STUDIO SUI SEMIGRUPPI CON ELEMENTI ACCRESCITIVI (*)

di Franco Migliorini (a Firenze) (**)

Sommario. - *In questo lavoro si esaminano semigruppi S con elementi accrescitivi sinistri, $S=aM$ (1), $a\in S$, $M\subset S$, ove M è un sottosemigruppo minimale per a. Si prova che S contiene un sottosemigruppo isomorfo al semigruppo biciclico $\mathcal{C}(p, q)$ (Teorema* I.1); *questo risultato generalizza, in parte, un teorema di Ljapin. Un teorema di Desq suggerisce una decomposizione di M (Teorema* I.2); *inoltre vengono determinate altre proprietà di S. Successivamente si introduce e si studia un nuovo esempio di semigruppo Σ con elementi accrescitivi sinistri che ha interessanti proprietà particolari. Se M in* (1) *è un ideale destro, S deve contenere un sottosemigruppo isomorfo a Σ (Teorema* II.3.1). *Viceversa, se esiste un monomorfismo di Σ in un semigruppo S, si deduce l'esistenza di certi elementi accrescitivi (Teorema* II.3.2), *e in tal modo si generalizza un altro risultato di Desq (e Ljapin) per un semigruppo con unità sinistra (o destra).*

Summary. - *In this paper we investigate semigroups S with left magnifying elements, $S=aM$ (1), $a\in S$, $M\subset S$, M minimal subsemigroup for a. We prove that S must contain a subsemigroup isomorphic to the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$ (Theorem* I.1); *this result generalizes,, in part, a theorem of Ljapin. A decomposition of M is suggested by a theorem of Desq (Theorem* I,2); *furthermore other properties of S are determined. After that, we introduce (and study) a new example of a semigroup with left magnifying elements, Σ, which has special interesting properties. If M in* (1) *is a ringht ideal, S must contain a subsemigroup isomorphic to Σ (Theorem* II.3.1). *In the contrary, if there is a monomorphism of Σ in a semigroup S, then we deduce the existence of certain magnifying elements (Theorem* II.3.2), *and so we generalize another result of Desq (and Ljapin) for a semigroup with one-sided unit.*

(*) Pervenuto in Redazione il 25 settembre 1973.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico dell'Università - Viale Morgagni 67/A - 50134 Firenze.

Introduzione.

Ljapin, introdotto il concetto di *elemento accrescitivo* di un semigruppo, studiò i semigruppi con unità che contengono elementi accrescitivi. In seguito R. Desq, studiando i semigruppi con unità destra che possiedono elementi accrescitivi destri, ha esteso a questi semigruppi i risultati di Ljapin. Noi consideriamo semigruppi S con elementi accrescitivi sinistri, precisamente semigruppi del tipo $S=aM$, con $a \in S$, $M \subset S$, M sottosemigruppo minimale relativo ad a ([1]). Un semigruppo con elementi accrescitivi sinistri e con unità sinistra (cioè del tipo esaminato da Desq) rientra nella nostra classe di semigruppi (cfr. Esempio in [1]), mentre un semigruppo del tipo da noi considerato non ha necessariamente una unità sinistra: produrremo, a questo proposito, l'esempio del semigruppo Σ, interessante principalmente, d'altra parte, per ulteriori aspetti. Dunque la classe di semigruppi oggetto della nostra ricerca è più ampia di quelle studiate da Ljapin e Desq.

Questo lavoro, nella sua prima parte, conclude la precedente nota [1] dell'autore, collegando inoltre l'attuale ricerca, sulla struttura dei semigruppi sopracitati, ai risultati di Desq. Dapprima, infatti, utilizzando anche i risultati di Desq, si precisa quale deve essere, nel nostro caso, la struttura di M; in secondo luogo si determinano direttamente altre particolari proprietà di S.

Nella seconda parte del lavoro si studia un nuovo esempio di semigruppo con elementi accrescitivi, Σ, privo di unità; tale semigruppo, nell'ambito della teoria dei semigruppi del tipo $S=aM$, $a \in S, M \subset S, M$ sottosemigruppo minimale relativo ad a ed M ideale destro di S, giuoca il ruolo del semigruppo biciclico $C(p, q)$ per i semigruppi con elementi accrescitivi e con unità nei risultati conseguiti da Ljapin e da Desq. Inoltre, il Teorema II.3.2, in cui ancora si sfruttano le proprietà di Σ, estende al caso generale di un semigruppo qualsiasi un risultato di Desq riguardante semigruppi con unità destra.

Definizioni preliminari e notazioni.

Per le definizioni di *elemento accrescitivo sinistro* [*destro*] di un semigruppo e di *sottinsieme minimale* relativo ad un elemento accrescitivo sinistro [*destro*], rimandiamo il lettore alla nota [5].

Per la definizione di *sottosemigruppo minimale* relativo ad un elemento accrescitivo sinistro [destro] rimandiamo alla nota [1].

Unità sinistra [*destra*] nel semigruppo S è un elemento e_1 [e_2] tale che $e_1 x = x$, $\forall\, x \in S$ ($xe_2 = x$, $\forall\, x \in S$).

Unità e di S è un elemento di S tale che

$$x\,e = e\,x = x, \forall x \in S.$$

Identità destra (*sinistra*) per un elemento $a \in S$ è un elemento b (c) di S tale che

$$a\,b = a \qquad (c\,a = a).$$

Il semigruppo biciclico, usualmente indicato con $C(p\,q)$, sarà da noi indicato per comodità con P.

Altre notazioni particolari che useremo e che si ricollegano a lavori precedenti dell'autore o di altri saranno di volta in volta spiegate nel corso della nota.

Parte I

I.1) Sia S un semigruppo con un elemento accrescitivo sinistro a, $S = aM$, con $M \subset S$, M sottosemigruppo minimale relativo ad a. Nella nota [1], Teorema 4, abbiamo definito, a partire dalle potenze a^i di a, certi sottinsiemi M_i di M,

$$M_i = \{ m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ik}, \dots \}$$

ove

$$a^i = a\, m_{i1},\ m_{i1} = a m_{i2}, \dots, m_{ik} = a m_{i,k+1}, \dots ;$$

si è poi dimostrato che l'unione insiemistica dei sottinsiemi M_i è un sottosemigruppo M^1 di M,

$$M^1 = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k \cup \dots = \langle M_1, M_2, \dots, M_k, \dots \rangle .$$

Per la moltiplicazione in M^1 valgono le leggi seguenti:

$$m_{ki}\, m_{hj} = m_{h,i+j-k} \quad \text{se } j \geq k;$$

$$m_{ki}\, m_{hj} = m_{h+k-j,i} \quad \text{se } j < k.$$

Abbiamo anche dimostrato ([1], Teorema 1) che gli elementi m_{ij} di $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k \cup \dots$ sono tutti diversi tra loro (cioè $m_{ir} \neq m_{is}$ per $r \neq s$, $i \in N$; $M_p \cap M_q = \emptyset$, $p \neq q$).

Sia P il semigruppo biciclico, cioè il semigruppo libero generato da due elementi, p e q, con l'unica relazione $p\,q = e$, e unità ($pe = ep = p$, $qe = eq = q$). La forma canonica degli elementi di P è $q^r\,p^s$ ($r, s \geq 0$ interi; $q^0 = p^0 = e$) (cfr. [6]).

La corrispondenza tra P ed M^1, $\mathcal{U}$, per cui

$$\mathcal{U}(q^n\,p^k) = m_{k+1,n+1} \quad (n, k \geq 0, \quad \text{interi})$$

è evidentemente una corrispondenza biunivoca tra P ed M^1. Ma, di più, $\mathcal{U}$ conserva il prodotto; infatti, se $k > r$,

$$\mathcal{U}(q^n\,p^k\,q^r\,p^s) = \mathcal{U}(q^n\,p^{s+k-r}) = m_{s+k-r+1,n+1} =$$

$$= m_{k+1,n+1}\,m_{s+1,r+1} = \mathcal{U}(q^n\,p^k) \cdot \mathcal{U}(q^r\,p^s);$$

e se $k \leq r$,

$$\mathcal{U}(q^n\,p^k\,q^r\,p^s) = \mathcal{U}(q^{n+r-k}\,p^s) = m_{s+1,n+r-k+1} =$$

$$= m_{k+1,n+1}\,m_{s+1,r+1} = \mathcal{U}(q^n\,p^k)\,\mathcal{U}(q^r\,p^s).$$

Vale pertanto il seguente teorema, che precisa un risultato della nota [1].

