SULL'UNICITÀ DELLE SOLUZIONI DI UNA CERTA CLASSE DI EQUAZIONI FUNZIONALI (*)

di LUIGI PAGANONI (a Milano) (**)

SOMMARIO. - *In questa Nota si studia il problema di unicità delle soluzioni dell'equazione funzionale* $f[F(x,y)]=H[f(x),f(y);x,y]$ *in un caso più generale di quello esaminato in una nota precedente.*

Dapprima è messa in evidenza la natura locale di tale problema; successivamente vengono fornite alcune condizioni che garantiscono l'unicità locale della soluzione.

SUMMARY. - *In this paper we study the uniqueness problem of the solutions of the functional equation* $f[F(x,y)]=H[f(x),f(y);x,y]$ *in a more general case then that of a previous paper.*

First we point out the local nature of the above mentioned problem, then we give some conditions ensuring the local uniqueness of the solution itself.

Introduzione.

In una precedente Nota (L. Paganoni, [6]) prendendo in esame il problema di unicità delle soluzioni dell'equazione funzionale $f[F(x,y)]=$ $=H[f(x),f(y);x,y]$ nel caso in cui $F\colon E\times E\to E$, è stato mostrato che (in ipotesi molto generali) due soluzioni coincidenti nell'intorno di un punto sono identiche.

Nella presente Nota tale risultato viene esteso al caso in cui la funzione F sia definita su un sottoinsieme di $E\times E$. Inoltre vengono

(*) Pervenuto in Redazione il 27 novembre 1973.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica F. Enriques - Università degli Studi di Milano - via C. Saldini 50 - 20133 Milano.

fornite condizioni atte a garantire che due soluzioni dell'equazione funzionale citata coincidenti in uno o due punti coincidano in tutto un intorno (e quindi, per quanto detto sopra, siano identiche).

2. Definizioni, notazioni e preliminari.

Si consideri l'equazione funzionale

$$(*) \qquad f\,[F\,(x, y)] = H\,[f\,(x), f\,(y);\, x, y]$$

in cui

$$(x, y) \in A \subset E \times E, \quad F\colon A \to E, \quad H\colon (N \times N) \times A \to N, \quad f\colon E \to N.$$

Siano $p_1, p_2\colon E \times E \to E$ le mappe proiezione rispettivamente sul primo e sul secondo fattore e sia:

$$E_1 = p_1\,(A) = \{x\colon (x, \bar{y}) \in A \quad \text{per un } \bar{y} \in E\},$$

$$E_2 = p_2\,(A) = \{y\colon (\bar{x}, y) \in A \quad \text{per un } \bar{x} \in E\}, \qquad E_3 = F\,(A).$$

Supporremo qui e nel seguito, senza alterare la generalità [1], che sia $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

Se E è uno spazio topologico e $B \subset E$, si indicherà con B^0 l'interno di B.

$\forall\, x \in E_1$ sia $A_x = \{y \in E_2\colon (x, y) \in A\}$ *e* $F_x\colon A_x \to E_3$ la funzione data da $F_x\,(y) = F\,(x, y)$;

$\forall y \in E_2$ sia $A^y = \{x \in E_1\colon (x, y) \in A\}$ e $F^y\colon A^y \to E_3$ la funzione data da $F^y\,(x) = F\,(x, y)$.

DEFINIZIONE 1. Siano X e Y spazi topologici. Si dice che una funzione $g\colon X \to Y$ possiede la proprietà (P) se, per ogni aperto U non vuoto, la chiusura di $g\,(U)$ ha interno non vuoto.

(1) Infatti, supposto $\widetilde{E} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \neq E$, l'equazione funzionale (*) impegna la funzione f solo per $t \in \widetilde{E}$, nel senso che se $t \in E - \widetilde{E}$ non esiste alcuna coppia $(x, y) \in A$ con $F\,(x, y) = t$ né alcuna coppia (x, y) con almeno una delle due variabili x o y uguale a t. Perciò, se $\widetilde{f}\colon \widetilde{E} \to N$ è soluzione di (*) limitatamente ad $\widetilde{E}$, ogni funzione $f\colon E \to N$ tale che $f/\widetilde{E} = \widetilde{f}$ è una soluzione di (*).

