QUASI ADDITIVITÀ E QUASI SUBADDITIVITÀ NELL'INTEGRALE ORDINARIO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI ALLA WEIERSTRASS (*)

di MAURO BONI (a Perugia) (**)

SOMMARIO. - *Si studiano proprietà di quasi subadditività e quasi additività per una classe di funzioni d'intervallo e si applicano i risultati all'integrale ordinario del Calcolo delle Variazioni nel senso di Weierstrass relativamente a curve continue e a variazione limitata.*

Si dà poi un esempio di integrando che, relativamente alla curva di Vitali-Cantor, dà luogo ad una funzione d'intervallo che, oltre a non essere quasi additiva o quasi subadditiva, non è integrabile.

SUMMARY. - *We study quasi sub additivity and quasi additivity properties for a class of interval functions and apply the results to non parametric Weierstrass integral of the Calculus of Variation for continuous curves of bounded variation.*

We give then an example of an integrand which gives place, for the Vitali-Cantor curve, to an interval function which is neither quasi additive nor quasi sub additive and, in addition, is not integrable.

1. Introduzione.

Sia $f(t, u, v)$, $t \in [a, b]$, $u \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^n$, una funzione continua nel complesso delle variabili e convessa in v, sia $\mathcal{C} \equiv \{x = x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), t \in [a, b]\}$ una curva continua e, per ogni intervallo

(*) Pervenuto in Redazione il 20 Novembre 1973.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico Università - 06100 Perugia.

$I = [t_1, t_2] \subset [a, b], t_1 < t_2$, poniamo:

$$\psi(I) = (t_2 - t_1) f\left(t_1, x(t_1), \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\right).$$

Se la funzione $\psi(I)$ ammette integrale alla Burkill-Weierstrass $V(\psi)$ allora, seguendo C. Vinti [11], diremo che $V(\psi)$ è l'integrale (alla Weierstrass) di f relativamente alla curva $\mathcal{C}$.

In [2], ci siamo occupati di proprietà di quasi additività e quasi subadditività alla Cesari ([5], [6]) per la funzione $\psi(I)$ nel caso che la curva $\mathcal{C}$ fosse assolutamente continua. Queste proprietà, che si traducono in teoremi di esistenza per $V(\psi)$, le abbiamo dedotte dallo studio di una opportuna classe di funzioni d'intervallo $\varphi(\xi, I)$ dipendenti dal parametro $\xi \in [a, b]$.

Nel presente lavoro proseguiamo questo studio ponendoci nello spazio delle curve continue e a variazione limitata. L'interesse di questa indagine è dovuta alla circostanza che volendo sviluppare, nel caso ordinario, una teoria del Calcolo delle Variazioni nella classe delle curve a variazione limitata, bisogna abbandonare l'integrale classico alla Lebesgue perché esso non traduce, in generale, la misura di una grandezza geometrica legata alla $\mathcal{C}$, cosí ad esempio se è $f = \sqrt{1 + y'^2}$ e $\mathcal{C}$ non è assolutamente continua, non rappresenta la lunghezza di $\mathcal{C}$.

E l'integrale della ψ relativamente a curve a variazione limitata, cioè l'integrale del Calcolo delle Variazioni alla Weierstrass della f, si adatta bene, e con notevole efficacia, a sostituirlo perché dà sempre la misura di una grandezza geometrica legata alla $\mathcal{C}$ e la $\mathcal{C}$ si suole chiamare con K. Menger [8] e N. Aronszajn [1] f-rettificabile.

Nel n. 2 richiamiamo, per comodità del lettore, alcune definizioni e proprietà.

Nel n. 3, dopo due lemmi che migliorano, nel caso di funzioni di intervallo continue, due proposizioni di L. Cesari [5], diamo alcuni teoremi generali di quasi subadditività e quasi additività adoperando il metodo, già usato in [2], di ricorrere a funzioni d'intervallo dipendenti da un parametro.

Nel n. 4 applichiamo i risultati del n. 3 al caso ordinario dell'integrale del Calcolo delle Variazioni nel senso di Weierstrass relativamente a curve continue e a variazione limitata, individuando vaste classi d'integrandi per i quali tale integrale esiste. In particolare mostriamo che se f dipende solo da v allora esiste l'integrale alla Weierstrass (finito $o + \infty$) lungo una qualunque curva continua e tale inegrale coincide con l'estremo superiore delle somme parziali ed inoltre diamo, in una classe di integrandi $f(t, u, v)$, relativamente a curve continue e a variazione limitata, teoremi di quasi subadditività e quasi additività, e caratterizziamo poi quegli integrandi $f(t, u, v)$, già studiati da C. Vinti [11], continui globamente e convessi in v che godono della proprietà che la funzione $\rho f(t, u, v/\rho)$ $(\rho > 0)$ si prolunga con continuità a tutto $\rho \geq 0$.

Al n. 5, infine, portiamo un esempio di integrando $f(t, u, v)$ continuo nel complesso delle variabili, convesso in v, non negativo e soggetto ad una dominazione del tipo $f(t, u, v) \leq |v|$ e tale che, relativamente alla curva di Vitali-Cantor, non ammette integrale nel senso di Weierstrass. Questo esempio, che fornisce relativamente ad un integrando f con ipotesi di tipo standard e ad una curva continua e a variazione limitata una $\psi(I)$ che non è nè quasi additiva nè quasi subadditiva, mette ancora una volta in luce il notevole divario fra il caso ordinario e quello parametrico, caso questo ultimo dove questi tipi di fenomeni non si verificano (si veda, in proposito, L. Cesari [5] e C. Vinti [11]).

2. Notazioni e definizioni.

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$ un intervallo chiuso ed $\{I\}$ la collezione di tutti gli intervalli chiusi, non riducentisi ad un punto, contenuti in $[a, b]$.

Sia $\mathcal{D}$ la famiglia costituita dalle suddivisioni D di $[a, b]$ cioè $D = [I_i], I_i \in \{I\}$ $i = 1, 2, \dots, N$, $I_i \cap I_j^0 = \emptyset$ per $i \neq j$, $\bigcup_i I_i = [a, b]$.

Su $\mathcal{D}$ consideriamo l'ordinaria « mesh » definita da $\delta(D) = \max_{I \in D} |I|$ ove $|I|$ indica l'ampiezza di I.

Una funzione $\psi(I)$ definita su $\{I\}$ e a valori in $\mathbb{R}$ si dice *quasi additiva* (vedi L. Cesari [5]) se :

(Φ) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tale che se $D_0 = [I]$ è un qualunque elemento di $\mathcal{D}$ con $\delta(D_0) < \eta$ allora esiste un $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) > 0$ tale che, per ogni $D = [J] \in \mathcal{D}$ con $\delta(D) < \lambda$ si ha :

(Φ_1) $\sum_{I \in D_0} \left| \sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right| < \varepsilon$

(Φ_2) $\sum_{J \not\subset I} |\psi(J)| < \varepsilon$

Si dice invece che $\psi(I)$ è *quasi subadditiva* (vedi L.Cesari [5]) se si verifica una condizione come la (Φ) con (Φ_1) e (Φ_2) sostituite da:

(Φ_3) $\quad \sum_{I \in D_0} [\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I)]^- < \varepsilon,$ dove, se m è un numero reale $m^- = (|m| - m)/2$.