TEOREMA I.1. *Sia $S = a\,M$, $M \neq S$, M minimale per a, M sottosemigruppo di S. Allora M (e quindi S) contiene un sottosemigruppo M^1 isomorfo a P.*

Questo Teorema I.1 generalizza in parte un risultato di Ljapin, precisamente (cfr. [2], pag. 126) il

COROLLARIO 6.11. *Un semigruppo S con unità e_1 contiene elementi accrescitivi se e solo se S contiene un sottosemigruppo che contiene e_1 ed è isomorfo a P.*

PROBLEMA. Per il semigruppo S sia $S = aM$, $a \in S$, $M \neq S$. Tra i sottinsiemi minimali relativi ad a ce n'è *sempre* qualcuno che sia un sottosemigruppo di S?

I.2) Al fine di studiare il semigruppo S, quale deve essere sotto le ipotesi del paragrafo I.1, analizziamo in primo luogo la struttura del sottosemigruppo M.

Abbiamo già osservato che M ha unità sinistra m_{11} (cfr. [1], *Proposizione* 1). Ora rileviamo che M contiene elementi accrescitivi sinistri: ad es. m_{21}. Infatti

$$m_{21}(m_{12}M)=m_{11}M=M, \text{ ove } m_{12}M\subset M, \text{ poiché } m_{11}\notin m_{12}M.$$

Infatti per l'isomorfismo $\mathcal{U}$ prima considerato, $\mathcal{U}: P\rightarrow M$, si ha:

$$\mathcal{U}(q)\,\mathcal{U}(p)=\mathcal{U}(qp)\neq\mathcal{U}(e)=m_{11},$$

$$\mathcal{U}(p)\,\mathcal{U}(q)=\mathcal{U}(pq)=\mathcal{U}(e)=m_{11};$$

$\mathcal{U}(q)=m_{12}$ non è invertibile a destra rispetto ad m_{11}, perché, se esistesse un elemento $b\in M$ con $\mathcal{U}(q)\,b=m_{11}$, si avrebbe

$$b=\mathcal{U}(p)\cdot\mathcal{U}(q)\cdot b=\mathcal{U}(p)\cdot m_{11}=m_{21}\,m_{11}=m_{21}=\mathcal{U}(p),$$

cio che è assurdo (poiché $\mathcal{U}(q)\cdot b=\mathcal{U}(q)\,\mathcal{U}(p)\neq m_{11}$).

Essendo $\mathcal{U}(q)$ non invertibile a destra rispetto ad m_{11}, $m_{11}\notin \mathcal{U}(q)\,M=m_{12}M$.

Possiamo ora utilizzare i risultati di Desq (cfr. [3]) sui semigruppi con unità destra (adattandoli ad un semigruppo con unità sinistra) per precisare la struttura di M.

Le notazioni che usiamo (adattando quelle di Desq) sono le seguenti:

G=sottogruppo massimo di M associato all'idempotente m_{11};

$A=\{a\in M/m_{11}\notin aM\}$;

$B=\{b\in M/m_{11}\notin Mb\}$;

$C=A\cap B$; $A'=A-C$; $\overline{B}'=B-C$;

$G:m_{11}=\{m\in M/m\,m_{11}\in G\}$;

$B'=\overline{B}'\cap(G:m_{11})$; $B''=\overline{B}'-B'$.

Si dimostra che i precedenti sottoinsiemi sono tutti sottosemigruppi. Vale allora il seguente Teorema (che è il Teorema 2.1 di [3] adattato al nostro caso).

TEOREMA I.2. *Il semigruppo M, con unità sinistra m_{11}, è la somma (cioè l'unione disgiunta) dei cinque sottosemigruppi G, A', B', B'', C sopra definiti, cioè*

$$M = G + A' + B' + B'' + C; \quad \textit{inoltre}:$$

G è il sottogruppo massimo associato ad m_{11} e coincide con l'insieme degli elementi invertibili (a destra e a sinistra) rispetto a m_{11};

$G+A'$ è un sottosemigruppo uguale all'insieme degli elementi invertibili a sinistra rispetto a m_{11};

$G+B'+B''$ è un sottosemigruppo uguale all'insieme degli elementi di M invertibili a destra;

$A'+C$ è un ideale a destra proprio massimo di M, uguale all'insieme degli elementi non invertibili a destra;

$B'+B''+C$ è un ideale a sinistra uguale all'insieme degli elementi non invertibili a sinistra rispetto a m_{11};

C contiene tutti gli ideali bilateri propri di M;

$G+B'$ è uguale $G : m_{11}$.

Inoltre questi cinque sottosemigruppi si moltiplicano nel modo indicato nella tabella seguente:

	G	A'	B'	B''	C
G	G	A'	B'	B''	C
A'	A'	A'	C	C	C
B'	G	A'	B'	B''	C
B''	B''	M	B''	B''	$B' + B'' + C$
C	$A' + C$	$A' + C$	C	C	C

(nel senso che , ad es. $G\,A' \leq A'$, ecc.).

Come nel lavoro di Desq ([3], Teor. 2.2.; Corollario 2.2; Teorema 2.3) si dimostrano, nel nostro caso, i seguenti risultati.

TEOREMA I.3. *A' è vuoto se e solo se B'' è vuoto.*

TEOREMA I.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento $x \in M$ sia accrescitivo sinistro è che esista un isomorfismo $\mathcal{U}$ di P in M tale che $\mathcal{U}(e)=m_{11}$ e $\mathcal{U}(p)=x\, m_{11}$.*

TEOREMA I.5. *Gli elementi di B'', e solo essi, sono accrescitivi sinistri.*

COROLLARIO I.1. *A' e B'' sono dei sottosemigruppi senza torsione.*

Possiamo però precisare meglio la struttura di M, quale sottosemigruppo minimale di S relativo all'elemento accrescitivo a.

Abbiamo già dimostrato direttamente (e del resto ciò è anche conseguenza dei Teoremi I.1 e I.4) che M ha necessariamente elementi accrescitivi sinistri; quindi è $B'' \neq \Phi$; allora anche $A' \neq \Phi$ (per il Teorema I.3), quindi anche $A' B'' \neq \Phi$; ma si ha (cfr. Tabella) $A' B'' \leq C$, dunque anche $C \neq \Phi$. Dunque:

PROPOSIZIONE I.1. *L'unico sottosemigruppo che, nella decomposizione di M, può essere vuoto è B'.*

In particolare B' è vuoto se m_{11} è unità di M. Inoltre ora $B'+B''+ +C \neq \Phi$; esso è un ideale sinistro proprio di M; pertanto

PROPOSIZIONE I.2. *M non è semplice a sinistra.*

Anche $A'+C \neq \Phi$; esso, per il Teorema I.2, è un ideale destro massimale proprio di M. Il suo complementare in M, $G+B'+B''$, contiene, tutti e soli, gli elementi invertibili a destra di M; ma allora nessun elemento $x \in G+B'+B''$ può appartenere ad un ideale destro proprio, V, di M: infatti da $x \in V$, con $m_{11}=x\, m$ $(m \in M)$, segue $m_{11} \in V$ quindi anche $m_{11} M = M \subseteq V$. Pertanto vale la

PROPOSIZIONE I.3. *M possiede un unico ideale destro massimale proprio, $R=A'+C$, che contiene ogni altro ideale destro.*

$M-R=G+B'+B''$ è un sottosemigruppo; quindi R (secondo Ljapin [2]) è completamente isolato in M.

$M-R$ non è semplice a destra: B'' è un ideale destro proprio di M$-$R, perché $B''(G+B'+B'') \subseteq B''$.

Conseguenza della Proposizione I.3. è la seguente

PROPOSIZIONE I.4. *Se M ha ideali bilateri massimali (propri) ne ha uno solo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché R contiene tutti gli ideali destri di M, contiene anche tutti gli ideali bilateri massimali M_i $(i \in I)$. Supponiamo che vi siano almeno due ideali mssimali, M_1 e M_2. Sia $N_1 = M - M_1$, $N_2 = M - M_2$. Si ha $N_1 \supseteq M - R$, $N_2 \supseteq M - R$, quindi $N_1 \cap N_2 \supseteq M - R \neq \Phi$. Ma d'altra parte $M_1 \cup M_2 = M$, quindi deve essere

$$N_1 \cap N_2 = (M - M_1) \cap (M - M_2) = M - (M_1 \cup M_2) = \Phi.$$

Dall'assurdo segue che deve esserci un unico ideale massimale M_1.

Essendo poi, $M^2 = M$ (poiché $M\,M \supseteq m_{11}\,M = M$) ogni ideale massimale è anche primo, secondo la definizione di Schwarz (cfr. [4], Teorema 2. Il ragionamento della Proposizione I.4. utilizza, in parte, quello del Teorema 2 stesso).