Se f_1 e f_2 sono due soluzioni dell'equazione funzionale (*) si porrà

$$S=S(f_1, f_2)=\{x\in E:\ f_1(x)=f_2(x)\} \text{ e } S_i=S\cap E_i \qquad i=1,2,3.$$

DEFINIZIONE 2. La funzione $H=H[u, v; x, y]$ si dice iniettiva rispetto alla prima [seconda] variabile se,

$$\forall\, v\in N [\forall\, u\in N] \text{ e } \forall\,(x, y)\in A,\quad H[u_1, v; x, y]=H[u_2, v; x, y]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u_1=u_2 \quad [H[u, v_1; x, y]=H[u, v_2; x, y]\Longrightarrow v_1=v_2].$$

3. Riduzione del problema di unicità da globale a locale.

Si può ora dimostrare il seguente teorema

TEOREMA 1. *Siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*

i) *E e N siano spazi topologici con N di Hausdorff,*

ii) *A sia un aperto in $E\times E$ ed E_1 sia connesso,*

iii) *$\forall\, x\in E_1$, F_x goda della proprietà (P),*

iv) *$\forall\, y\in E_2$, F^y sia una funzione continua,*

v) *H sia iniettiva rispetto alla prima variabile.*

Allora, se f_1 e f_2 sono soluzioni continue di (*) ed inoltre

vi) *$S_1^0\neq\emptyset$ e, $\forall\, x\in E_1$, $A_x\cap S_2^0\neq\emptyset$* (²),

risulta $S_1=E_1$ (cioè $S\supset E_1$).

OSSERVAZIONE 1. Nel caso in cui $B=\left(\bigcap_{x\in E_1} A_x\right)\cap E_1\neq\emptyset$, l'ipotesi vi) è soddisfatta se $B\cap S_1^0\neq\emptyset$. Di conseguenza questo teorema contiene come caso particolare il Teorema 1 di una precedente Nota [6].

OSSERVAZIONE 2. La condizione vi) può essere sostituita, come appare dalla dimostrazione, dalla più debole condizione:

vi') $S_1^0\neq\emptyset$ e $A_x\cap S_2^0\neq\emptyset$, $\forall\, x\in(S_1^0)^*$

(²) La richiesta $A_x\cap S_2^0\neq\emptyset$ assicura che ad ogni $x\in S_1$ si può associare un aperto $V\subset S_2$ con $\{x\}\times V\subset A$. Questo fatto, come appare dalla dimostrazione, permette di arrivare alla conclusione che ogni $x\in S_1$ è interno ad S_1.

dove $(S_1^0)^*$ rappresenta la frontiera di S_1^0 in E_1. Ne segue che, se $\Delta_1 = \{(x, x): x \in E_1\} \subset A$, basta supporre $S_1^0 \neq \emptyset$; in questo caso infatti la vi') è soddisfatta.

Osservazione 3. Si supponga che l'aperto A si possa esprimere come unione di una successione non decrescente di aperti A^n per ciascuno dei quali siano soddisfatte le ipotesi i) - v) del teorema. Inoltre:

1) A^1 soddisfi l'ipotesi vi),

2) detti $E_1^n = p_1(A^n)$ e $A_x^n = \{y: (x, y) \in A^n\}$, si abbia, $\forall\, n \geq 2$ e $\forall\, x \in E_1^n$, $A_x^n \cap E_1^{n-1} \neq \emptyset$.

In tal caso si può dimostrare, procedendo per induzione, che $S \supset E_1^n$ per ogni $n \geq 1$ e quindi che $S \supset E_1$.

Osservazione 4. Se E_1 non fosse connesso la conclusione sarebbe ancora valida per quei componenti G di E_1 per i quali $G \cap S_1^0 \neq \emptyset$, nel senso che per essi si avrebbe $G \subset S_1$.

Osservazione 5. Se A non fosse aperto si potrebbe sostituire ad esso il suo interno B e vedere se, limitando l'esame dell'equazione funzionale all'insieme B, siano soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema 1; in tal caso, se $E_1 \subset \overline{p_1(B)}$, si potrebbe ancora concludere che $S_1 = E_1$.