Si dice poi che $\psi(I)$ è *quasi subadditiva in senso forte* se per ogni D_0 e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0)$ tale che per ogni $D \in \mathcal{D}$ con $\delta(D) < \lambda$ vale la (Φ_3).

La funzione $\psi(I)$ si dice *continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tale che,per ogni $I \in \{I\}$ con $|I| < \rho$ risulta $|\psi(I)| < \varepsilon$.

Infine si dice che $\psi(I)$ è *approssimativamente subadditiva* (vedi Tonelli [10]) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tale che se $I \in \{I\}$ e $|I| < \rho$ allora presi comunque degli intervalli $I_i \in \{I\}$, $i = 1, \dots, N$ con $I_i \cap I_j^0 = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\bigcup_i I_i = I$ risulta:

$$\psi(I) \leq \sum_{i=1}^{N} \psi(I_i) + \varepsilon |I|.$$

Per ogni $\psi(I)$ porremo ${}_*V(\psi) = \underline{\lim}_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D)$, ${}^*V(\psi) = \overline{\lim}_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D)$

$W(\psi) = \sup_{D \in \mathcal{D}} S(\psi, D)$ dove $S(\psi, D) = \sum_{I \in D} \psi(I)$ e diremo che $\psi(I)$ è integrabile alla Burkill-Cesari su $[a, b]$ se ${}_*V(\psi) = {}^*V(\psi) = V(\psi)$.

Sussistono le seguenti proprietà (vedi Cesari [5]):

$p_1)$ *Se ψ è quasi additiva allora $V(\psi)$ esiste finito.*

$p_2)$ *Se ψ è non negativa e quasi subadditiva allora $V(\psi)$ esiste finito o $+\infty$.*

$p_3)$ *Se ψ è non negativa e quasi subadditiva e se $V(\psi) < +\infty$ allora ψ è quasi additiva.*

$p_4)$ *Se ψ è non negativa e quasi subadditiva in senso forte allora $V(\psi) = W(\psi)$.*

3. Alcuni teoremi sulle funzioni d'intervallo.

In questo numero daremo alcuni teoremi generali sulle funzioni d'intervallo. Premettiamo due Lemmi che generalizzano, nel caso di funzioni d'intervallo continue, due proposizioni di L. Cesari (p_1), p_2) del n. 2).

LEMMA 1. *Se $\psi(I), I \in \{I\}$ è quasi subadditiva e continua allora esiste (finito o $+\infty$) il*

$$\lim_{\delta(D)\to 0} S(\psi, D) = V(\psi).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato comunque $\varepsilon > 0$ sia $\eta = \eta(\varepsilon/2)$ il primo numero fornito dalla quasi subadditività di ψ e, presa $D_0 = [I]$ con $\delta(D_0) < \eta$, sia $\lambda = \lambda(\varepsilon/2, D_0)$ il secondo numero. Indicato con N il numero degli intervalli di D_0, per la continuità di $\psi(I)$, in corrispondenza a $\varepsilon/4N$ esiste un $\sigma = \sigma(\varepsilon/4N)$ tale che, se $|I| < \sigma$ allora $|\psi(I)| < \varepsilon/4N$.

Posto $\lambda' = \lambda'(\varepsilon, D_0) = \min(\lambda, \sigma)$ e presa una qualunque $D \in \mathcal{D}$ con $\delta(D) < \lambda', D = [J]$, si ha allora:

$$(1) \qquad S(\psi, D) - S(\psi, D_0) = \sum_{I \in D_0} [\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I)] +$$

$$+ \sum_{J \not\subset I} \psi(J) > -\varepsilon/2 - 2N \cdot \varepsilon/4N = -\varepsilon.$$

La (1) ci assicura che $^*V(\psi) > -\infty$. Se allora supponiamo che $^*V(\psi) < +\infty$ potremo sempre prendere D_0 in modo che $S(\psi, D_0) > {}^*V(\psi) - \varepsilon$ e dalla (1) segue allora $S(\psi, D) > {}^*V(\psi) - 2\varepsilon$. Da questa si ha: $_*V(\psi) > {}^*V(\psi) - 2\varepsilon$ e quindi la tesi. In modo analogo si ragiona se $^*V(\psi) = +\infty$.

LEMMA 2. *Se $\psi(I), I \in \{I\}$, è una funzione quasi subadditiva e continua e se $V(\psi) < +\infty$ allora $\psi(I)$ è quasi additiva.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$ siano $\eta = \eta(\varepsilon)$ e $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0)$ i numeri relativi alla quasi subadditività di ψ.

La quasi subadditività e la continuità di ψ comportano, per il Lemma 1, l'esistenza di $V(\psi)$ e ciò, unito all'ipotesi che esso sia finito, implica che esiste un $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni $D' \in \mathcal{D}$ con $\delta(D') < \tau$ risulti:

$$(2) \qquad |V(\psi) - \sum_{I \in D'} \psi(I)| < \varepsilon.$$

Posto allora $\eta' = \min(\eta(\varepsilon/8), \tau(\varepsilon/4))$, prendiamo $D_0 \in \mathcal{D}$, $D_0 = [I]$ con $\delta(D_0) < \eta'$ e indichiamo con N il numero degli intervalli di D_0.

Sfruttando poi la continuità di ψ, sia $\rho = \rho(\varepsilon/8N)$ un numero tale che se $|I| < \rho$ allora $|\psi(I)| < \varepsilon/8N$.

Poniamo infine $\lambda' = \lambda'(\varepsilon, D_0) = \min(\tau(\varepsilon/4), \rho(\varepsilon/8N), \lambda(\varepsilon/8, D_0))$. Presa ora una $D \in \mathcal{D}$, $D = [J]$ con $\delta(D) < \lambda'$, si ha

(3) $$\sum_{J \not\subset I} |\psi(J)| < 2N \frac{\varepsilon}{8N} = \frac{\varepsilon}{4}$$

Oltre a ciò, ricordando che per ogni reale m è $|m| = m + 2m^-$, si ha:

(4) $$\sum_{I \in D_0} \left| \sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right| = \sum_{I \in D_0} \left[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right] + $$
$$+ 2 \sum_{I \in D_0} \left[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right]^-.$$

Se nel secondo membro di (4) sommiamo e sottraiamo le due quantità $\sum_{J \not\subset I} \psi(J)$ e $V(\psi)$, si ha allora:

(5) $$\sum_{I \in D_0} \left| \sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right| =$$
$$= \left[\sum_{J \in D} \psi(J) - V(\psi) \right] - \left[\sum_{I \in D_0} \psi(I) - V(\psi) \right] +$$
$$+ 2 \sum_{I \in D_0} \left[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right]^- - \sum_{J \not\subset I} \psi(J).$$

Ora, essendo $\delta(D) < \tau(\varepsilon/4)$ e $\delta(D') < \tau(\varepsilon/4)$, sarà:

(5′) $$\left[\sum_{J \in D} \psi(J) - V(\psi) \right] < \varepsilon/4$$

e

(5″) $$\left[\sum_{I \in D_0} \psi(I) - V(\psi) \right] < \varepsilon/4.$$

Analogamente, essendo $\delta(D_0) < \eta(\varepsilon/8)$ e $\delta(D) < \lambda(\varepsilon/8, D_0)$, sarà:

(5‴) $$\sum_{I \in D_0} \left[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right]^- < \varepsilon/8$$

Da (5), (5′), (5″), (5‴) e (3) segue allora:

(6) $$\sum_{I \in D_0} \left| \sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \right| < \varepsilon.$$

La (3) e la (6) ci assicurano quindi la quasi additività voluta.