NOTA I.1. Se m_{11} fosse anche unità destra di M (ed allora $B' = \Phi$), posto $L = B'' + C$, si potrebbe dimostrare, ripetendo il ragionamento della Proposizione I.3, che L risulterebbe l'unico ideale sinistro massimale di M, contenente ogni altro ideale sinistro di M.

Finora abbiamo analizzato la struttura di M, sottosemigruppo minimale relativo ad a. Attraverso questo studio,essendo $S = aM = a\,(G + A' + B' + B'' + C)$, anche la struttura di S risulta sufficientemente chiarita.

Ora però determiniamo direttamente alcune altre proprietà del semigruppo S. Innanzitutto vale la

PROPOSIZIONE I.5. *S non è semplice a sinistra.*

DIMOSTRAZIONE: L'elemento accrescitivo sinistro a di S è invertibile a destra ma non a sinistra (cfr. [2], Cp. VI, Teorema 2.1), cioè $Sa \neq S$. Quindi Sa è un ideale sinistro proprio di S. Inoltre è anche $S\,a \neq \{0\}$, anche se $0 \in S$, poiché $S\,a$ contiene $a^2 \neq 0$ $(a^3 \neq 0, \ldots)$. Ricordiamo comunque, che, se $0 \in S$, 0 è considerato un ideale proprio di S.

Nelle nostre ipotesi su S, ogni ideale destro di S è un sottosemigruppo di S del tipo $a\,M_1$ con $M_1 \subseteq M$ ideale destro di M. Infatti sia $R = a\,M_1$ $(M_1 \subset M)$ un ideale destro proprio di S. In particolare deve essere

$$(aM_1)\,M \subseteq aM_1, \quad \text{cioè} \quad a\,(M_1\,M) \subseteq aM_1.$$

Essendo M un sottosemigruppo ed essendo M minimale per a, ciò implica $M_1\,M \subseteq M_1$, quindi M_1 è un ideale destro proprio di M.

Da questa osservazione deriva la seguente

PROPOSIZIONE I.6. *S o non contiene ideali destri massimali (propri) oppure ha un solo ideale destro massimale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che S abbia ideali destri massimali propri (vedremo nella Parte II, nell'esempio del semigruppo Σ, che ciò si può verificare effettivamente), e siano R_1 ed R_2 due tali ideali; per assurdo, supponiamo che siano diversi.

Per l'osservazione precedente, sarà:

$R_1=aM_1$, $R_2=aM_2$, ove M_1, M_2 sono idealidestri di M, quindi contenuti in R. Deve essere $R_1 \cup R_2=S$.

Ma $R_1 \cup R_2=a(M_1 \cup M_2) \subseteq aR$, ed $aR \subset aM=S$, poiché $R=A'+ +C+M$; quindi non può essere $R_1 \cup R_2=S$.

Pertanto S, se contiene ideali destri massimali, ne ha un solo $T, T \subseteq aR$.

Il fatto che M possieda ideali destri propri, cioè non sia semplice a destra, non permetterebbe di affermare che anche S non possa essere semplice a destra. Però, per via diretta, si può dimostrare, in base ad un risultato di Ljapin, che S contiene ideali destri propri.

TEOREMA I.6. *Sia S un semigruppo contenente un elemento accrescitivo sinistro a, e sia $S=aM$, con M sottosemigruppo minimale relativo ad a. Allora S deve contenere ideali destri vS propri, per opportuni elementi $v \in S$.*

DIMOSTRAZIONE. Se tutti gli ideali destri vS di S sono uguali ad S, ($vS=S$, $\forall v \in S$), il semigruppo S risulta invertibile a destra (cfr. [2], Cap. VI). Abbiamo già dimostrato (cfr. [1], Teorema 3) che, sotto le nostre ipotesi su S, M, e qiundi S stesso, possiedono elementi idempotenti. Ma allora S, semigruppo con invertibilità destra e con idempoteti, è isomorfo ad un opportuno semigruppo del tipo $\mathcal{T}$ descritto da Ljapin (cfr. [2], Cap. VI, pag. 238). Il suddetto semigruppo si costruisce mediante un gruppo G ed un semigruppo H nel quale, per $u, v \in H$, sia $u, v \in H$, sia $uv=v$. Precisamente $\mathcal{T}$ è il prodotto cartesiano $HxG=\{(u, g)/u \in H, g \in G\}$ con l'operazione di moltiplicazione seguente:

$$(u, g)(u', g')=(u u', g g')=(u', g g').$$

Evidentemente in $\mathcal{T}$ vale la proprietà associativa, quindi $\mathcal{T}$ è un semigruppo. In $\mathcal{T}$ ogni elemento (u, g) è invertibile a destra, perché, preso un qualsiasi altro elemento (u', g'), abbiamo

$$(u, g)(u', g^{-1} g')=(u', g'), \text{ con } (u', g^{-1} g') \in \mathcal{T}.$$

Ma il nostro semigruppo S non può essere isomorfo a $\mathcal{T}$, perché $\mathcal{T}$ non contiene elementi accrescitivi sinistri.

Sia, infatti, (u_0, g_0) un elemento qualsiasi di $\mathcal{T}$, e supponiamo che esista un sottoinsieme proprio $M \subset \mathcal{T}$ tale che $(u_0, g_0) M = \mathcal{T}$. Poiché $M \subset \mathcal{T}$ propriamente, esiste un elemento $(u_1, g_1) \in \mathcal{T}$, $(u_1, g_1) \notin M$; allora l'elemento $(u_0, g_0)(u_1, g_1) = (u_1, g_0 g_1)$ non appartiene ad $(u_0, g_0) M$.

Infatti, se per un elemento $(\bar{u}, \bar{g}) \in \mathcal{T}$ si ha $(u_0, g_0)(\bar{u}, \bar{g}) = (u_1, g_0 g_1)$, cioè $(\bar{u}, g_0 \bar{g}) = (u_1, g_0 g_1)$, risulta $\bar{u} = u_1$, $\bar{g} = g_1$, per cui $(\bar{u}, \bar{g}) = (u_1, g_1)$ non appartiene ad M.

Pertanto $(u_0, g_0) M \neq \mathcal{T}$, contro l'ipotesi.

Poiché, dunque, S non può essere isomorfo a $\mathcal{T}$, ciò significa che S non può essere invertibile a destra, e quindi che esistono ideali propri destri di S del tipo νS, per opportuni elementi $\nu \in S$. Quindi S non è semplice a destra.

Nota I.2. Con una dimostrazione analoga a quella del Teorema I.6. si trova che S deve contenere anche ideali sinistri propri del tipo $S\nu$, per opportuni elementi $\nu \in S$. Ma questo, ora, è meno interessante, perché già abbiamo notato che, ad es., $S a$ è un ideale sinistro proprio.

Parte II

II.1) Il semigruppo Σ.

Diamo ora un nuovo esempio di semigruppo con elementi accrescitivi, con tre generatori.

Sia $\langle a \rangle$ un semigruppo ciclico infinito, generato dall'elemento a:

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots, a^i, \dots\} \qquad (i \in N);$$

sia P il semigruppo biciclico, cioè il semigruppo libero, con unità e generato da due elementi p, q, $P = \langle p, q \rangle$, con la sola relazione $pq = e$. È noto che esso può essere riguardato come l'insieme

$$P = \{q^i p^j / i,\ j \geq 0 \text{ interi}\}$$

dove $q^0 = p^0 = e$, e la moltiplicazione è definita da

$$(q^i p^j)(q^k p^h) = q^m p^n$$

dove $m = i + k - \min(j, k)$ ed $n = j + h - \min(j, k)$.

Poniamo $\Sigma = \langle a \rangle \cup P$. Definiamo in Σ una operazione di moltiplicazione «$\circ$» nel modo seguente:

1) in $\langle a \rangle$, «$\circ$» coincide con l'operazione data nel semigruppo ciclico;

2) in P, «$\circ$» coincide con la moltiplicazione data;

3) $\quad a^r{}_0 (q^n p^m) = a^{r-n+m}$ se $r > n$;

$a^r{}_0 (q^n p^m) = q^{n-r} p^m$ se $r \leq n$;

$(q^n p^m) \circ a^r = q^n p^{m+r}$

$(r \geq 1;\ n, m \geq 0$, interi).

Rispetto a questa operazione «$\circ$» (della quale d'ora in poi omettiamo il simbolo «$\circ$»), Σ è chiuso, evidentemente.

Si dimostra, poi, che in $(\Sigma, {}_0)$, vale la proprietà associativa.