Osservazione 6. Da questo teorema, come pure dal successivo Teorema 2, si ottiene una proposizione ugualmente valida se alle condizioni riguardanti il primo fattore in $E \times E$ e in $N \times N$ (e quindi le variabili x e u) si sostituiscono analoghe condizioni riguardanti il secondo fattore (e quindi le variabili y e v) e viceversa.

Dimostrazione. Basta mostrare che $(S_1^0)^* = \emptyset$, dove $(S_1^0)^*$ rappresenta la frontiera di S_1^0 in E_1: infatti in tal caso S_1^0 è aperto e chiuso in E_1 e, per la connessione di E_1, ne segue $S_1^0 = E_1$ cioè l'asserto.

Sia per assurdo $(S_1^0)^* \neq \emptyset$ e sia $z \in (S_1^0)^*$. Si consideri $A_z \cap S_2$; per la ii) e la vi) si ha $(A_z \cap S_2)^0 = A_z \cap S_2^0 \neq \emptyset$. Dalla iii) e dal fatto che S_3 è chiuso in E_3 (3), segue che esiste un aperto V in E_3 con

$$V \subset \overline{F_z(A_z \cap S_2^0)} \subset S_3.$$

(3) S è infatti chiuso in E poiché N è di Hausdorff.

Allora esiste $w \in A_z \cap S_2^0$ tale che $F^w(z) = F(z, w) \in V$. Per la iv) esiste allora un intorno Z di z in A^w tale che $F^w(Z) \subset V$. Poiché per la ii) A^w è aperto in E_1, Z è un intorno di z in E_1; inoltre $Z - S_1 \neq \emptyset$ poiché $z \in (S_1^0)^*$. Perciò, $\forall \bar{z} \in Z - S_1$, si ha $F(\bar{z}, w) \in V \subset S_3$ e quindi anche

$$H[f_1(\bar{z}), f_1(w); \bar{z}, w] = f_1[F(\bar{z}, w)] = f_2[F(\bar{z}, w)] = H[f_2(\bar{z}), f_2(w); \bar{z}, w].$$

D'altra parte, poiché $w \in S_2$, dalla v) segue $f_1(\bar{z}) = f_2(\bar{z})$ cioè $\bar{z} \in S_1$ e questo è assurdo.

TEOREMA 2. *Siano soddisfatte le ipotesi* i) - v) *del Teorema* 1 *e inoltre*:

a) $\forall x \in E_1$, F_x *sia una funzione continua,*

b) H *sia iniettiva rispetto alla seconda variabile,*

c) posto $T = \bigcap_{x \in E_1} F_x(A_x)$, *si abbia* $T \supset E_1$.

Allora, se f_1 *e* f_2 *sono soluzioni continue di* (*) *e* $S_1^0 \neq \emptyset$, *risulta* $S_1 = E_1$.

ESEMPIO. Sia $A = \{(x, y) \colon x < 0 \text{ e } y > 0\}$ e $F(x, y) = \log(x^2 y)$. In tal caso $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, e la sola ipotesi $S_1^0 \neq \emptyset$ non è perciò sufficiente per poter applicare il Teorema 1. Tuttavia, poiché $T \supset E_1$, si può applicare il Teorema 2.

OSSERVAZIONE 7. L'ipotesi *c)* può essere sostituita dalla più debole richiesta: $T^0 \cap E_1 \neq \emptyset$, purché $S_1^0 \cap T^0 \neq \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordando l'Osservazione 2, basta provare che $A_x \cap S_2^0 \neq \emptyset, \forall x \in (S_1^0)^*$. Per la *c)*, S_1^0 è un aperto della topologia di E_3. Quindi, se $x \in E_1$, per le *c)* e *a)* $F_x^{-1}(S_1^0)$ è un aperto non vuoto contenuto in A_x. Inoltre, se $x \in S_1$, per la *b)* è anche $F_x^{-1}(S_1^0) \subset S_2^0$.

Ne segue l'asserto.