Passiamo ora a dare il principale teorema di quasi subadditività.

TEOREMA 1. *Sia $\varphi(\xi, I)$ una funzione definita per $\xi \in [a, b]$, $I \in \{I\}$ e a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo che φ goda delle seguenti proprietà:*

(i) *Sia subadditiva rispetto ad* I *per ogni* $\xi \in [a, b]$.

(ii) *Esista una funzione* $\theta(I) \geq 0$, $I \in \{I\}$, *con* $W(\theta) < +\infty$ *tale che per ogni* $\sigma_1 > 0$ *esista un* $\nu_1(\sigma_1) = \nu_1 > 0$ *con la proprietà che se* $\xi_i \in [a, b]$ $i = 1, 2$, $I \in \{I\}$ *e* $|I| < \nu_1$, $d(\xi_i, I) < \nu_1$, $i = 1, 2$, *allora*

$$|\varphi(\xi_1, I) - \varphi(\xi_2, I)| < \sigma_1 \cdot \theta(I).$$

(iii) *Per ogni* $\xi \in [a, b]$, $\varphi(\xi, I)$ *sia semicontinua inferiormente dall'interno per ogni* $I \in \{I\}$, *cioè per ogni* $I \in \{I\}$ *comunque si fissi un* $\sigma_2 > 0$ *esista un* $\nu_2 = \nu_2(\sigma_2, I)$ *tale che se* $A \subset I$ *è un intervallo con* $A \in \{I\}$ *e* $\operatorname{mis}(I - A) < \sigma_2$ *allora risulti*

$$[\varphi(\xi, A) - \varphi(\xi, I)]^- < \sigma_2.$$

In queste ipotesi la funzione d'intervallo $\psi(I) = \varphi(\xi_I, I)$, *con* ξ_I *estremo sinistro di* I, *è quasi subadditiva.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato comunque $\varepsilon > 0$ e posto $\sigma_1 = \varepsilon/2W(\theta)$ sia $\nu_1 = \nu_1(\sigma_1)$ il numero di cui alla (ii). Preso $\eta = \eta(\varepsilon) = \nu_1$, sia $D_0 \in \mathcal{D}$, $D_0 = [I_i]$, $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ con $\delta(D_0) < \eta$. Preso poi $\sigma_2 = \varepsilon/2N$ sia $\nu_2^{(i)}$ il numero di cui alla (iii) relativamente ad $I = I_i$ e $\xi = t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$.

Posto infine $\nu_2 = \min\limits_{1 \leq i \leq N} \nu_2^{(i)}$ e $\omega = \min\limits_{1 \leq i \leq N} |I_i|$, prendiamo $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) = \min(\nu_2/2, \nu_1, \omega/4)$ e sia $D \in \mathcal{D}$, $D = [J]$ con $\delta(D) < \lambda$.

Per ogni I_i esistono sicuramente dei $J \in D$ che sono contenuti in I_i in quanto $|J| < \omega/4$. Detti allora $I_{i,r} = [\tau_{i,r-1}, \tau_{i,r}]$, $r = 1, 2, \dots n_i$ quegli intervalli $J \in D$ che sono contenuti in I_i, si ha:

$$[\sum_{J \subset I_i} \psi(J) - \psi(I_i)]^- = \left[\sum_{r=1}^{n_i} \varphi(\tau_{i,r-1}, I_{i,r}) - \varphi(t_{i-1}, I)\right]^- \tag{7}$$

Sommando e sottraendo nel secondo membro di (7) la quantità $\sum\limits_{r=1}^{n_i} \varphi(t_{i-1}, I_{i,r})$ e ricordando che se m e n sono numeri reali è $[m + n]^- \leq [m]^- + [n]^-$, si ha:

$$[\sum_{J \subset I_i} \psi(J) - \psi(I_i)]^- \leq \left[\sum_{r=1}^{n_i} \{\varphi(\tau_{i,r-1}, I_{i,r}) - \varphi(t_{i-1}, I_{i,r})\}\right]^- + \tag{8}$$

$$+ \left[\sum_{r=1}^{n_i} \varphi(t_{i-1}, I_{i,r}) - \varphi(t_{i-1}, I_i)\right]^-.$$

Esaminiamo ora separatamente il primo e il secondo addendo al secondo membro di (8).

Per quanto riguarda il primo addendo, essendo

$$|I_{i,r}| \leq \lambda \leq \nu_1, \quad d\,(t_{i-1}, I_{i,r}) \leq \eta = \nu_1,$$

$$d\,(\tau_{i,r-1}, I_{i,r}) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n_i, \ (i = 1, 2, \ldots, N)$$

dalla (ii) si avrà:

$$(9) \qquad \left[\sum_{r=1}^{n_i} \{\varphi\,(\tau_{i,r-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r})\}\right]^- \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n_i} |\varphi\,(\tau_{i,r-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r})| \leq (\varepsilon/2W\,(\theta)) \sum_{r=1}^{n_i} \theta\,(I_{i,r}).$$

Esaminiamo ora il secondo addendo. A questo scopo, posto $J_i^* = \bigcup_{r=1}^{n_i} I_{i,r}$, si ha:

$$\left[\sum_{r=1}^{n_i} \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, I_i)\right]^- =$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{n_i} \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, J_i^*) + \varphi\,(t_{i-1}, J_i^*) - \varphi\,(t_{i-1}, I_i)\right]^-.$$

Per la (i) risulta $\sum_{r=1}^{n_i} \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, J_i^*) \geq 0$ perciò si avrà:

$$(10) \qquad \left[\sum_{r=1}^{n_i} \varphi\,(t_{i-1}, I_{i,r}) - \varphi\,(t_{i-1}, I_i)\right]^- \leq [\varphi\,(t_{i-1}, J_i^*) - \varphi\,(t_{i-1}, I_i)]^-.$$

Ora, siccome $J_i^* \subset I_i$ e mis $(I_i - J_i^*) \leq 2\lambda \leq \nu_2$, $i = 1, 2, \ldots, N$, dalla (iii) si avrà:

$$(11) \qquad [\varphi\,(t_{i-1}, J_i^*) - \varphi\,(t_{i-1}, I_i)]^- \leq \sigma_2 = \varepsilon/2N.$$

Sommando allora la (8) relativamente all'indice i e tenendo conto delle (9), (10), (11), si avrà:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{N} [\sum_{J \subset I_i} \psi\,(J) - \psi\,(I)]^- \leq \sum_{i=1}^{N} \left\{(\varepsilon/2W\,(\theta)) \sum_{r=1}^{n_i} \theta\,(I_{i,r}) + \varepsilon/2N\right\} \leq \varepsilon.$$

Il teorema è così dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Come già osservammo anche in [2] (Teor. 2) l'ipotesi (i) può essere sostituita con l'altra che $\varphi(\xi, I)$ sia approssimativamente subadditiva rispetto ad I uniformemente rispetto a ξ.