Infatti, prendendo tre generici elementi di Σ, essendo questi elementi di due tipi (o potenze di a, oppure elementi $q^m p^n$ di P), con essi si si possoo ottenere 2^3 prodotti di tipo diverso, precisamente:

1) $a^n (q^r p^s) (q^k p^m)$; 2) $(q^r p^s) a^n (q^k p^m)$;

3) $(q^r p^s) (q^k p^m) a^n$; 4) $a^n a^m (q^r p^s)$;

5) $a^n (q^r p^s) a^m$; 6) $(q^r p^s) a^n a^m$;

7) $a^n a^m a^r$; 8) $(q^r p^s) (q^k p^m) (q^u p^v)$.

Dobbiamo verificare che in ognuno di questi casi vale la proprietà associativa della moltiplicazione.

Per i prodotti 7) e 8) è già noto che la proprietà associativa vale.

CASO 1). Se $n > r$ ed $s > k$ (quindi anche $n - r + s > k$),

$$a^n (q^r p^s \cdot q^k p^m) = a^n (q^r p^{s-k+m}) = a^{n-r+s-k+m}$$

ed anche

$$(a^n q^r p^s) (q^k p^m) = a^{n-r+s} (q^k p^m) = a^{n-r+s-k+m};$$

se $n \leq r$ ed $s > k$:

$$a^n (q^r p^s \cdot q^k p^m) = a^n (q^r p^{s-k+m}) = q^{r-n} p^{s-k+m}$$

ed anche

$$(a^n q^r p^s) (q^k p^m) = q^{r-n} p^s \cdot q^k p^m = q^{r-n} p^{s-k+m};$$

se $n>r$, $s\leq k$ ed $n>r+k-s$,

$$a^n\,(q^r\,p^s\,q^k\,p^m)=a^n\,(q^{r+k-s}\,p^m)=a^{n-r-k+s+m}$$

ed anche

$$(a^n\,q^r\,p^s)\,(q^k\,p^m)=a^{n-r+s}\,(q^k\,p^m)=a^{n-r+s-k+m},$$

mentre se $n>r$, $s\leq k$ ed $n\leq r+k-s$,

$$a^n\,(q^r\,p^s\,q^k\,p^m)=a^n\,(q^{r+k-s}\,p^m)=q^{r+k-s-n}\,p^m,$$

$$(a^n\cdot q^r\,p^s)\,(q^k\,p^m)=a^{n-r+s}\,(q^k\,p^m)=q^{k-n+r-s}\,p^m;$$

ed infine, se $n\leq r$ ed $s\leq k$:

$$a^n\,(q^r\,p^s\cdot q^k\,p^m)=a^n\,(q^{r+k-s}\,p^m)=q^{r+k-s-n}\,p^m$$

$$(a^n\,q^r\,p^s)\,(q^k\,p^m)=q^{r-n}\,p^s\,q^k\,p^m=q^{r-n+k-s}\,p^m.$$

CASO 2. Se $n>k$ (quindi $n+s>k$),

$$q^r\,p^s\,[a^n\,(q^k\,p^m)]=q^r\,p^s\cdot a^{n-k+m}=q^r\,p^{s+n-k+m}$$

ed anche

$$[(q^r\,p^s)\,a^n]\cdot q^k\,p^m=q^r\,p^{s+n}\,q^k\,p^m=q^r\,p^{m+n+s-k};$$

se $n\leq k$:

$$(q^r\,p^s)\,[a^n\,(q^k\,p^m)=q^r\,p^s\cdot q^{k-n}\,p^m,$$

$$(q^r\,p^s\,a^n)\,(q^k\,p^m)=q^r\,p^{s+n}\,q^k\,p^m=q^r\,p^s\,q^{k-n}\,p^m.$$

CASO 3.

$$(q^r\,p^s)\,[(q^k\,p^m)\,a^n]=q^r\,p^s\,q^k\,p^{m+n};$$

$$(q^r\,p^s\cdot q^k\,p^m)\,a^n=q^r\,p^s\,q^k\,p^{m+n},$$

CASO 4. Se $m>r$ (quindi $m+n>r$),

$$a^n\,(a^m\,q^r\,p^s)=a^n\,a^{m-r+s}=a^{n+m-r+s}$$

ed anche

$$(a^n\,a^m)\cdot q^r\,p^s=a^{n+m}\,q^r\,p^s=a^{n+m-r+s}.$$

Se $m\leq r$ ed $n>r-m$ (cioè $n+m>r$),

$$a^n\,(a^m\,q^r\,p^s)=a^n\,q^{r-m}\,p^s=a^{n+m-r+s}$$

ed anche

$$(a^n\,a^m)\,(q^r\,p^s)=a^{n+m}\,q^r\,p^s=a^{n+m-r+s},$$

mentre se $m \leq r$ ed $n \leq r-m$ (cioè $n+m \leq r$),

$$a^n (a^m q^r p^s) = a^n q^{r-m} p^s = q^{r-m-n} p^s,$$

$$(a^n a^m) (q^r p^s) = a^{n+m} q^r p^s = q^{r-n-m} p^s.$$

CASO 5. Se $n > r$,

$$a^n [(q^r p^s) a^m] = a^n q^r p^{s+m} = a^{n-r+s+m}$$

ed anche

$$(a^n q^r p^s) a^m = a^{n-r+s} \cdot a^m = a^{n-r+s+m}.$$

Se $n \leq r$:

$$a^n [(q^r p^s) a^m] = a^n q^r p^{s+m} = q^{r-n} p^{s+m}$$

ed anche

$$(a^n q^r p^s) a^m = (q^{r-n} p^s) a^m = q^{r-n} p^{s+m}.$$

CASO 6.

$$q^r p^s (a^n a^m) = q^r p^s a^{n+m} = q^r p^{s+n+m}$$

$$(q^r p^s a^n) a^m = (q^r p^{s+n}) a^m = q^r p^{s+n+m}.$$

Dunque la proprietà associativa vale per la moltiplicazione definita in Σ, che, pertanto, risulta un semigruppo.

Σ ha unità destra, e, ma non ha unità sinistra.

Inoltre, poiché $\Sigma = \langle a \rangle \, UP$ e poiché $a^i = a \, (q^0 p^{i-1})$ $(i \geq 1)$ ove $q^0 p^{i-1} \in P$, mentre $q^k p^j = a \, (q^{k+1} p^j)$, con $q^{k+1} p^j \in P$, risulta anche $\Sigma = aP$, con $P \neq \Sigma$. Quindi a è un elemento accrescitivo sinistro di Σ.

Inoitre P (che è un sottosemigruppo di Σ) è minimale, come sottinsieme, relativamente all'elemento accrescitivo a; infatti $ap_1 = ap_2$ $(p_1, p_2 \in P)$ implica evidentemente $p_1 = p_2$.

Σ costituisce pertanto un esempio di semigruppo (senza unità sinistra) con un elemento accrescitivo sinistro a cui è associato un sottosemigruppo minimale (il semigruppo biciclico P). Questo è interessante con riferimento alla nota [1], § 1.

Ma Σ è qualcosa di più di un semplice esempio (cfr. II.3), nella teoria dei semigruppi con elementi accrescitivi.

Nel paragrafo seguente studieremo la struttura del semigruppo Σ.

II.2) Studio di Σ.

Per ottenere i primi risultati interessanti sul semigruppo Σ occorre innanzitutto dimostrare alcune Proposizioni.

PROPOSIZIONE II.2.1. *L'elemento $s = a \, q^u p^v$ di Σ, se $u > 1$ e $v > 0$, ha una (o più) identità sinistra e destra, che non è una sua potenza.*

DIMOSTRAZIONE. Dato $s = a\, q^u\, p^v$ $(u > 1, v > 0)$, sia $s' = a\, q^x\, p^{x-1}$ con x intero positivo tale che $x < \min(u, v+1)$. Abbiamo allora:

$$s\, s' = a\, q^u\, p^v \cdot a\, q^x\, p^{x-1} = a\, q^u\, p^{v+1}\, q^x\, p^{x-1} = a\, q^u\, p^{v+1-x+x-1} = s;$$

$$s'\, s = a\, q^x\, p^{x-1}\, a\, q^u\, p^v = a\, q^x\, p^x\, q^u\, p^v = a\, q^{x+u-x}\, p^v = s.$$

Quindi s ammette una (o più) identità s', sinistra e destra. Ed s' non è una potenza di s, perché $x < u$.

Gli elementi s di Σ che non vengono presi in considerazione nella Proposizione II.2.1. sono gli elementi $s = a\, q^u\, p^v$ corrispondenti ai valori $u = 0, 1$ e $v = 0$, cioè gli elementi del tipo

$$a\, q^0\, p^v = a^{v+1} \qquad (v \geq 0);$$

$$a\, q^1\, p^v = p^v \qquad (v \geq 0);$$

$$a\, q^u\, p^0 = a\, q^u \qquad (u \geq 0)$$

ove $a\, q^u = a$ se $u = 0$, ed $a\, q^u = q^{u-1}$ se $u \geq 1$. In conclusione, sono le potenze di a, di p e di q.