TEOREMA 3. *Siano soddisfatte le seguenti ipotesi*:

1) *E e N siano spazi topologici con N di Hausdorff,*

2) *A sia un aperto in $E \times E$ ed E_1, E_2 siano connessi,*

3) *$\forall x \in E_1$ e $\forall y \in E_2$, F_x e F^y siano funzioni continue e godano della proprietà (P),*

4) *H sia iniettiva rispetto alla prima e alla seconda variabile*

Allora, se f_1 e f_2 sono soluzioni continue di (*) ed inotre

5) $S_1^0 \neq \emptyset$ *e*, $\forall x \in E_1$, $A_x \cap S_2^0 \neq \emptyset$,

oppure

5′) $S_2^0 \neq \emptyset$ *e*, $\forall y \in E_2$, $A^y \cap S_1^0 \neq \emptyset$,

risulta $S = E$, *cioè* $f_1 = f_2$.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga ad esempio che valga la 5). Per il Teorema 1, $S_1 = E_1$. Dalla 5) segue $S_2^0 \neq \emptyset$; inoltre $A^y \cap S_1^0 = A^y \neq \emptyset$. In base all'Osservazione 6 si ha allora $S_2 = E_2$. Ne segue quindi anche $S_3 = E_3$, cioè $S = E$.

4. Teoremi di unicità locale.

Come si vede dai precedenti teoremi, il problema di unicità della soluzione dell'equazione funzionale (*) è riconducibile in generale ad un problema di carattere locale.

I teoremi che seguono hanno come obiettivo quello di fornire condizioni sufficienti affinché due soluzioni dell'equazione funzionale (*) che assumono valori uguali in al più uno o due punti coincidano in tutto un intorno.

A differenza di quanto accade in analoghi teoremi di precedenti Note [1—8] nei quali tutte le ipotesi gravano sulla funzione F, nei teoremi che seguono le ipotesi impegnano sia F che H; in tal modo entrambe le funzioni concorrono ad assicurare la soluzione del problema.

TEOREMA 4. $N = (N, d)$ *sia uno spazio metrico e* f_1, f_2 *siano due soluzioni di* (*) *per le quali esiste* $y_0 \in E_2$ *tale che* $f_1(y_0) = f_2(y_0) = v_0$.
Inoltre, sia possibile determinare $U \subset A^{y_0}$ *e* k $(0 < k < 1)$ *in modo tale che*:

1) $F^{y_0}(U) \supset U$,

2) $d(H[u, v_0; x, y_0], H[u_1, v_0; x, y_0]) \leq k(d(u, u_1))$

$$\forall u, u_1 \in N \text{ e } \forall x \in U.$$

Allora f_1 *e* f_2 *coincidono su* U, *anzi su* $F^{y_0}(U)$.

ESEMPIO. Si consideri la seguente equazione funzionale:

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{xf(x) + yf(y)}{2\sqrt{xy}} \quad \text{in cui } E = (0, +\infty) \text{ e } N = (-\infty, +\infty).$$

Se si assume $y_0 = 1$ e $U = (0,1/2)$ si constata che, per ogni v_0, sono soddisfatte le ipotesi del teorema e perciò la eventuale soluzione soddisfacente la condizione $f_0(1) = v_0$ è unica in U. Dal Teorema 3 si deduce allora che essa è unica in E. Si riconosce immediatamente che per $v_0 = 0$ tale soluzione è $f(x) = \log x/x$.

OSSERVAZIONE 8. Per la validità del Teorema 4 (come pure per quella dei successivi Teoremi 5,7 e 9) non è richiesto che E sia uno spazio topologico e, quand'anche lo fosse, su f_1 e f_2 non si fa alcuna ipotesi di continuità.

OSSERVAZIONE 9. Da questo teorema, come pure da tutti quelli che seguono, si ottiene una proposizione ugualmente valida se, nelle ipotesi, si scambiano tra loro i ruoli delle variabili x e u con quelli delle variabili y e v.