OSSERVAZIONE 2. È chiaro che il Teor. 1 sussiste ancora se la (iii) anziché richiederla in generale si richiede solo per gli intervalli I di ampiezza sufficientemente piccola, cioè, più precisamente, se si richiede che esista un $\tau > 0$ tale che per ogni $\xi \in [a, b]$ e per ogni $I \in \{I\}$, con $|I| < \tau$ la $\varphi(\xi, I)$ sia semicontinua inferiormente dall'interno su I.

Restringiamoci ora al caso che $\varphi(\xi, I)$ non dipenda da ξ cioè sia una funzione $\psi(I)$ del solo intervallo I. Sussistono allora i seguenti due teoremi.

TEOREMA 2. *Se $\psi(I)$, $I \in \{I\}$ è approssimativamente subadditiva e semicontinua inferiormente dall'interno allora essa è quasi subadditiva.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue dal Teor. 1. e dalla Osservazione 1, tuttavia la riporteremo per esteso. Per l'approssimata subadditività, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $I \in \{I\}$ con $|I| < \rho$ e comunque si fissino $I_1, I_2, \dots, I_n$, con $I_i \cap I_j^0 = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I$, si ha: $\psi(I) \leq \sum_{i=1}^{n} \psi(I_i) + \varepsilon|I|$.

Fissato allora $\eta = \eta(\varepsilon) = \rho(\varepsilon/2(b-a))$ prendiamo $D_0 \in \mathcal{D}$ con $D_0 = [I]$, $\delta(D_0) < \eta$ e indichiamo con N il numero degli intervalli di D_0.

Per ciascun $I \in D_0$ e per $\sigma_2 = \varepsilon/2N$ sia $\nu_2(\varepsilon, I)$ il numero fornito dalla semicontinuità inferiore dall'interno e sia $\nu_2(\varepsilon) = \min_{I \in D_0} \nu_2(\varepsilon, I)$. Prendiamo ora $\lambda = \lambda(\varepsilon, D_0) = \min(\nu_2/2, \eta)$.

Per ogni $D \in \mathcal{D}$, $D = [J]$ con $\delta(D) < \lambda$ si ha allora:

$$\sum_{I \in D_0} \Big[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I) \Big]^- =$$

$$= \sum_{I \in D_0} \Big[\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi\Big(\bigcup_{J \subset I} J\Big) + \psi\Big(\bigcup_{J \subset I} J\Big) - \psi(I) \Big]^- \leq$$

$$\leq \sum_{I \in D_0} \Big\{ (\varepsilon/2(b-a)) \sum_{J \subset I} |J| + \Big[\psi\Big(\bigcup_{J \subset I} J\Big) - \psi(I)\Big]^- \Big\} \leq \varepsilon.$$

Da ciò segue la tesi.

THEOREMA 3. *Se $\psi(I)$ è subadditiva e semicontinua inferiormente dall'interno, allora essa è quasi subadditiva in senso forte.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una qualunque $D_0 \in \mathcal{D}$, $D_0 = [I]$ e indichiamo con N il numero dei suoi intervalli. Preso comunque un $\varepsilon > 0$ e posto $\sigma_2 = \varepsilon/N$, sia $\nu_2(\varepsilon, I)$ il numero fornito dalla semicontinuità inferiore dall'interno su $I \in D_0$. Poniamo $\nu_2(\varepsilon) = \min_{I \in D_0} \nu_2(\varepsilon, I)$ e $\lambda(\varepsilon, D_0) = \min(\nu_2/2, \delta(D_0))$.

Se $D \in \mathcal{D}$, $D = [J]$ con $\delta(D) < \lambda$, si ha allora:

$$\sum_{I \in D_0} [\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(I)]^- =$$

$$= \sum_{I \in D_0} [\sum_{J \subset I} \psi(J) - \psi(\bigcup_{J \subset I} J) + \psi(\bigcup_{J \subset I} J) - \psi(I)]^- \leq$$

$$\leq \sum_{I \in D_0} [\psi(\bigcup_{J \subset I} J) - \psi(I)]^- \leq \sum_{I \in D_0} \varepsilon/N = \varepsilon.$$

Il teorema resta cosí provato.

Dai teoremi 1, 2, 3, si ottengono i seguenti teoremi di esistenza per $V(\psi)$.

TEOREMA 1'. *Se $\varphi(\xi, I)$ è non negativa e soddisfa le ipotesi del Teor. 1. allora esiste (finito o $+\infty$) il*

$$\lim_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) = \lim_{\delta(D) \to 0} \sum_{I \in D} \varphi(\xi_I, I) = V(\psi).$$

La dimostrazione segue dal Teor. 1 e dalla p_2) del n. 2.

TEOREMA 2'. *Se $\psi(I)$ soddisfa alle ipotesi del Teor. 2 ed inoltre è non negativa (oppure continua) allora esiste (finito o $+\infty$) il*

$$\lim_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) = \lim_{\delta(D) \to 0} \sum_{I \in D} \psi(I) = V(\psi).$$

La dimostrazione è conseguenza del Teor. 2, e della p_2) del n. 2 oppure del Lemma 1.

TEOREMA 3'. *Se $\psi(I)$ soddisfa alle ipotesi del Teor. 3 ed inoltre è non negativa (oppure continua) allora esiste (finito o $+\infty$) il*

$$\lim_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) = \lim_{\delta(D) \to 0} \sum_{I \in D} \psi(I) = V(\psi)$$

ed inoltre è

$$V(\psi) = \sup_{D \in \mathcal{D}} \sum_{I \in D} \psi(I).$$

Nel caso che $\psi(I)$ sia non negativa la dimostrazione segue dal Teor. 3 e dalla p_4) del n. 2 ; nel caso che $\psi(I)$ sia continua la dimostrazione si ottiene rapidamente a partire dal Teor. 3 e dal Lemma 1.

Diamo ora qualche formulazione del Teor. 1 sotto ipotesi più forti, ma di più agevole uso.

TEOREMA 4. *Se* $\varphi(\xi, I)$ *gode delle proprietà* (i), (ii) *ed inoltre della* (iv) *esiste una funzione* $\theta_1(I)$ *continua tale che* $\varphi(\xi, I) \leq \theta_1(I)$ *per ogni* $\xi \in [a, b]$,

allora $\varphi(\xi_I, I)$ *è quasi subadditiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se proviamo che (i) e (iv) implicano (iii) nella formulazione debole fatta nella Osser. 2 del Teor. 1, il teorema sarà dimostrato.