Però per le potenze a^k, p^k, q^k di a, p, q con $k > 1$ certamente esiste in Σ un elemento s', permutabile con esse e che non sia una loro potenza: ad es. a^k è permutabile con a che non è una potenza di a^k. Anche per $p^0, q^0\, (= e)$ evidentemente esiste un tale s.

Dunque, per ora, gli unici elementi s di Σ per i quali può non esistere un $s' \in \Sigma$ con essi permutabile che non sia una loro potenza sono a, p, q. Ed in effetti vale proprio la seguente.

PROPOSIZIONE II.2.2. *Non esistono in Σ elementi permutabili con a, p, q che non siano loro potenze.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $s = a$. Un qualunque elemento di Σ, s', che non sia una potenza di a appartiene a P, quindi $s' = q^x\, p^y$ $(x, y \geq 0$, interi). Si ha: $ss' = a \cdot q^x\, p^y = q^{x-1}\, p^y$, se $x \geq 1$, mentre, in questo caso, $s'\, s = q^x\, p^y a = q^x\, p^{y+1}$, quindi $s\, s' \neq s'\, s$; se poi $x = 0$, $s' = p^y$ ed è $s\, s' = a\, p^y = a^{1+y}$, mentre $s's = p^y\, a = p^{y+1}$ quindi ancora $s\, s' \neq s'\, s$.

Sia $s = p$. Un qualunque elemento di Σ che non sia una potenza di p è del tipo $s' = a\, q^x\, p^y$, con $x \neq 1$. Abbiamo allora: $s\, s' = p\, a\, q^x\, p^y = p^2\, q^x\, p^y$, mentre $s's = a\, q^x\, p^y \cdot p = a\, q^x\, p^{y+1}$. Quindi, se $x \geq 2$, $s\, s' = q^{x-2} p^y$

mentre $s's=q^{x-1}p^{y+1}$; e se $x=0$, $s\,s'=p^{2+y}$ mentre $s'\,s=a^{y+2}$. In ogni caso risulta $s\,s'\neq s'\,s$.

Infine, sia $s=q$, ed $s'=a\,q^x\,p^y$ sia un generico elemento. Abbiamo: $s\,s'=q\,a\,q^x\,p^y=q\,p\,q^x\,p^y$, mentre $s'\,s=a\,q^x\,p^y\,q$. Dunque se $x\geq 1$, $s\,s'=$ $=q^x\,p^y$, mentre $s'\,s=q^{x-1}\,p^y\,q$, per cui, se $y\geq 1$, $s\,s'\neq s'\,s$. Se $x=0$, $s\,s'=qp^{y+1}$, mentre $s'\,s=a^{y+1}\,q$, quindi $s\,s'\neq s'\,s$ per $y\geq 0$. Pertanto $s\,s'=s'\,s$ solo se $y=0$ ed $x\geq 1$; ma in questo caso $s'=a\,q^x=q^{x-1}$ è una potenza di q. È così dimostrata la Proposizione II.2.2.

Dalle Proposizioni II.2.1 e II.2.2. deriva il Teorema seguente, che è quanto ci servirà per ulteriori risultati.

TEOREMA *II*.2.1. *In Σ gli unici elementi tali che non esiste un altro elemento con essi permutabile che non sia una loro potenza sono a, p, q.*

Possiamo ora provare il

TEOREMA II.2.2. *L'unico automorfismo del semigruppo Σ è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Gli elementi a, p, q devono essere trasformati da $\mathcal{U}$, se $\mathcal{U}$ è un qualsiasi automorfismo di Σ, in elementi che (come a,p,q stessi) non siano permutabili con alcun altro elemento di Σ, all'infuori delle loro potenze. Pertanto, per il Teorema II.2.1, $\mathcal{U}$ deve, al più, scambiare a,p,q tra loro. Ma deve essere necessariamente $\mathcal{U}\,(a)=a$. Infatti:

1) sia

$$\mathcal{U}\,(a)=q,\ \mathcal{U}\,(q)=p,\ \mathcal{U}\,(p)=a.$$

Allora abbiamo:

$$aq=e,\ p\,q=e,$$

da cui

$$\mathcal{U}\,(a)\,\mathcal{U}\,(q)=\mathcal{U}\,(p)\,\mathcal{U}\,(q)$$

cioè $q\,p=ap$, $q\,p=a^2$: assurdo! ($a^2\notin P$).

2) sia

$$\mathcal{U}\,(a)=q,\ \mathcal{U}\,(q)=a,\ \mathcal{U}\,(p)=p.$$

Allora da $a\,q=e$ e $p\,q=e$ segue:

$$\mathcal{U}\,(a)\,\mathcal{U}\,(q)=\mathcal{U}\,(p)\,\mathcal{U}\,(q),\ q\,a=p\,a,$$

$q\,p=p^2$: assurdo!

3) sia

$$\mathcal{U}(a)=p,\ \mathcal{H}(q)=a,\ \mathcal{U}(p)=q.$$

Da $p\,q=e,\ aq=e$ segue, in questo caso:

$$\mathcal{U}(p)\,\mathcal{U}(q)=\mathcal{U}(a)\,\mathcal{U}(q),\ q\,a=p\,a$$

$qp=p^2$: assurdo!

4) sia

$$\mathcal{U}(a)=p,\ \mathcal{U}(q)=q,\ \mathcal{U}(p)=a.$$

Da $pa=p^2=aq\,p^2$ abbiamo:

$$\mathcal{U}(p)\,\mathcal{U}(a)=\mathcal{U}(a)\,\mathcal{U}(q)\,[\mathcal{U}(p)]^2$$

cioè $ap=p\,q\,a^2$,

$$a^2=e\,a^2=p^0\,a^2=p^2:$$

assurdo!

Dunque deve essere $\mathcal{U}(a)=a$.
Può essere ancora:

$$\mathcal{U}(p)=p,\ \mathcal{U}(q)=q \text{ oppure } \mathcal{U}(p)=q,\ \mathcal{U}(q)=p.$$

Ma nel secondo caso si avrebbe:

$$\mathcal{U}(q^2\cdot p)=\mathcal{U}(q^2)\,\mathcal{U}(p)=p^2\,q=p,\ \mathcal{U}(q)=p,$$

un assurdo poiché $q^2\,p\neq q$.

Dunque un qualsiasi automorfismo $\mathcal{H}$ di Σ deve essere tale che

$$\mathcal{U}(a)=a,\ \mathcal{U}(p)=p,\ \mathcal{U}(q)=q.$$

Ma allora, poiché a,p,q sono i tre generatori di Σ, risulta $\mathcal{U}=Id_\Sigma$

COROLLARIO II.2.1. *Siano $\mathcal{U}$ e Ψ due isomorfismi tra $\Sigma=aP$ ed un altro semigruppo. Allora $\mathcal{U}=\Psi$.*

DIMOSTRAZIONE. $\mathcal{U}\Psi^{-1}$: $\Sigma\to\Sigma$ è un automorfismo di Σ.
Dunque per il Teorema II.2.2. $\mathcal{H}\,\Psi^{-1}=Id_\Sigma$, cioè $\mathcal{U}=\Psi$.

Proseguiamo nello studio di Σ, determinando, in esso, gli elementi accrescitivi.

TEOREMA II.2.3. *Nel semigruppo Σ gli elementi accrescitivi destri sono, tutte e sole, le potenze q^u di $q\,(u>0)$; gli elementi accrescitivi sinistri sono, tutte e sole, le potenze a^k di $a\,(k\geq 1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Nel semigruppo $\Sigma=aP$, preso l'elemento $q^u, u>0$, abbiamo:

$$(aPp^u)\,q^u=aP\,(p^u\,q^u)=a\,(P\,e)=\Sigma.$$

D'altra parte $P\,p^u\neq P$ $(q\notin P\,p^u)$, quindi $a\,P\,u^u\neq\Sigma$, poiché P è minimale rispetto ad a. Pertanto q^u è un elemento accrescitivo destro di Σ.

Un elemento qualsiasi di Σ che non sia una potenza di a o q si può porre, univocamente, nella forma $s=a\,q^u\,p^v$ con $v>0$, $u>0$. Un tale elemento non è accrescitivo destro. Infatti $Ps=(P\,a)\,q^u\,p^v\subseteq Pq^u\,p^v$; ma $P\,q^u\,p^v\neq P$ se $u>0$, $v>0$ $(q\notin P\,q^u\,p^v)$, quindi $Ps\subset P$, onde anche $\Sigma s=(a\,P)\,s=a\,(P\,s)\subset\Sigma$, poiché P è minimale per l'elemento accrescitivo a.