DIMOSTRAZIONE.

$$d(f_1[F(x, y_0)], f_2[F(x, y_0)]) =$$

$$= d(H[f_1(x), v_0; x, y_0], H[f_2(x), v_0; x, y_0]) \leq$$

$$\leq k\, d(f_1(x), f_2(x)) \leq k \sup_{t \in U} d(f_1(t), f_2(t)).$$

Perciò

$$\operatorname*{Sup}_{t \in F^{y_0}(U)} d(f_1(t), f_2(t)) \leq k \operatorname*{Sup}_{t \in U} d(f_1(t), f_2(t))$$

e questo è impossibile a meno che $f_1(t) = f_2(t)$ per ogni $t \in F^{y_0}(U)$.

In modo analogo si dimostra il seguente

TEOREMA 5. *$N = (N, d)$ sia uno spazio metrico e f_1, f_2 siano due soluzioni di (*) per le quali esiste $y_0 \in E_2$ tale che $f_1(y_0) = f_2(y_0) = v_0$.*

Inoltre, sia possibile determinare $U \subset A^{v_0}$ e $h > 1$ in modo tale che:

1) $F^{y_0}(U) \subset U$,

2) $d(H[u, v_0; x, y_0], H[u_1, v_0; x, y_0]) \geq h\, d(u, u_1)$

$\forall\, u, u_1 \in N$ e $\forall\, x \in U$.

Allora f_1 e f_2 coincidono su U.

Nel seguente teorema, come pure nel Teorema 8, si sfrutta una opportuna ipotesi di continuità per le funzioni f_1 e f_2.

TEOREMA 6. *$E=(E,\delta)$ e $N=(N, d)$ siano spazi metrici e f_1, f_2 siano due soluzioni di (*) per le quali esistano $x_0 \in E_1$ e $y_0 \in E_2$ tali che $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ e $f_1(y_0)=f_2(y_0)=v_0$.*

Si supponga che f_1, f_2 siano continue in x_0 e che sia possibile determinare un intorno U di x_0, $U \subset A^{y_0}$, e una costante k, $0<k<1$, in modo tale che:

1) $\delta(F(x, y_0), x_0) \leq k\, \delta(x, x_0) \quad \forall\, x \in U,$

2) $d(H[u, v_0; x, y_0], H[u_1, v_0; x, y_0]) \geq d(u, u_1)$

$\forall\, x \in U$ e $\forall\, u, u_1 \in N.$

Allora f_1 e f_2 coincidono su U.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo sempre supporre che U sia un intorno circolare. Si consideri allora per ogni $x \in U$ la successione $\{x_n\}$ così definita:

$$(\circ) \qquad x_1 = x, \; x_n = F^{y_0}(x_{n-1}) \quad n = 2, 3, \dots .$$

Per l'ipotesi 1), $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$.

Si supponga ora, per assurdo, che esista un $x \in U$ per il quale $f_1(x) \neq f_2(x)$. Ne seguirebbe allora:

$$d(f_1(x_2), f_2(x_2)) = d(f_1[F(x, y_0)], f_2[F(x, y_0)]) =$$

$$= d(H[f_1(x), v_0; x, y_0], H[f_2(x), v_0; x, y_0]) \geq d(f_1(x), f_2(x))$$

e, procedendo per induzione, si otterrebbe

$$d(f_1(x_n), f_2(x_n)) \geq d(f_1(x), f_2(x)) > 0.$$

D'altra parte, $x_n \to x_0$ ed essendo f_1 e f_2 funzioni continue si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} f_1(x_n) = f_1(x_0) = f_2(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_2(x_n) \text{ cioè } d(f_1(x_n), f_2(x_n)) \to 0,$$

in contrasto con la disuguaglianza ottenuta.

OSSERVAZIONE 10. Nel Teorema 6 la 1) può essere sostituita con qualsiasi altra condizione atta a garantire che la successione $\{x_n\}$ definita in ([0]) converga a x_0 per ogni x di U. Così pure la 2) può essere sostituita con qualunque altra condizione atta a garantire che, per ogni x di U per il quale $f_1(x) \neq f_2(x)$, risulta $\underline{\lim}_{n \to +\infty} d(f_1(x_n), f_2(x_n)) > 0$.