A questo scopo, fissato $\sigma_2 > 0$, sia $\rho = \rho(\sigma_2) > 0$ un numero tale che, se $|I| < \rho$ allora $|\theta_1(I)| < \sigma_2/2$. Preso un intervallo A arbitrario con $A \subset I$ e $|I| < \rho$ e indicati con J_1 e J_2 i due sottointervalli di I che sono a sinistra e a destra di A, si ha :

$$[\varphi(\xi, A) - \varphi(\xi, I)]^- = [\varphi(\xi, A) + \varphi(\xi, J_1) + \varphi(\xi, J_2) - \\ - \varphi(\xi, I) - \varphi(\xi, J_1) - \varphi(\xi, J_2)]^-$$

ed allora, per la (i), si avrà :

$$[\varphi(\xi, A) - \varphi(\xi, I)]^- \leq [-\varphi(\xi, J_1) - \varphi(\xi, J_2)]^- \leq \\ \leq |\theta_1(J_1)| + |\theta_1(J_2)| \leq \sigma_2$$

e quindi la (iii).

COROLLARIO 1. *Se* $\varphi(\xi, I)$ *gode delle proprietà* (i), (ii) *e della* (iv') *esiste una funzione* $\theta_2(I) \geq 0$ *continua e tale che*

$$|\varphi(\xi, I)| \leq \theta_2(I) \text{ per ogni } \xi \in [a, b],$$

allora la funzione $\psi(I) = \varphi(\xi_I, I)$ *è quasi subadditiva ed esiste (finito o* $+\infty$*) il*

$$\lim_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) = V(\psi).$$

Se poi $\theta_2(I)$ *è tale che* $W(\theta_2) < +\infty$ *allora* $\psi(I)$ *è quasi additiva e quindi* $V(\psi) < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi (iv') implica (iv) e quindi, per il Teor. 4, $\psi(I)$ è quasi subadditiva e ciò, unito alla (iv') comporta, per il Lemma 1, che $V(\psi)$ esiste (finito o $+\infty$). Se poi $W(\theta_2) < +\infty$ allora, essendo $S(\psi, D) \leq \sum_{I \in D} |\varphi(\xi_I, I)| \leq S(\theta_2, D)$, sarà $V(\psi) \leq W(\theta_2) < +\infty$. Adoperando allora il Lemma 2 si conclude la dimostrazione.

Concludiamo questo numero con una osservazione che collega i risultati qui ottenuti con un noto Teorema di Tonelli [11].

OSSERVAZIONE 3. *Se* $\varphi(\xi, I)$ *gode della* (i), *della* (iii) *con* $\theta(I)=|I|$ *e della* (iv′) *allora la funzione* $\psi(I)=\varphi(\xi_I, I)$ *oltre ad essere quasi subadditiva è anche approssimativamente subadditiva.* Infatti: fissato comunque $\sigma_1 > 0$ sia $\nu_1(\sigma_1)$ il numero di cui alla (ii). Preso comunque $I \in \{I\}$ con $I = [t_1, t_2]$, $|I| < \nu_1$ e indicati con $I_j = [\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gli intervalli di una arbitraria decomposizione di I, si ha:

$$\psi(I) - \sum_{j=1}^{n} \psi(I_j) = \varphi(t_1, I) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(\tau_{j-1}, I_j).$$

Se al secondo membro sommiamo e sottraiamo la quantità $\sum_{j=1}^{n} \varphi(t_1, I_j)$ e teniamo conto della (i), si ha:

$$\psi(I) - \sum_{j=1}^{n} \psi(I_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \{\varphi(t_1, I_j) - \varphi(\tau_{j-1}, I_j)\}.$$

Da questa, tenuto conto della (ii) con $\theta(I) = |I|$, segue la tesi.

4. Applicazioni.

In questo numero applicheremo i risultati precedenti all'integrale del Calcolo delle Variazioni nel senso di Weierstrass nel caso ordinario.

Sia $f(t, u, v)$ una funzione definita per $t \in [a, b]$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}$.

Data una curva continua di equazione $x = x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $t \in [a, b]$, consideriamo la funzione d'intervallo $\psi(I)$ definita, per $I \in \{I\}$, $I = [t_1, t_2]$ dalla espressione:

$$\psi(I) = (t_2 - t_1) f\left(t_1, x(t_1), \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\right). \tag{13}$$

Se esiste $V(\psi) = \lim_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D)$ essendo $\delta(D)$ la ordinaria « mesh », diremo, seguendo C. Vinti [11], che esiste l'integrale di Weierstrass di f relativamente alla curva $x = x(t)$.

Nel seguito ci tornerà utile considerare, oltre alla (13), anche la seguente funzione $\varphi(\xi, I)$ definita, per $\xi \in [a, b]$, $I \in \{I\}$, $I = [t_1, t_2]$, da

$$\varphi(\xi, I) = (t_2 - t_1) f\left(\xi, x(\xi), \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\right). \tag{14}$$

Sfruttando i precedenti risultati si ha allora:

LEMMA 3. *Se $f(v)$ è convessa in v e se $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}^n$, è una curva continua allora $\psi(I)$ è quasi subadditiva in senso forte.*

DIMOSTRAZIONE. È noto che $\psi(I)$ è subadditiva (vedi ad es. [3]), di conseguenza, per il Teor. 3, basterà far vedere che essa è semicontinua inferiormente dall'interno su ogni $I \in \{I\}$. A questo scopo, fissato $I \in \{I\}$, $I = [t_1, t_2]$ e preso un intervallo $A \subset I$, $A = [\rho_1, \rho_2]$ osserviamo che, se mis $(I - A)$ è sufficientemente piccola, l'espressione $(\varrho_2 - \varrho_1) f\left(\frac{x(\varrho_2) - x(\varrho_1)}{\varrho_2 - \varrho_1}\right)$, a causa della continuità di $x(t)$ e di $f(v)$, differisce di quanto poco si vuole da $(t_2 - t_1) f\left(\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\right)$ e ciò implica il risultato richiesto. Sfruttando allora il Teor. 3 si ha la tesi.

LEMMA 4. *Se $f(t, u, v)$ è continua nel complesso dei suoi argomenti e convessa in v per ogni $(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ e se inoltre per ogni limitato $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ la funzione $f(t, u, v)/(1 + |v|)$ è uniformemente continua in $(t, u) \in B$ uniformemente rispetto a $v \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni curva continua e a variazione limitata $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, la funzione $\psi(I) = \varphi(\xi_I, I)$ è quasi subadditiva. (Nel caso che la f stessa goda della proprietà di uniforme continuità richiesta allora la conclusione del teorema vale per ogni curva che sia solo continua.)*