Neppure una qualsiasi potenza di a è elemento accrescitivo destro di Σ. Infatti $Pa^k=Pp^k\neq P$ $(q\notin P\,p^k,\ k>0)$, onde $\Sigma\,a^k=(a\,P)\,a^k=$ $=a\,(Pa^k)\subset\Sigma$.

Dunque, solo le potenze $q^u\,(u>0)$ di q sono elementi accrescitivi destri di Σ.

L'elemento a è accrescitivo sinistro in $\Sigma=a\,P$. Ma in generale $a^k\,(k\geq 1)$ è un elemento accrescitivo sinistro di Σ. Infatti:

$$a^k\,P=a^{k-1}\,(a\,P)=a^{k-1}\,\Sigma\supseteq a^{k-1}\,P=a^{k-2}\,\Sigma\supseteq a^{k-2}\,P\supseteq\ldots\supseteq a\,P=\Sigma.$$

Poiché $\Sigma=<a>\,UP$, un elemento qualsiasi di Σ che non sia una potenza di a è un elemento di P, $s=q^u\,p^v$; ma è:

$$q^u\,p^v\,\Sigma=(q^u\,p^v\,a)\,P=q^u\,p^{v+1}\,P\subseteq P\subset\Sigma,$$

quindi s non può essere un elemento accrescitivo sinistro di Σ.

TEOREMA II.2.4. *P è l'unico destro massimale di Σ e contiene ogni altro ideale destro di Σ.*

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto, P è un ideale destro di Σ, perché $Pa\subset P$. Ed è massimale. Sia, infatti, T un ideale destro di Σ, contenente propriamente P; poiché $\Sigma=<a>\,UP$, T, oltre P, dovrà contenere una potenza $a^k\,(k\geq 1)$ di a. Ma allora T, contenendo a^k e q^{k-1}, contiene anche

$a^k q^{k-1}=a$; pertanto T coincide col sottosemigruppo generato da a e P, cioè $T=\Sigma$.

Dimostriamo ora che P è l'unico ideale destro massimale di Σ.

Sia T un qualsiasi ideale destro proprio di $\Sigma=aP$. Deve essere $T=aP_1$ con $P_1 \subset P$. Si ha $Ts \subseteq T$ per ogni $s \in \Sigma$, cioè $aP_1 s \subseteq aP_1$ per ogni $s \in \Sigma$; in particolare deve essere $a P_1 \bar{p} \subseteq aP_1$ per ogni $\bar{p} \in P$; cioè per qualsiasi elemento $p_1 \in P_1$ e $\bar{p} \in P$, deve esistere un elemento $p_1' \in P_1$ per cui $ap_1 \bar{p}=ap_1'$; di qui, essendo P minimale rispetto ad a, segue $p_1 \bar{p}=p_1'$ cioè $P_1 \bar{p} \subseteq P_1$. Quindi P_1 è un ideale destro di P. Viceversa, sia P_1 un ideale destro qualsiasi di P, $P_1 P \subseteq P_1$. Allora aP_1 è un ideale destro di Σ.

Infatti, preso $s=a p' \in \Sigma$ $(p' \in P)$, si ha:

$$(a P_1)\, ap'=a\,(P_1\, a)\, p'=a\,(P_1\, p)\, p'=a\,(P_1\, p\, p') \subseteq aP_1.$$

Dunque gli ideali destri di Σ sono tutti e soli i sottinsiemi di Σ del tipo $T=a P_1$ con P_1 ideale destro di P.

Gli elementi di P sono quelli del quadro seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
e & q & q^2 & q^3 & \dots \\
p & qp & q^2 p & q^3 p & \dots \\
p^2 & qp^2 & q^2 p^2 & q^3 p^2 & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
p^k & qp^k & q^2 p^k & q^3 p^k & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Consideriamo il sottoinsieme ottenuto escludendo e e tutte le potenze di p: sia esso P_1. Cioè $P_1=\{q^m p^n \in P/m>0\}$. Evidentemente, se $q^m p^n \in P_1$ e $q^u p^v \in P$, allora $q^m p^n \cdot q^u p^v \in P_1$.

Quindi $P_1 P \subseteq P_1$, cioè P_1 è un ideale destro di P.

Anzi, P_1 è un ideale destro massimale di P. Infatti, sia $P_2 \supset P_1$ un ideale destro di P. Allora P_2 dovrà contenere almeno una potenza p^k $(k \geq 1)$ di p. Ma, contenendo p^k e P_1, quindi anche q^k, P_2 contiene ancora $p^k q^k=e$, quindi $P_2=P$. Inoltre P_1 è l'unico ideale destro massimale di P, poiché ogni altro ideale destro di P, non potendo contenere potenze p^k di p ($k \geq 0$), deve essere contenuto in P_1.

Ed allora anche Σ contiene un unico ideale destro massimale, che è appunto $aP_1 = P$.

TEOREMA II.2.5. *L'ideale principale sinistro generato da a, $a \, U \, \Sigma a$, è l'unico ideale sinistro massimale di Σ e contiene ogni altro ideale sinistro.*

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto, $\Sigma a = (aP)\, a = a\,(P\, a)$; $Pa = Pp \subset \subset P \; (e \notin Pp)$.

Essendo P minimale per $a, a\,(P\,a) \subset \Sigma$, cioè $\Sigma\, a$ è un sottinsieme proprio di Σ. Essendo $\Sigma\;(\Sigma\, a) \subseteq \Sigma a$, Σa risulta un ideale sinistro proprio di Σ.

Il sottinsieme $L = aU\,\Sigma a$ di Σ è un sottinsieme proprio, $\Sigma - L = \{q^k, k \geq 0\}$, è un ideale sinistro (principale) di Σ (poiché $\Sigma L = \Sigma a \, U \, \Sigma\,(\Sigma a) = \Sigma a \subset L$) ed è massimale.

Infatti, se $L_1 \supset L$ è un ideale sinistro di Σ, allora per qualche $k \geq 0$ $q^k \in L_1$; ma $p^k \in L$, quindi $p^k \in L_1$, quindi anche $p^k\, q^k = e \in L_1$, cioè $L_1 \supseteq \supseteq \Sigma e = \Sigma$.

Inoltre, nessun ideale sinistro proprio L_2 di Σ può contenere una potenza q^k, $k \geq 0$, di q: infatti, dovendo essere $\Sigma L_2 \subseteq L_2$, risulterebbe $p^k\, q^k = e \in L_2$, quindi $\Sigma e = \Sigma \subseteq L_2$.

Pertanto $L = aU\Sigma a$ contiene ogni altro ideale sinistro proprio (e quindi è anche l'unico ideale sinistro massimale).

TEOREMA II.2.6. *Il semigruppo Σ è semplice.*

DIMOSTRAZIONE. Un qualunque ideale bilatero M di Σ deve essere, in particolare, un ideale destro, quindi contenuto in P.

Ma P non può contenere ideali sinistri M di Σ; infatti, in questo caso, se M contenesse l'elemento $q^m\, p^n$ ($m, n \geq 0$) si avrebbe anche:

$$(a\, p^m) \cdot (q^m\, p^n) = a\,(p^m\, q^m)\, p^n = ap^n = a^{1+n} \in M,$$

quindi $a^{1+n} \in P$, ciò che è assurdo.

Nello studio di un semigruppo è molto importante (cfr. ad es. [2], Cap. V) sapere se esistono ideali sinistri (destri, bilateri) minimali. Nel caso di Σ tali ideali non esistono.

TEOREMA II.2.7. *Gli ideali destri di Σ sono i sottinsiemi R_u di P, ove $R_u=\{q^m p^n/m\geq u\geq 0,\ n\geq 0\}$. Σ non ha ideali destri minimi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia R un qualsiasi ideale destro di $\Sigma, R\subseteq P$. Gli elementi di R sono del tipo $q^x p^y$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. Se q^u è la minima potenza di q che compare in un qualsiasi elemento $q^x p^y$ di R, allora $q^u \in R$ (infatti, se $q^u p^y \in R$, anche $q^u p^y q^y = q^u \in R$). *Di* conseguenza R deve contenere tutti i prodotti di q^u per elementi qualsiasi $a\, q^x p^y \in \Sigma$; in questo modo si ottengono tutti gli elementi di R_u, quindi $R_u \subseteq R$.

D'altra parte $P-R_u=\{q^m p^n/m<u,\ n\geq 0\}$; R non può contenere nessuno di questi elementi, per l'ipotesi fatta su u. Dunque $R=R_u$. Inoltre, evidentemente, $R_u\supset R_{u+1}\supset\ldots\supset R_{u+k}\supset\ldots$ quindi nessun ideale destro è minimo.