Nei precedenti teoremi le ipotesi su $F(x, y)$ e $H[u, v; x, y]$ impegnano tali funzioni in punti $(x, y) \in A^{y_0}$. Il teorema che segue e la relativa osservazione mostrano che risultati di natura analoga si possono ottenere facendo ipotesi riguardanti il comportamento di F e H in punti della diagonale di $E \times E$.

TEOREMA 7. *$N=(N, d)$ sia uno spazio metrico e f_1, f_2 siano due soluzioni di (*). Si supponga che sia possibile determinare un insieme U, con $\Delta_U = \{(x, x)\colon x \in U\} \subset A$, e una costante k, $0<k<1$, in modo tale che:*

1) $F(\Delta_U) \supset U$,

2) $d(H[u, u; x, x], H[v, v; x, x]) \leq k\, d(u, v) \quad \forall x \in U$ e $\forall\, u, v \in N$.

Allora f_1 e f_2 coincidono su U, anzi su $F(\Delta_U)$.

OSSERVAZIONE 11. Come il Teorema 7 è simile nella sua formulazione al Teorema 4, allo stesso modo si possono formulare altri due teoremi analoghi ai Teoremi 5 e 6.

DIMOSTRAZIONE.

$$d(f_1[F(x, x)], f_2[F(x, x)]) =$$

$$= d(H[f_1(x), f_1(x); x, x], H[f_2(x), f_2(x); x, x]) \leq k\, d(f_1(x), f_2(x)).$$

Ne segue che

$$\sup_{t \in F(\Delta_U)} d(f_1(t), f_2(t)) \leq k \sup_{t \in U} d(f_1(t), f_2(t))$$

e questo è impossibile a meno che $f_1(t) = f_2(t)$ per ogni $t \in F(\Delta_U)$.

TEOREMA 8. *$E=(E, \delta)$ e $N=(N, d)$ siano spazi metrici e f_1, f_2 siano due soluzioni di (*) per le quali esistano $x_0 \in E_1$ e $y_0 \in E_2$ tali che $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ e $f_1(y_0) = f_2(y_0) = v_0$.*

Si supponga che f_1 e f_2 siano continue in x_0 e che sia possibile determinare un intorno U di x_0 e tre costanti k, λ e μ, con $0<k<1$ e $\lambda \geq \mu$, in modo tale che:

1) $\forall x \in U, \exists \bar{x}$ con $F(\bar{x}, y_0) = F(x, x)$ e $\delta(\bar{x}, x_0) \leq k\,\delta(x, x_0)$,

2) $d(H[u, v_0; x, y_0], H[u_1, v_0; x, y_0]) \leq \mu\, d(u, u_1)$
$\forall x \in U$ e $\forall u, u_1 \in N$,

3) $d(H[u, u; x, x], H[v, v; x, x]) \geq \lambda\, d(u, v)$
$\forall x \in U$ e $\forall u, v \in N$.

Allora f_1 e f_2 coincidono su U.

ESEMPIO. Si consideri la seguente equazione funzionale:

$$f\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{x f(x) + y f(y)}{x + y} \qquad x > 0, y > 0.$$

Si constata immediatamente che, per $x_0 = y_0 = 1$, $U = (1/2, 3/2)$ e $k = 1/\sqrt{2}$, $F(x, y) = x^2/y$ soddisfa l'ipotetsi 1) del teorema e che, $\forall v_0$, la 2) e la 3) sono soddisfatte scegliendo $\lambda = \mu = 1$, Perciò è unica in U la eventuale soluzione soddisfacente la condizione $f(1) = v_0$.

OSSERVAZIONE 12. Sussiste un analogo teorema se si chiede che $\bar{x}$ soddisfi l'uguaglianza $F(x, y_0) = F(\bar{x}, \bar{x})$ anziché quella che compare in 1) e se le disuguaglianze che compaiono in 2) e 3) e che impegnano H sono mutate nelle seguenti:

$$d(H[u, v_0; x, y_0], H[u_1, v_0; x, y_0]) \geq \mu_1\, d(u, u_1),$$

$$d(H[u, u; x, x], H[v, v; x, x]) \leq \lambda_1\, d(u, v) \text{ con } \lambda_1 \leq \mu_1$$

Inoltre anche per questo teorema vale una osservazione analoga alla Osservazione 10.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo sempre supporre che U sia un intorno circolare. perciò, per la 1), ad ogni $x \in U$ si può associare una successione $\{x_n\}$ di punti di U con le proprietà:

$$x_1 = x,\ F(x_n, y_0) = F(x_{n-1}, x_{n-1}) \text{ e } \delta(x_n, x_0) \leq k\,\delta(x_{n-1}, x_0), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Tale successione converge ovviamente a x_0.