DIMOSTRAZIONE. Basterà provare le (i), (ii), (iii) del Teor. 1. È noto che la (i) sussiste (vedi ad es. [3]) e la (iii) si prova come nel Lemma 3. Rimane dunque la (ii). A questo scopo, considerato il limitato $B \equiv \{(t, u),\ a \leq t \leq b,\ u = x(t)\}$ per la uniforme continuità di $f(t, u, v)/(1 + |v|)$ in $(t, u) \in B$ uniformemente rispetto a v, comunque si scelga $\sigma_1 > 0$ esisterà un $\rho_1 = \rho_1(\sigma_1) > 0$ tale che, se $\xi, \eta \in [a, b]$, $|\xi - \eta| < \rho_1$, e qualunque sia $v \in \mathbb{R}^n$ è:

$$\left| \frac{f(\xi, x(\xi), v) - f(\eta, x(\eta), v)}{1 + |v|} \right| \leq \sigma_1. \tag{15}$$

Prendiamo allora $\nu_1(\sigma_1) = \rho_1(\sigma_1)/4$. Se $I \in \{I\}$, $\xi, \eta \in [a, b]$ ed inoltre $d(\xi, I) < \nu_1$, $d(\eta, I) < \nu_1$, $|I| < \nu_1$ dalle (14) e (15) si ha:

$$|\varphi(\xi, I) - \varphi(\eta, I)| \leq \sigma_1 \{ |I| + |\Delta x(I)| \}$$

dove $\Delta x(I)$ è l'incremento della $x(t)$ in I. Posto dunque $\theta(I) = |I| + |\Delta x(I)|$ e tenuto conto che $x(t)$ è a variazione limitata segue la tesi. (Se invece f è uniformemente continua nel modo prima richiesto per $f(t, u, v)/(1+|v|)$ allora la conclusione vale ancora per ogni curva continua ma non necessariamente a variazione limitata in quanto in questo caso si può prendere $\theta(\mathrm{I}) = |I|$.).

Dai Lemmi 3 e 4 discendono i seguenti teoremi.

TEOREMA 5. *Se $f(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$, è non negativa e convessa in v e se $x(t)$ è una curva continua allora esiste (finito o $+\infty$) l'integrale di f relativamente alla $x(t)$ nel senso di Weierstrass $V(\psi)$ ed inoltre risulta*

$$V(\psi) = \sup_{D \in \mathcal{D}} S(\psi, D).$$

La dimostrazione segue immediatamente dal Lemma 3 e dal Teor. 3'.

TEOREMA 6. *Se $f(t, u, v)$ e $x = x(t)$ soddisfano le ipotesi del Lemma 4 e se f è non negativa allora esiste (finito o $+\infty$) l'integrale di f relativamente alla $x(t)$ nel senso di Weierstrass.*

La dimostrazione discende dal Lemma 4 e dal Teor. 1'.

Vogliamo ora dare una condizione sufficiente per la quasi additività di $\psi(I)$ e quindi per l'esistenza finita di $V(\psi)$ relativamente a curve continue e a variazione limitata.

TEOREMA 7. *Se $f(t, u, v)$ soddisfa alle ipotesi del Lemma 4 e se inoltre per ogni limitato $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ esiste una costante $H_B \geq 0$ tale che risulti:*

(16) $\quad |f(t, u, v)| \leq H_B(|v| + 1) \quad$ *per $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $(t,u) \in B$,*

allora per ogni curva continua e variazione limitata $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, la corrispondente funzione $\psi(I)$ è quasi additiva ed inoltre si ha:

$$V(\psi) = \lim_{h \to 0^+} \int_a^{b-h} f\left(t, x(t), \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right) dt. \tag{17}$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ il limitato $\{(t, u), a \leq t \leq b, u = x(t)\}$ e con H_B la corrispondente costante. Dalla (16) si ha: $|\psi(I)| \leq H_B [|I| + |\Delta x(I)|]$ per ogni $I \in \{I\}$ e dove $\Delta x(I)$ indica l'incremento subito da $x(t)$ in I. Sfruttando allora il Lemma 4, il Coroll. 1 del Teor. 4 e il fatto che $x(t)$ è a variazione limitata, si deduce che $\psi(I)$ è quasi additiva. La (17) segue poi immediatamente da un Teorema di C. Vinti [12].

Facendo una ipotesi più stringente della (16) si ha il seguente:

TEOREMA 8. *Sia $x = x(t)$, $t \in [a, b]$ una curva continua ed $f(t,u,v)$ una funzione soddisfacente alle ipotesi del Lemma 4, non negativa e tale che per ogni limitato $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ esistano due costanti $H_B, K_B > 0$ in modo che risulti:*

$$H_B |v| \leq 1 + f(t, u, v) \leq K_B |v| \text{ per } |v| \geq 1 \text{ e per ogni } (t, u) \in B. \tag{18}$$

Allora condizione necessaria e sufficiente perché $\psi(I)$ sia quasi additiva è che $x(t)$ sia a variazione limitata. In questo caso si ha:

$$V(\psi) \geq \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt \tag{19}$$

l'uguaglianza sussistendo se e solo se $x(t)$ è assolutamente continua (1).

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con B il limitato $\{(t, u), t \in [a, b], u = x(t)\}$ e con H_B e K_B le corrispondenti costanti. Se $x(t)$ è a variazione limitata allora per il Teor. 7 la corrispondente $\psi(I)$ è quasi additiva. Per vedere il viceversa osserviamo che si può sempre supporre $H_B \leq 1$ e di conseguenza da (18) segue:

$$f(t, u, v) \geq -1 + H_B |v| \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Se dunque $\psi(I)$ è quasi additiva esiste finito $V(\psi)$ e quindi, dalla (20), segue che $x(t)$ è a variazione limitata. La (19) segue da un risultato di C. Vinti [11]. Se poi $x(t)$ è assolutamente continua, sfruttando un nostro precedente risultato [2], si ha l'uguaglianza nella (19). Viceversa se nella (19) vale l'uguaglianza lo stesso accade, a causa ancora della (19), in ogni sottointervallo di $[a, b]$; tenuto conto di ciò, dalla (20) si

(1) Una ipotesi del tipo (18) si trova in un lavoro di J. Serrin [9].

ha per ogni $I \in \{I\}$ $V(x, I) H_B \leq |I| + \int_I f(\xi, x(\xi), x'(\xi))\, d\xi$ dove $V(x, I)$ è la variazione totale di $x(t)$ su I. Da ciò segue facilmente la assoluta continuità di $x(t)$.

Esaminiamo ora la particolare classe di integrandi $f(t, u, v)$, già studiati da C. Vinti, [11], continui globalmente e che godono della proprietà:

(γ) *considerata per $\rho > 0$ la funzione*

$$G(t, u; \rho, v) = \rho f(t, u, v/\rho)$$

essa si può estendere a tutto $\rho \geq 0$ in modo che risulti continua.

In [11] C. Vinti mostrò che per tali integrandi esiste l'integrale alla Weierstrass relativamente ad ogni curva continua e a variazione limitata. Noi mostreremo che per la sottoclasse costituita da quegli integrandi f che godono della (γ) e in più sono convessi in v per ogni $(t, u) \in [a, b]$ oltre ad esistere l'integrale alla Weierstrass lungo una qualunque curva continua e a variazione limitata, la funzione associata risulta quasi additiva. Ciò è conseguenza del Teor. 7 e del seguente teorema che caratterizza gli integrandi f continui globalmente e convessi in v che godono della proprietà (γ).