TEOREMA II.2.8. *Gli ideali sinistri propri di Σ sono unicamente i sottinsiemi $\Sigma\, a^k$ e $\Sigma\, a^k\, U\, a^k$ $(k\geq 1)$. Pertanto non vi sono in Σ ideali sinistri minimali.*

DIMOSTRAZIONE. Un qualsiasi ideale sinistro di Σ, $L_1\subseteq\, <a>U\, P$, non può essere contenuto in $<a>$, però deve contenere una potenza di a; anzi, precisamente, se p^v è la minima potenza di p $(v\geq 0)$ che compare negli elementi $q^x p^y$ di L_1 (necessariamente ve ne sono), allora $a^{v+1}\in L_1$. Infatti se $q^x p^v \in L_1$, allora anche $(a\, p^x)\,(q^x p^v) = a\,(p^x q^x)\, p^v = a\, p^v = a^{1+v} \in L_1$.

Sia dunque a^k $(k\geq 1)$ la minima potenza di a contenuta in L_1. Allora anche $p^0 a^k = p^k \in L_1$, quindi anche

$$B_k=\{q^m p^n/m\geq 0,\ n\geq k\}\subset L_1.$$

Posto $A_k=\{a^m/m>k\}$, evidentemente $A_k\subset L_1$.

D'altra parte $A_k\, U\, B_k=\Sigma\, a_k$, quindi $L_1\supseteq\Sigma\, a^k\, U\, a^k$.

Se $L_1=\Sigma\, a^k\, U\, a^k$, L_1 coincide con l'ideale sinistro principale generato da a^k. Se L_1 contiene propriamente questo ideale, esso per altro può contenere solo elementi del tipo $q^x p^{k-1}$ (poiché, per ipotesi, a^k è la minima potenza di a in L_1); in questo caso L_1 conterrà tutti gli elementi $q^x p^{k-1}$ con $x\geq 0$, quindi $L_1\supset B_{k-1}$, ed anzi risulta $L_1=A_{k-1}\, U\, B_{k-1}$. Pertanto è $L_1=\Sigma\, a^{k-1}$ se $k>1$, oppure $L_1=\Sigma$ se $k=1$. Infatti, se $L_1\supset \Sigma\, a\, U\, a$ $(k=1)$, allora è $L_1=A_0\cup B_0=\,<a>UP=\Sigma$, in accordo col fatto che $\Sigma\, a\, U\, a$ è ideale sinistro massimale (cfr. Teor. II.2.5.).

Pertanto gli ideali sinistri propri di Σ sono unicamente i sottinsiemi Σa^k e $\Sigma a^k\, U\, a^k$ $(k\geq 1)$.

Poiché $\Sigma a^k \supset \Sigma a^{k+1}$, nessuno di questi ideali è minimo.

Terminiamo lo studio di Σ indicando una sua decomposizione del tipo di quella considerata per M nella Parte I.

Σ non ha unità sinistra, mentre contiene elementi accrescitivi sinistri: in questo, anzi, consiste parte del suo interesse (cfr. Introduzione), poiché con esso è dimostrato che vi sono semigruppi con elementi accrescitivi sinistri cui è associabile un sottosemigruppo minimale, pur non avendo essi una unità sinistra. Però Σ ha una unità destra, *e;* dunque esso ammette la decomposizione indicata da Desq nel Teorema 2.1. di [3].

Seguendo le notazioni di Desq, poniamo:

$$A=\{a\in\Sigma/e\notin\Sigma a\};\ B=\{b\in\Sigma/e\notin b\Sigma\};$$

$$C=A\cap B;\quad A'=A-C;\quad \overline{B}'=B-C;$$

G = sottogruppo massimo di Σ associato ad e ;

$G{:}\,e=\{s\in\Sigma/es\in G\};\quad B'=\overline{B}'\cap(G{:}\ e);$

$$B''=\overline{B}'-B'.$$

Dal Teorema 2.1. di [3] deriva il seguente:

TEOREMA II.2.9. *Il semigruppo Σ ammette la decomposizione*

$$\Sigma=G+A'+B'+B''+C \tag{1}$$

ove ora abbiamo:

$$G=\{e\};\quad A'=<a>\ U <p>;\quad B'=\Phi;\quad B''=<q>;$$

$$C=\{q^m\,p^n/m\geq 1,\ n\geq 1\}.$$

Inoltre:

$G=\{e\}$ *è l'insieme degli elementi invertibili a destra ed a sinistra (rispetto ad e)*;

$G+A'=\{e\}+<a>+<p>$ *è un sottosemigruppo uguale all'insieme degli elementi invertibili a destra;*

$G+B'+B''=\{e\}+<q>$ *è un sottosemigruppo uguale all'insieme degli elementi di Σ invertibili a sinistra*;

$A'+C=a\,U\,\Sigma a$ *è un ideale proprio massimo sinistro, uguale all'insieme degli elementi non invertibili a sinistra di* Σ;

$B'+B''+C=<q>+C$ *è un ideale destro (non massimale), uguale all'insieme degli elementi non invertibili a destra;*

C *contiene tutti gli ideali bilateri propri di* Σ *(non ve ne sono);*

$G+B'=G$: $e=\{e\}$.

Infine, in Σ, *i sottosemigruppi della decomposizione* (1) *si moltiplicano fra loro secondo la tabella seguente:*

	G	A'	B''	C
G	G	A'	B''	$C+A'$
A'	A'	A'	Σ	$C+A'$
B''	B''	C	B''	C
C	C	C	$B''+C$	C

(*nel senso*: $A'\,G\subseteq A'$; ...).
Precisamente è anzi:

$$A'\,B''=G+A'+B''.$$

Osserviamo che gli elementi di $\Sigma=<a>\,UP$ possono essere disposti nel quadro seguente:

$$\begin{array}{ll|lllll}
a & e & q & q^2 & \dots & q^k & \dots \\
\hline
a^2 & p & qp & q^2p & \dots & q^kp & \dots \\
a^3 & p^2 & qp^2 & q^2p^2 & \dots & q^kp^2 & \dots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a^{k+1} & p^k & qp^k & q^2p^k & \dots & q^kp^k & \dots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

e si verifica subito che effettivamente vale la decomposizione (1) ed è esatta la tabella soprariportata.

II.3) Ruolo di Σ nella teoria dei semigruppi con elementi accrescitivi.

Sia $S = bM$ con $M \subset S$, M sottinsieme minimale relativo all'elemento accrescitivo sinistro b, M ideale destro di S. (Da notare che ciò è quanto si verifica per la classe di semigruppi dell'Esempio riportato in [1], §1). Allora come abbiamo già rilevato nella Parte I di questo lavoro (Parte I, § 1, Teorema I.1), S contiene un sottosemigruppo

$$M^1 \simeq P,\ M^1 = M_1 U M_2 U \dots U M_k U \dots$$

ove i sottinsiemi M_i sono definiti nel modo indicato nella Parte I.

Inoltre ora vale anche il Teorema 5 di [1], per cui la legge di moltiplicazione delle potenze b^r di b con elementi di M^1 è la seguente:

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} & b^r m_{k+1,n+1} = b^{r-n+k} \quad \text{se} \quad r > n \quad (k \geq 0,\ n \geq 0,\ r \geq 1); \\ & b^r m_{k+1,n+1} = m_{k+1,n-r+1} \quad \text{se} \quad r \leq n; \\ & m_{k+1,n+1}\, b^r = m_{k+r+1,n+1}. \end{aligned}$$

Allora $<b>\ U M^1$ è un sottosemigruppo di S, uguale anche a bM^1; poniamo $T = <b>\ UM^1 = bM^1$.

Inoltre la corrispondenza biunivoca $\mathcal{U} : \Sigma \rightleftarrows T$ tale che $\mathcal{U}\,(aq^n p^k) = b\, m_{k+1,\, n+1}$ è un isomorfismo.

Infatti, se $r \geq k+1$,

$$\mathcal{U}\,(aq^n\, p^k \cdot a\, q^r\, p^s) = \mathcal{U}\,(a\, q^n\, p^{k+1}\, q^r\, p^s) = \mathcal{U}\,(a\, q^{n+r-k-1}\, p^s) = b\, m_{s+1,n+r-k},$$

come anche

$$\mathcal{U}(a\, q^n\, p^k) \cdot (a\, q^r\, p^s) = b\, m_{k+1,n+1} \cdot b\, m_{s+1,r+1} =$$

$$= b\, m_{k+2,n+1} \cdot m_{s+1,r+1} = b\, m_{s+1,n+r-k};$$

se $r < k+1$,

$$\mathcal{U}(a\, q^n\, p^k \cdot a\, q^r\, p^s) = \mathcal{U}\,(a\, q^n\, p^{k+1}\, q^r\, p^s) =$$

$$= \mathcal{U}\,(a\, q^n\, p^{s+k+1-r}) = b\, m_{s+k-r+2,n+1}.$$

come pure

$$\mathcal{U}(a\, q^n\, q^k)\, \mathcal{U}(a\, q^r\, p^s) = b\, m_{k+2,n+1} \cdot m_{s+1,r+1} = b\, m_{s+k-r+2,n+1}.$$

Dunque S contiene un sottosemigruppo isomorfo a Σ.
Vale precisamente il seguente

TEOREMA II.3.1. *Sia $S=bM$, $M \neq S$, M minimale rispetto all'elemento accrescitivo sinistro b, M ideale destro di S. Allora esiste un isomorfismo $\mathcal{K}$ di $\Sigma\ (=a\, P)$ in S per cui $\mathcal{U}(a) = b$ e $\mathcal{U}(P) = M^1 \subseteq M$.*

In quale modo e fino a che punto questo Teorema II.3.1. si può invertire?