Si supponga ora, per assurdo, che esista un $x \in U$ tale che $f_1(x) \neq f_2(x)$. In base alle 2) e 3) si avrebbe:

$$\lambda d(f_1(x), f_2(x)) \leq d(H[f_1(x), f_1(x); x, x], H[f_2(x), f_2(x); x, x]) =$$

$$= d(H[f_1(x_2), v_0; x_2, y_0], H[f_2(x_2), v_0; x_2, y_0]) \leq \mu d(f_1(x_2), f_2(x_2)),$$

cioè

$$d(f_1(x_2), f_2(x_2)) \geq \lambda/\mu \; d(f_1(x), f_2(x)) \geq d(f_1(x), f_2(x)) = \rho > 0.$$

Per induzione si ricava analogamente $d(f_1(x_n), f_2(x_n)) \geq \rho$, in contrasto col fatto che $f_1(x_n) \to f_1(x_0)$ e $f_2(x_n) \to f_2(x_0) = f_1(x_0)$.

Il teorema che segue si differenzia dai precedenti perché invece di considerare il comportamento di F e H lungo determinate sezioni di A, pone dei vincoli sulla struttura di un dato insieme di livello di F in A.

TEOREMA 9. *Siano f_1 e f_2 due soluzioni di (*) per le quali esistano $x_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$ con $(x_0, y_0) \in A$ e tali che $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ e $f_1(y_0) = f_2(y_0) = v_0$.*

Si indichi con Γ l'insieme di livello $\Gamma = \{(x, y) : F(x, y) = F(x_0, y_0)\}$ e si supponga che sia possibile determinare un insieme $U \subset E_1$ contenente x_0 in modo tale che:

1) $U \times \{y_0\} \subset \Gamma$,

2) $H[u, v_0; x, y_0]$ *sia iniettiva rispetto ad* u, $\forall\, x \in U$.

Allora f_1 e f_2 coincidono su U.

DIMOSTRAZIONE. $f_1[F(x_0, y_0)] = f_2[F(x_0, y_0)]$; perciò, per la 1), $\forall x \in U$, $H[f_1(x), v_0; x, y_0] = H[f_2(x), v_0; x, y_0]$ e, dalla 2), si ricava $f_1(x) = f_2(x)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ACZÉL, *Ein Eindeutigkeitssatz under Theorie der Funktionalgleichungen und einige ihrer Anwendungen,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **15** (1964), pp. 355-361.

[2] J. ACZÉL - M. HOSSZÚ, *Further uniqueness theorems for functional equations,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **16** (1965), pp. 51-55.

[3] J. B. MILLER, *Aczél's uniqueness theorem and cellular internity,* Aequationes Math., **5** (1970), pp. 319-325.

[4] C. T. NG, *Uniqueness theorems for a general class of functional equations,* J. Austr. Math. Soc., **11** (1970), pp. 362-366.

[5] C. T. NG, *On uniqueness theorems of Aczél and cellular internity of Miller,* Aequationes Math., **7** (1971), pp. 132-139.

[6] L. PAGANONI, *Teoremi di unicità per una classe generale di equazioni funzionali,* Bollettino U.M.I (4) **6** (1972), pp. 450-461.

[7] S. PAGANONI MARZEGALLI, *Teoremi di unicità per l'equazione funzionale* $f[F(x,y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ *negli spazi metrici,* Acad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **50** (1971), pp. 210-215.

[8] S. PAGANONI MARZEGALLI, *Estensione di alcuni teoremi di unicità per una classe generale di equazioni funzionali in spazi vettoriali topologici,* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., A **105** (1971), pp. 713-720.