare con alcune applicazioni dei risultati precedenti. In primo luogo, l'osservazione:

PROP. 8. *Sia* f: $A\to \mathbf{C}$ *continua,* $\mathcal{M}$- *ed* $\mathcal{M}^*$*-derivabile, con le derivate* f', f'_* *continue in* A. *Allora* f *è di classe* C^1 *in* A.

Invero, le funzioni $\dfrac{\partial f_\varrho}{\partial x} = f'_\varrho + f'_{\varrho *}$ e $\dfrac{\partial f_\varrho}{\partial y} = i(f'_\varrho - f'_{\varrho *})$ convergono uniformemente sui compatti di A. Pertanto, per l'ordinario teorema di derivazione di una successione, $f = \lim\limits_{\varrho\to 0} f_\varrho$ ammette le derivate parziali continue $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\partial f_\varrho}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\partial f_\varrho}{\partial y}$ onde l'asserto.

Sussiste poi il seguente teorema, che estende alle funzioni con derivata limitata la formula fondamentale del Calcolo (n. 9):

(26) Questa proprietà, tenuto conto del teorema del valor medio (Teor. 5), fornisce un'altra semplicissima dimostrazione del Teor. 4 (e quindi dei teoremi di GOURSAT, MORERA).

(27) Se f' è continua, può considerarsi la sua funzione media $(f')_\varrho$. La formula di GREEN-STOKES per il cerchio (ved. nota (19)) mostra che $(f')_\varrho = (f_\varrho)'$ e che quindi non è ambigua la notazione f'_ϱ.

TEOR. 6. *Sia f continua ed $\mathcal{M}$-derivabile nell'aperto limitato A, con derivata f' limitata. Per ogni $z \in A$ risulta*

$$f(z) = \omega_A^*(z) + P_A f'(z) \tag{52}$$

con $\omega_A{}^*$ antiolomorfa in A.

Infatti, sia B un aperto con frontiera rettificabile e con chiusura $\bar{B} \subset A$. Per ρ abbastanza piccolo, le funzioni medie f_ϱ sono definite e di classe C^1 in B, onde per la formula di POMPEIU

$$\bar{f}_\varrho(z) = \frac{1}{2\pi i^*} \int_{\partial B} \frac{f_\varrho(w)}{w^* - z^*} dw^* - \frac{1}{\pi} \int_B \frac{f_\varrho'(w)}{w^* - z^*} d\sigma_w . \tag{53}$$

Per ipotesi, riesce $|f'| \leq M$ (con $M < +\infty$) in A, onde dalla (50), tenuto presente il teorema del valor medio, si ha

$$\left| \frac{f_\varrho'(w)}{w^* - z^*} \right| \leq \frac{M}{|w - z|} .$$

Passando ora al limite nella (53) per $\rho \to 0$, per il teorema della convergenza dominata di LEBESGUE si ottiene

$$f = \omega_B^* + P_B f',$$

con $\omega_B{}^*$ antiolomorfa in B. In particolare, la funzione

$$\omega_A^* = f - P_A f' = f - P_B f' + P_{A \setminus B} f' = \omega_B^* + P_{A \setminus B} f'$$

riesce antiolomorfa in B. Per l'arbitrarietà di B, segue l'asserto.

Il Teor. 6 corrisponde evidentemente alla proprietà che in $\mathbf{R}$ assicura l'assoluta continuità delle funzioni con derivata limitata. Allo studio delle funzioni assolutamente continue in campo complesso è dedicato il lavoro [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] P. DENTONI, *Funzioni assolutamente continue in campo complesso,* (In corso di pubblicazione).

[2] G. FICHERA, *Derivata areolare e funzioni a variazione limitata,* Rev. Roum. Math. Pures Appl., **14**, 27-37 (1969).

[3] P. HARTMAN - A. WINTNER, *Mean value theorems and linear operators,* Am. Math. Monthly, **62**, 217-222 (1955).

[4] L. L. HELMS, *Introduction to potential theory* (Wiley-Interscience, New York, 1969).

[5] T. RADÒ, *Subharmonic functions* (Chelsea Publ. Comp., New York, 1949).

[6] S. SAKS, *Theory of the Integral* (Hafner Publ. Comp., New York, 1937).

[7] N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire,* Ann. Roumaines Math., Cahier 3 (1936).

[8] N. TEODORESCU, *Dérivée et primitive aréolaires,* Annali di Mat. pura appl., **49**, 261-281 (1960).

[9] I. N. VEKUA, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung of ellip-tischen Typus und Randwertaufgaben* (Berlin, 1956).

[10] I. N. VEKUA, *Generalized Analytic Functions* (Pergamon Press, Oxford, 1962).

[11] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series* (Univ. Press, Cambridge, 1968).