SULLA p-SOMMABILITÀ DI FUNZIONI A VALORI VETTORIALI (*)

di LUCIANO DE SIMON (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si estende al caso di funzioni a valori in uno spazio di Banach riflessivo un noto criterio di p-sommabilità* ($p > 1$) *dovuto a F. Riesz.*

SUMMARY. - *It will be proved that a characterization given by F. Riesz for the p-summability* ($p > 1$) *of a real valued function is valid also for functions with values in a reflexive Banach space.*

Una interessante caratterizzazione delle funzioni reali che sono integrali di funzioni sommabili rispetto all'esponente p ($p > 1$) è stata data da F. Riesz in un noto teorema che afferma [1]:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $F(t)$, definita in un intervallo limitato $I = [0, T]$, sia integrale di una $f(t)$ a p-esima potenza sommabile è che esista una costante $K > 0$ tale che sia

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{|F(t_k) - F(t_{k-1})|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \leq K \tag{1}$$

per ogni suddivisione finita di I mediante i punti $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Inoltre, la più piccola costante K che maggiora le «somme di Riesz» [1] (e che chiameremo, per brevità, «variazione di Riesz» di F) uguaglia l'integrale $\int_0^T |f(t)|^p \, dt$.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 novembre 1973.

Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. A. F. A. del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

(1) Si veda, ad es., [1], pag 75-76.

Nella presente nota il risultato viene esteso al caso di funzioni a valori in uno spazio di Banach B riflessivo. Come mostreremo con un controesempio, l'estensione al caso di uno spazio di Banach qualunque non è possibile.

Le notazioni qui adottate sono quelle usuali. In particolare, si indicherà con B uno spazio di Banach, con B^* il suo duale con la solita norma e con $x(t)$ un'applicazione di I in B. Il simbolo $<x, \xi>$ indica il valore assunto dal funzionale $\xi \in B^*$ nel punto $x \in B$.

Richiamiamo anzitutto alcuni risultati ben noti.

1. LEMMA (Phillips). *Gli spazi (di Banach) $L^p(B)$ ed $L^q(B^*)$ delle (classi di) applicazioni $I \to B$ e $I \to B^*$, sommabili rispetto agli esponenti coniugati p e q ($p+q=pq$; $p, q>1$), con le norme*

$$\| y \|_{L^p(B)} = \left\{ \int_0^T \| y(t) \|_B^p \, dt \right\}^{1/p} \qquad y \in L^p(B)$$

$$\| \varphi \|_{L^q(B^*)} = \left\{ \int_0^T \| \varphi(t) \|_{B^*}^q \, dt \right\}^{1/q} \qquad \varphi \in L^q(B^*),$$

sono coniugati: $[L^p(B)]^* = L^q(B^*)$. Inoltre, ogni funzionale lineare continuo su $L^p(B)$, Φ, ammette la rappresentazione integrale

$$\langle y, \Phi \rangle = \int_0^T \langle y(t), \varphi(t) \rangle \, dt, \qquad y \in L^p(B),$$

con $\varphi \in L^q(B^*)$ individuato univocamente da Φ (2).

2. LEMMA. *Se B è riflessivo, un'applicazione x: $I \to B$ è assolutamente continua se e solo se esiste x': $I \to B$ sommabile e tale che $x(t) = $*

$$= x(0) + \int_0^t x'(\tau) \, d\tau \text{ (3)}$$

DIM. Sia $x(t)$ assolutamente continua e sia $B_0 \subset B$ la chiusura in B del sottospazio generato da $x(I) = \{x(t); t \in I\}$; $x(t)$, in quanto fun-

(2) Si veda [3].

(3) Questo risultato è stato provato in [5], teor. 5,1, nell'ipotesi che B sia separabile.

zione assolutamente continua è, ovviamente, continua e quindi B_0 risulta separabile (infatti contiene come sottospazio denso l'immagine secondo $x(t)$ di un qualunque insieme numerabile denso in I). Per il teor. 5.1 di [6], esiste $x': I \to B_0$ tale che $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau)\, d\tau$: evidentemente, l'integrale scritto si può intendere calcolato in B anziché in B_0 e l'asserzione risulta così provata per quanto concerne la sufficienza. La necessità della condizione è ovvia conseguenza di noti risultati.

Passiamo ora ad esporre il risultato che ci interessa.