TEOREMA 9. *Se $f(t, u, v)$ è continua nel complesso dei suoi argomenti e convessa in v allora essa gode della proprietà (γ) se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:*

(c_1) *per ogni limitato $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ esiste una costante H_B tale che $|f(t, u, v)| \leq H_B(1 + |v|)$ per $(t, u) \in B$, $v \in \mathbb{R}^n$;*

(c_2) *per ogni limitato $B \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$ la funzione $f(t, u, v)/(1+|v|)$ è uniformemente continua in $(t, u) \in B$ uniformemente rispetto a v.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f(t, u, v)$ gode della (γ) allora si ha:

$$|f(t, u, v)| = |G(t, u; 1, v)| = (1+|v|)\, G\left(t, u; \frac{1}{1+|v|}, \frac{v}{1+|v|}\right)$$

e da questa segue la (c_1).
Osservato poi che

$$\left|\frac{f(t_1, u_1, v) - f(t_2, u_2, v)}{1+|v|}\right| =$$

$$= \left|G\left(t_1, u_1; \frac{1}{1+|v|}, \frac{v}{1+|v|}\right) - G\left(t_2, u_2, \frac{1}{1+|v|}, \frac{v}{1+|v|}\right)\right|$$

da questa segue facilmente la (c_3).

Viceversa se f gode delle (c_1), (c_2), a causa della convessità la funzione $\rho f(t, u, v/\rho)$ è monotona in ρ per $\rho>0$ (si veda ad es. [7]) e quindi esiste il $\lim_{\varrho \to 0^+} \rho f(t, u, v/\rho)$ e tale limite, a causa di (c_1), è finito. Oltre a ciò, sempre a causa della convessità rispetto a v e della (c_1), per ogni $(t,u)\in B$ $f(t,u,v)$ risulta lipschitziana in v con costante H_B e a causa della continuità di f, la $G(t, u;\ \rho, v)$ risulta continua nel complesso dei suoi argomenti per $t\in[a, b]$, $u\in\mathbb{R}^n$, $\rho>0$, $v\in\mathbb{R}^n$. Basterà dunque mostrare che $G(t, u;\ \rho, v)$ è continua nel complesso dei suoi argomenti in un punto del tipo $t = t_0$, $u = u_0$, $\rho = 0$, $v = v_0$.

A questo scopo osserviamo che:

$$(21)\qquad |G(t_0, u_0;\ 0, v_0) - G(t, u; \rho, v)| = \lim_{\xi \to 0^+} |\xi f(t_0, u_0, v_0/\xi) - \rho f(t, u, v/\rho)|$$

ed inoltre:

$$(22)\qquad |\xi f(t_0, u_0, v_0/\xi) - \rho f(t, u, v/\rho)| \leq |\xi f(t_0, u_0, v_0/\xi) - \rho f(t_0, u_0, v_0/\rho)| + |\rho f(t_0, u_0, v_0/\rho) - \rho f(t_0, u_0, v/\rho)| + |\rho f(t_0, u_0, v/\rho) - \rho f(t, u, v/\rho)|.$$

Nella (22) potremo sempre supporre che (t, u) vari in un limitato B e che sia $|v| \leq M$, $0<\rho<\tau$ con M e τ costanti positive. Ciò posto, tenuto conto della (c_1), per ogni $\varepsilon>0$ esisterà un $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tale che se $0 < \xi < \delta'$ e $0 < \rho < \delta'$, si ha:

$$(23)\qquad |\xi f(t_0, u_0, v_0/\xi) - \rho f(t_0, u_0, v_0/\rho)| \leq |\xi f(t_0, u_0, v_0/\xi) - G(t_0, u_0;\ 0, v_0)| + |G(t_0, u_0;\ 0, v_0) - \rho f(t_0, u_0, v_0/\rho)| < \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/3.$$

A causa poi della lipschitzianità di f in v, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta'' = \delta''(\varepsilon) > 0$, tale che, se $|v - v_0| < \delta''$ allora si ha:

$$(24)\qquad |\varrho f(t_0, u_0, v_0/\varrho) - \varrho f(t_0, u_0, v/\varrho)| \leq \varrho H_B \left| \frac{v_0}{\varrho} - \frac{v}{\varrho} \right| < \varepsilon/3.$$

Infine, a causa della (c_2), per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $\delta''' = \delta'''(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|t-t_0|<\delta'''$, $|u-u_0|<\delta'''$, e $|v|<M$, $0<\rho<\tau$ allora risulta:

$$(25)\qquad |\varrho f(t_0, u_0, v/\varrho) - \varrho f(t, u, v/\varrho)| =$$

$$= \varrho \left(1 + \frac{|v|}{\varrho}\right) \frac{|f(t_0, u_0, v/\varrho) - f(t, u, v/\varrho)|}{1 + \frac{|v|}{\varrho}} \leq$$

$$\leq (\tau + M) \frac{|f(t_0, u_0, v/\varrho) - f(t, u, v/\varrho)|}{1 + \frac{|v|}{\varrho}} < \varepsilon/3.$$

Dalle (21), (22), (23), (24), (25) segue allora che, posto $\delta = \min(\delta', \delta'', \delta''')$, se $|t - t_0| < \delta$, $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, $0 < \rho < \delta$, si ha:

$$|G(t_0, u_0; 0, v) - G(t, u; \rho, v)| < \varepsilon.$$

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

5. Un esempio.

Diamo ora un esempio di integrando $f(t, u, v)$ continuo nel complesso dei suoi argomenti, convesso in v, non negativo e soggetto ad una dominazione del tipo (16), per il quale, relativamente ad una curva $x = x(t)$ continua e a variazione limitata, non esiste l'integrale nel senso di Weierstrass.

Questo esempio mostra che l'ipotesi di continuità uniforme da noi fatta nel Lemma 4 e successivi teoremi, non può essere, in generale, abbandonata.

Sia $A = [0, 1]$. Indichiamo con $I_{1,1}$ l'intervallo chiuso centrato nel punto medio di A e di ampiezza $1/3$. Presi i due intervalli che rimangono in A togliendo $I^0_{1,1}$, ripetiamo per essi l'operazione fatta su A costruendo cosí due intervalli di ampiezza però $1/3^2$ e indichiamoli con $I_{2,1}$, $I_{2,2}$ seguendo il verso da 0 a 1. Ripetiamo l'operazione sui quattro intervalli che rimangono in A togliendo $I^0_{2,1}$, $I^0_{2,2}$, $I^0_{1,1}$ costruendo quattro intervalli di ampiezza $1/3^3$ e indichiamoli con $I_{3,1}$, $I_{3,2}$, $I_{3,3}$, $I_{3,4}$.