Innanzitutto conviene osservare che, nelle ipotesi su S ricordate all'inizio del paragrafo (cioè nelle ipotesi del Teorema II.3.1) M coincide con il sottosemigruppo N di S costituito da tutti gli elementi per i quali m_{11} è unità sinistra.

Infatti, sarà $N=bM^*$, ove $M^* \subset M$, propriamente ($N \neq S$, poiché $b \notin N$, in quanto $m_{11}\, b = m_{21} \neq b$); deve essere, poi, $m_{11}\, bm^* = bm^*$, per ogni elemento $m^* \in M^*$; d'altra parte $m_{11}\, b\, m^* = m_{21}\, m^* \in M$, quindi $bm^* \in M$, cioè $N \subseteq M$, e poiché $M \subseteq N$, ne segue $M=N$.

Anzi, è $M = m_{11}\, S$; infatti, m_{11} è unità sinistra per gli elementi di $m_{11}\, S$, quindi $m_{11}\, S \subseteq M$; d'altra parte $M = m_{11}\, M \subseteq m_{11}\, S$.

L'enunciato più naturale (alla luce dei Teoremi di Ljapin e Desq) del teorema «inverso» del Teorema II.3.1. è il seguente.

TEOREMA II.3.2. *Se esiste un monomorfismo $\mathcal{H}$ di Σ nel semigruppo S ,per cui $\mathcal{U}(a)=b$, $\mathcal{U}(P)=M^1$, $\mathcal{U}(e)=m_{11}$, allora $m_{11}\, S$ contiene elementi accrescitivi sinistri ed $m_{11}\, b$ è uno di questi.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, innanzitutto, $\mathcal{U}\ (q^n\, p^k) = m_{k+1,n+1} \in M^1$. Così risulta ben determinata una decomposizione di M^1,

$$M^1 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup \ldots$$

ove

$$M_k = \{ m_{k,1}, m_{k,2}, \ldots m_{k,i}, \ldots \} \quad (k=1,2,3,\ldots);$$

l'isomorfismo $\mathcal{U}$ è tra Σ e $bM^1 = \langle b \rangle \cup M^1$ e la moltiplicazione in bM^1 (per l'isomorfismo $\mathcal{U}$ con Σ) è quella determinata dalle leggi (a) all'inizio del paragrafo.

Evidentemente $m_{11}\, S$ è il sottosemigruppo di S costituito dagli elementi per cui m_{11} è unità sinistra.

È un ideale destro di S. L'elemento $m_{11}\, b = m_{21} \in M^1$ ammette m_{11} come unità sinistra, quindi $m_{11}\, b \in m_{11}\, S$.

Anche $M^1 \subseteq m_{11}\, S$, ed è M^1 isomorfo a P; allora, per il Teorema I.4. di Desq (Parte I), $m_{11}\, S$ contiene elementi accrescitivi sinistri. Del resto, si ha:

$m_{12}\, S \subseteq m_{11}\, S$, poiché m_{11} è unità sinistra in $m_{12}\, S$, ed è, anzi, $m_{12}\, S \subset m_{11}\, S$, poiché $m_{11} \notin m_{12}\, S$.

Infatti
$$\mathcal{U}(q)\, \mathcal{U}(p) = \mathcal{U}(q\, p) \neq \mathcal{U}(e) = m_{11}$$
$$\mathcal{U}(p)\, \mathcal{U}(q) = \mathcal{U}(p\, q) = \mathcal{U}(e) = m_{11}\,;$$

se esistesse un elemento $x \in S$ tale che $m_{12}\, x = m_{11}$, allora sarebbe anche $m_{12}\,(m_{11}\, x) = m_{11}$ con $m_{11}\, x = c \in m_{11}\, S$; ma se, per un elemento $c \in m_{11}\, S$ fosse $m_{12}\, c = \mathcal{U}(q)\, c = m_{11}$, avremmo:
$$c = m_{11}\, c = \mathcal{U}(p)\, \mathcal{U}(q)\, c = \mathcal{U}(p) \cdot m_{11} = m_{21}\, m_{11} = m_{21} = \mathcal{U}(p),$$

ciò che è assurdo, perché $\mathcal{U}(q)\, \mathcal{U}(p) \neq m_{11}$.

Allora $m_{21} = m_{11}\, b$ è un elemento accrescitivo sinistro di $m_{11}\, S$, perché $m_{21}\,(m_{12}\, S) = (m_{21}\, m_{12})\, S = m_{11}\, S$.

NOTA. II.1. Il Teorema II.3.2 appare come il «corrispondente» del Teorema I.4. di Desq (Parte I) per semigruppi S generici, che non hanno unità sinistra. Infatti, se S ha unità sinistra m_{11} ed esiste un monomorfismo $\mathcal{U}$ di Σ in S tale che $\mathcal{U}(a) = b$, $\mathcal{U}(e) = m_{11}$, allora il Teorema II.3.2 afferma che $S\ (= m_{11}\, S)$ ha come elemento accrescitivo sinistro l'elemento $b\ (= m_{11}\, b)$, cioè l'elemento $b\, m_{11}\ (= b$, per l'isomorfismo $\mathcal{U}$ tra Σ e $b\, M^1)$. Ma è anche $m_{11}\, b = m_{21} = \mathcal{U}(p) = b = b m_{11}$, cioè $b m_{11} = \mathcal{U}(p)$; quindi il risultato ottenuto col Teorema II.3.2 è lo stesso del Teorema I.4 di Desq, in questo caso particolare.

È interessante anche un'altra versione del Teorema «inverso» del Teorema II.3.1.

Supponiamo che esista un monomorfismo $\mathcal{U}$ di Σ in S, $\mathcal{U}(a) = b$, $\mathcal{U}(e) = m_{11}$, $\mathcal{U}(P) = M^1 = M_1 \cup \ldots \cup M_k \cup \ldots$ ove i sottinsiemi M_i sono sempre quelli precedentemente definiti (cfr. Dimostrazione del Teorema II.3.2),
$$\mathcal{U}(\Sigma) = b\, M^1 = \langle b \rangle \cup M^1.$$

Sia $M=m_{11}S$; M è ideale destro di S. Abbiamo:

$$bM=b\,(m_{11}S)=(b\,m_{11})\,S=bS.$$

D'altra parte, bS contiene $b\,(bm_{11}=b)$; bS contiene M, propriamente, perché, se $m\in M$, è

$$m=m_{11}\,m=(b\,m_{12})\,m=b\,(m_{12}\,m)\in bS,$$

mentre d'altro canto, $b\notin M$ $(m_{11}\,b=m_{21}\neq b)$. Si è pertanto dimostrato il seguente

TEOREMA II.3.3. *Se esiste un monomorfismo $\mathcal{U}$ di Σ in S, $\mathcal{U}(a)=b$, $\mathcal{U}(e)=m_{11}$, allora, se M è il sottosemigruppo di S costituito dagli elementi di S per i quali m_{11} è unità sinistra, b è elemento accrescitivo sinistro di bS e precisamente è $bS=bM$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] F. MIGLIORINI, *Magnifying elements and minimal subsemigroups*, Per. Math. Hungarica (in corso di stampa).

[2] E. S. LJAPIN, *Semigroups*, Trans. Math. Monographs, Vol. 3, (1963).

[3] R. DESQ, *Relations d'equivalence principales en theorie des demigroupes*, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse (4) 27 (1963), pp. 1-145.

[4] S. SCHWARZ, *Prime ideals and maximal ideals in semigroups*, Czech. Math. Journal 19 (94), 1969, Praha.

[5] F. MIGLIORINI, *Some researches on semigroups with magnifying elements*, Per. Math. Hungarica, Vol. 1 (4), (1971), pp. 279-286.

[6] A. H. CLIFFORD - G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, Math. Surveys, N. 7, Vol. I.