3. TEOREMA. *Sia B uno spazio di Banach riflessivo. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x(t)$ sia integrale di una funzione $x'(t)$ sommabile rispetto all'esponente $p > 1$, è che esista una costante $K > 0$ tale che sia*

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_k \frac{\| x(t_k) - x(t_{k-1}) \|_B^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}} \leq K$$

per ogni suddivisione finita di I mediante i punti $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.

DIM. La necessità della condizione si dimostra, come nel caso delle funzioni reali, applicando la disuguaglianza di Hölder alla coppia di funzioni $\|x'(t)\|_B$ e 1. Si ha infatti

$$(2) \quad \| x(t_k) - x(t_{k-1}) \|_B^p \leq \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| x'(t) \|_B \, dt \right)^p \leq (t_k - t_{k-1})^{p-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| x'(t) \|_B^p \, dt$$

da cui, sommando e prendendo $K = \int_0^T \|x'(t)\|_B^p \, dt$, si ha la (1').

Per provare la sufficienza, cominciamo con l'osservare che, per le ipotesi fatte, $x(t)$ è assolutamente continua in senso forte (4). Ma allora,

(4) Infatti, procedendo come in [1], si trova, in corrispondenza ad una generica collezione finita di intervalli disgiunti $[\sigma_h, \tau_h] \subset I$ $(h = 1, 2 \ldots m)$:

$$\sum_1^m {}_h \| x(\tau_h) - x(\sigma_h) \| \leq \left(\sum_1^m {}_h \frac{\| x(\tau_h) - x(\sigma_h) \|_B^p}{(\tau_h - \sigma_h)^{p-1}} \right)^{1/p} \left(\sum_1^m {}_h (\tau_h - \sigma_h) \right)^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq K^{1/p} \left(\sum_1^m {}_h (\tau_h - \sigma_h) \right)^{(p-1)/p}$$

come abbiamo visto nel lemma 2, esiste $x'(t)$ sommabile e tale che

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau)\, d\tau \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{3}$$

Dalla (3) segue che $x(t)$ è derivabile in senso forte e che la sua derivata è proprio x'. Rimane da far vedere che $x' \in L^p(B)$.

Basterà, per questo, stante la dualità tra $L^p(B)$ ed $L^q(B^*)$, far vedere che $\forall \varphi \in L^q(B^*)$ esiste $\int_0^T < x'(t), \varphi(t) > dt$ e che il funzionale lineare $\varphi \longmapsto \int_0^T < x'(t)\ \varphi(t) > dt$ è continuo su $L^q(B^*)$.

Sia $\mathcal{S} \subset L^q(B^*)$ l'insieme delle funzioni costanti a tratti, cioè delle applicazioni $\sigma\colon I \to B^*$ del tipo

$$\sigma(t) = \sum_1^m {}_h\, \chi_h(t)\, \xi_h$$

con $\xi_h \in B^*$, χ_h funzione caratteristica dell'intervallo $I_h = [t_{h-1}, t_h[$ ($[t_{h-1}, t_h]$ se $h = m$) e $\bigcup_h I_h = I$.

Osserviamo in primo luogo che, $\forall\, \sigma \in \mathcal{S}$ esiste

$$\left| \int_0^T \langle x'(t), \sigma(t) \rangle\, dt \right| = \sum_1^m {}_h \int_0^T \langle x'(t), \xi_h \rangle\, dt$$

perchè si ha

$$| \langle x'(t), \xi_h \rangle | \leq \| x'(t) \|_B \| \xi_h \|_{B^*}$$

e la norma di $x'(t)$ è sommabile.

Poiché $\mathcal{S}$ è denso in $L^q(B^*)$, basta provare che, per un certo $K > 0$, vale la maggiorazione

$$\left| \int_0^T \langle x'(t), \sigma(t) \rangle\, dt \right| \leq K \| \sigma \|_{L^q(B^*)}, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{S}.$$