Cosí proseguendo, al passo k-esimo costruiremo 2^{k-1} intervalli di ampiezza $1/3^k$ e li indicheremo con $I_{k,i}$ $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, k \in N^+$. Per ciascun $k \in N^+$ indichiamo con $x_{k,1}\, x_{k,2}, \dots, x_{k,\, 2^{k-1}}$ i punti medi degli $I_{k,i}$ e indichiamo con $\gamma_{k,i}(t)$, $(t \in I^0_{k,i})$ una curva convessa e positiva tale che $\gamma_{k,i}(x_{k,i}) = 3^{k-1}/2^k$ e tale inoltre che i limiti rispettivamente destro e sinistro negli estremi di $I_{k,i}$ siano $+\infty$. Sia poi $\mathbb{K}$ l'insieme di Cantor su $[0,1]$. Ciò posto consideriamo la funzione $f(t, v)$ definita per $t \in [0,1]$

e $v \in \mathbb{R}$ da:

$$f(t,v)=\begin{cases}0 & \text{per } t\in I^0_{k,i} \text{ e } v\le \gamma_{k,i}(t),\ (i=1,\dots,2^{k-1},\ k\in N^+)\\ v-\gamma_{k,i}(t) & \text{per } t\in I^0_{k,i} \text{ e } v\ge \gamma_{k,i}(t),\ (\quad \text{»}\quad \text{»}\quad \text{»}\quad)\\ 0 & \text{per } t\in \mathbb{K} \text{ e per ogni } v.\end{cases}$$

La $f(t,v)$ cosí definita è convessa in v per ogni $t\in[0,1]$, non negativa e continua globalmente in (t,v). Oltre a ciò è $f(t,v)\le|v|$, ma $f(t,v)/(1+ +|v|)$ non è uniformemente continua in t uniformemente rispetto a v. Indichiamo ora con $x=x(t)$ la curva di Vitali-Cantor e mostriamo che non esiste l'integrale di f relativamente a $x(t)$ nel senso di Weierstrass. A questo scopo sia $D=[J_r]$ una suddivisione di $[0,1]$ ottenuta mediante i punti $0, 1/3^n, 2/3^n, \dots, (3^n-1/3^n), 1$ con n intero opportuno. Relativamente ad essa si ha:

$$S(\psi, D)=\sum_{r=1}^{3^n}|J_r|\,f\left(\frac{r-1}{3^n}, \frac{\Delta x(J_r)}{|J_r|}\right)$$

dove $\Delta x(J_r)$ è l'incremento subito da $x(t)$ in J_r.

Nella somma ora scritta vi sono degli addendi che sono relativi ad intervalli J_r che sono del tipo $I_{n,i}$ e per essi allora risulta $f\left(\frac{r-1}{3^n}, \frac{\Delta x(J_r)}{|J_r|}\right)=0$. inquanto in questo caso $(r-1)/3^n\in\mathbb{K}$. Vi sono poi altri J_r il cui estremo sinistro è un punto di $\mathbb{K}$ ed anche essi danno contributo nullo nella somma. Quei J_r che rimangono sono allora contenuti in qualche $I_{k,i}$ per $k<n$ ed allora per essi è $\Delta x(J_r)=0$ e quindi anche $f\left(\frac{r-1}{3^n}, \frac{\Delta x(J_r)}{|J_r|}\right)=0$.

Dunque per ogni decomposizione D del tipo ora considerato è $S(\psi, D)=0$. Prendiamo ora un altro tipo di suddivisioni $D'=[J']$ cosí costruita; per un fissato n prendiamo gli intervalli di ampiezza $1/2\cdot 3^{n-1}$ aventi per estremo sinistro $x_{n,i}$ $(i=1,2,\dots,2^{n-1})$ e indichiamoli con $J_{n,i}$. Aggiungiamo poi in modo arbitrario intervalli di ampiezza più piccola di $1/2\cdot 3^{n-1}$ in modo da formare una suddivisione di $[0,1]$ che indichiamo con D'. Si ha allora:

$$S(\psi, D')\ge\sum_{i=1}^{2^n-1}\psi(J_{n,i})=\sum_{i=1}^{2^n-1}|J_{n,i}|\,f\left(x_{n,i}, \frac{\Delta x(J_{n,i})}{|J_{n,i}|}\right).$$

Osserviamo ora che $\Delta x(J_{n,i})=2^{-n}$ onde $\Delta x(J_{n,i})/|J_{n,i}|=2^{-n}\cdot 2\cdot 3^{n-1}> >3^{n-1}/2^n$ onde

$$f\left(x_{n,i}, \frac{\Delta x(J_{n,i})}{|J_{n,i}|}\right)=3^{n-1}/2^{n-1}-3^{n-1}/2^n=3^{n-1}/2^n.$$

Si ha perciò: $S(\psi, D') \geq 2^{n-1} \cdot 2^{-1} \cdot 3^{1-n} \cdot 3^{n-1} \cdot 2^{-n} = 1/4$.

Abbiamo dunque suddivisioni arbitrariamente fini relativamente alle quali $S(\psi, D) = 0$ e altre sempre arbitrariamente fini relativamente alle quali $S(\psi, D') \geq 1/4$. Ne consegue che non esiste il $\lim\limits_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D)$ e che quindi $\psi(I)$ non è nè quasi additiva nè quasi subadditiva. Si osservi inoltre che essendo

$$0 \leq f(t, v) \leq |v|$$

è

$$0 \leq \underline{\lim}_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) \leq \overline{\lim}_{\delta(D) \to 0} S(\psi, D) < +\infty.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Aronszajn: *Quelques recherches sur l'intégrale de Weierstrass,* Comptes Rendus de l'Acc. des Sci. (1939), pp. 490.

[2] M. Boni : *L'integrale di Weierstrass non parametrico e quasi additività,* Rend. Circ. Mat. Palermo, (1973).

[3] J. C. Breckenridge : *Contributions to the theory of non parametric Weierstrass integrals,* Atti Sem. Mat. Fis. Università Modena vol. XXI, Fasc. I, (1972), pp. 145-155.

[4] J. C. Burkill : *Functions of intervals,* Proc. London Mat. Soc. serie 2, vol. 22, parte 4, (1923).

[5] L. Cesari : *Quasi additive set functions and the concept of integral over a variety.* Trans. Amer. Mat. Soc. vol. 102 (1962), pp. 94-113.

[6] L. Cesari : *Extension problem for quasi additive set functions and Radon Nykodym derivatives,* Trans. Amer. Mat. Soc. vol. 102, (1962) pp. 114-146.

[7] H. G. Eggleston : *Convexity,* Cambridge Tracts in Mat. and Mat. Phy. No. 47.

[8] K. Menger : *Calcul des variations dans les espaces distanciés généraux,* Comptes Rendus de l'Acc. des Sci., (1939), I, pp. 1007.

[9] J. Serrin : *On the definition and properties of certain variational integrals,* Trans. Amer. Mat. Soc., vol. 101, 1961, pp. 139-167.

[10] L. Tonelli : *Sulle funzioni di intervallo,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa serie II, vol. VIII, (1939), pp. 1-13.

[11] C. Vinti : *L'integrale di Weierstrass e l'integrale del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria,* Atti Ac. Sci. Lett. Art. Palermo serie IV, vol. XIX, (1958-59), parte I, pp. 5-36.

[12] C. Vinti : *L'integrale di Weierstrass-Burkill,* Atti Sem. Mat. Fis. Università Modena, vol. XVIII, fasc. II, pp. 295-316.