Ora, se $\sigma = \sum_1^m {}_h\, \chi_h(t)\, \xi_h$ è una funzione costante a tratti, si ha

$$\int_0^T \langle x'(t), \sigma(t) \rangle\, dt = \int_0^T \Big\langle x'(t), \sum_1^m {}_h\, \chi_h(t)\, \xi_h \Big\rangle\, dt =$$

$$= \sum_1^m {}_h \Big\langle x(t_h) - x(t_{h-1}), \xi_h \Big\rangle$$

per cui, se ρ è un numero positivo, otteniamo mediante la disuguaglianza di Hölder

$$\left| \int_0^T \langle x'(t), \sigma(t) \rangle \, dt \right| \leq \sum_1^m {}_h \| x(t_h) - x(t_{h-1}) \|_B \, \| \xi_h \|_{B^*} =$$

$$= \sum_1^m {}_h \frac{\| x(t_h) - x(t_{h-1}) \|_B}{(t_h - t_{h-1})^\rho} \, \| \xi_h \|_{B^*} (t_h - t_{h-1})^\rho \leq$$

$$\leq \left(\sum_1^m {}_h \frac{\| x(t_h) - x(t_{h-1}) \|_B^p}{(t_h - t_{h-1})^{p\rho}} \right)^{1/p} \left(\sum_1^m {}_h \| \xi_h \|_{B^*}^q (t_h - t_{h-1})^{q\rho} \right)^{1/q}.$$

In particolare, per $\rho = 1/q$, si ha

$$\sum_1^m {}_h \| \xi_h \|_{B^*}^q (t_h - t_{h-1}) = \int_0^T \left\| \sum_1^m {}_h \chi_h(t) \, \xi_h \right\|_{B^*}^q dt =$$

$$= \left\| \sum_1^m {}_h \chi_h(t) \, \xi_h \right\|_{L^q(B^*)}^q = \| \sigma \|_{L^q(B^*)}^q .$$

e quindi

$$\left| \int_0^T \langle x'(t), \sigma(t) \rangle \, dt \right| \leq \left(\sum_1^m {}_h \frac{\| x(t_h) - x(t_{h-1}) \|_B^p}{(t_h - t_{h-1})^{p-1}} \right)^{1/p} \| \sigma \|_{L^q(B^*)} \leq$$

$$\leq K^{1/p} \| \sigma \|_{L^q(B^*)}$$

dove K è la «costante di Riesz» che figura in (1′).

OSSERVAZIONE I. Si ha, per ogni $\varphi \in L^q(B^*)$ tale che $\|\varphi\|_{L^q(B^*)} = 1$,

$$\left| \int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle \, dt \right| \leq K^{1/p} \tag{4}$$

ed esiste, per il teorema di Hahn-Banach, una φ di norma unitaria tale che $\int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle \, dt = \| x' \|_{L^p(B)}$. Inserendo tale φ in (4) si ricava $\| x' \|_{L^p(B)} \leq K^{1/p}$. D'altra parte, il ragionamento fatto all'inizio per dimostrare la necessità della condizione (1′), mostra che $\|x'\|_{L^p(B)}^p$ è una «costante di Riesz» per la funzione $x(t)$. Si conclude che $\|x'\|^p_{L^p(B)}$ è la minima costante di Riesz.

Osservazione II. Senza l'ipotesi della riflessività per B l'enunciato del teorema non è vero, come prova il seguente controesempio:

Sia B lo spazio delle funzioni reali $f(u)$ sommabili in $[0, 1]$ con la norma $\|f\| = \int_0^1 |f(u)|\, du$ e sia $x(t)$ l'applicazione che ad ogni $t \in [0, 1]$ fa corrispondere la funzione

$$f_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

È facile verificare che la «variazione di Riesz» di $x(t)$ sull'intervallo $[0, 1]$ vale 1, qualunque sia $p > 1$. Ciononostante, $x(t)$ non è derivabile per alcun valore di t, perché il rapporto incrementale

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = g(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < u \leq t + h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non converge nella norma di B. Pertanto $x(t)$ non può essere un integrale.

BIBLIOGRAPHY

[1] Riesz-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Akadémiai Kiadò Budapest, 1955.

[2] Hille-Phillips, *Functional analysis and semi-groups,* American Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XXXI; Providence, 1957.

[3] Phillips, *On weakly compact subsets of a Banach space,* Am. J. Math., 65 (1943) Pag. 108-136.

[4] Baiocchi, *Osservazioni sulla definizione di integrale di Bochner,* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie III - Vol. XVII, Fasc. III (1963) 239-253.

[5] Baiocchi, *Ulteriori osservazioni sull'integrale di Bochner,* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie III - Vol. XVIII, Fasc. III (1964), 283-301.